Ultrafiltros en las Matemáticas

Osvaldo Guzmán

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM

Parte VI: El Teorema de Tychonoff

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Las sucesiones convergentes son de gran ayuda cuando estudiamos espacios métricos, pues todos los conceptos topológicos (como continuidad, cerradura,...) pueden expresarse mediante ellas.

Mientras que las sucesiones siguen siendo de gran ayuda en ciertas clases de espacios topológicos (como primero numerables, Frechét o secuenciales), en algunos espacios no sirven para nada.

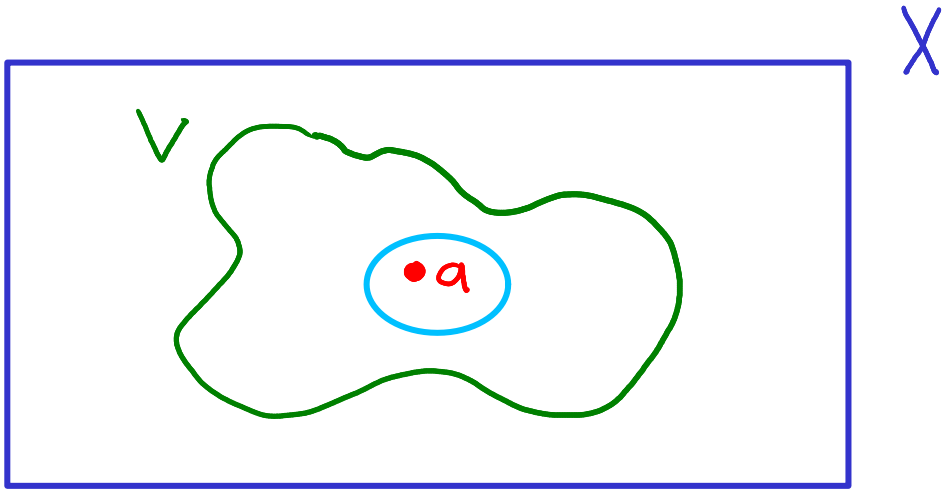
Por ejemplo en $\beta\omega$ toda sucesión convergente es eventualmente constante. Es decir, las únicas sucesiones convergentes son las triviales. Sin embargo, ¡este espacio no es nada trivial!

Afortunadamente, generalizar la noción de convergencia para que sea útil en cualquier espacio topológico.

Definición

Sea X un espacio y $a \in X$.

1. Decimos que $U \subseteq X$ es *una vecindad de* a si a pertenece al interior de U.
2. $\mathcal{N}(a)$ es la colección de vecindades de a.



Tarea

Demostrar que $\mathcal{N}(a)$ es un filtro en X.

En lo que sigue, X siempre será un espacio topológico y I será un conjunto de índices.

Definición (Convergencia)

Sea X un espacio, $a \in X$ y $\langle x_n \rangle_{n \in \omega}$ sucesión de X. Decimos que $\langle x_n \rangle_{n \in \omega} \to a$ si:

Para todo $U \in \mathcal{N}(a)$, existe $n \in \omega$ tal que si $m > n$, entonces $x_m \in U$.

Definición (Convergencia)

Sea X un espacio, $a \in X$ y $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$ sucesión de X. Decimos que $\langle x_n \rangle_{n\in\omega} \longrightarrow a$ si:

Para todo $U \in \mathcal{N}(a)$ se tiene que

$$\exists^{\text{fin}^*} m(x_m \in U).$$

Definición

Sea X un espacio, $a \in X$, $\mathcal{U}$ ultrafiltro en I y $\langle x_i \rangle_{i \in I} \subseteq X$. Decimos que $\langle x_i \rangle_{i \in I}$ *$\mathcal{U}$-converje a a* ($\langle x_i \rangle_{i \in I} \to_{\mathcal{U}} a$) si:

Para todo $U \in \mathcal{N}(a)$ se tiene que

$$\exists^{\mathcal{U}} i (x_i \in U).$$

Tarea

¿Que significa la ultraconverjencia cuando el ultrafiltro es principal?

Tarea

Sea X espacio Hausdorff, $a, b \in X$, $\mathcal{U}$ ultrafiltro en I y $\langle x_i \rangle_{i \in I} \subseteq X$. Si $\langle x_i \rangle_{i \in I}$ $\mathcal{U}$-converje a a y a b, entonces $a = b$.

Proposición

Sea $B \subseteq X$ y $a \in X$. Son equivalentes:

1. $a \in \overline{B}$.
2. Existe I, $\mathcal{U}$ ultrafiltro en I y $\langle x_i \rangle_{i \in I} \subseteq B$ tal que $\langle x_i \rangle_{i \in I} \to^{\mathcal{U}} a$.

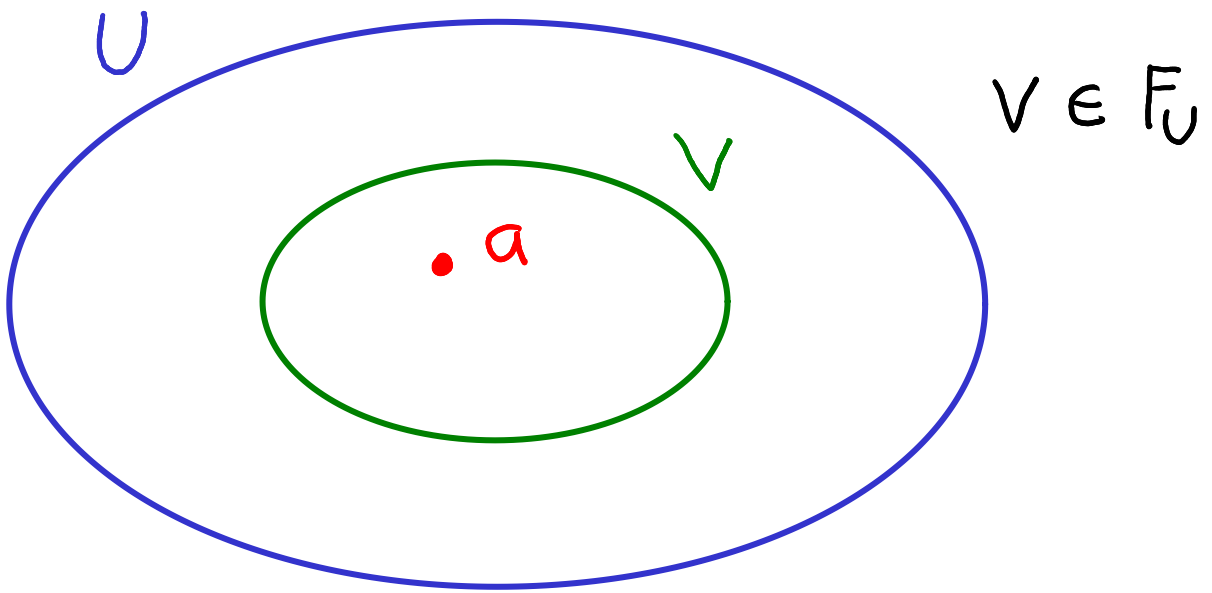
Proposición

Sea $B \subseteq X$ y $a \in X$. Son equivalentes:

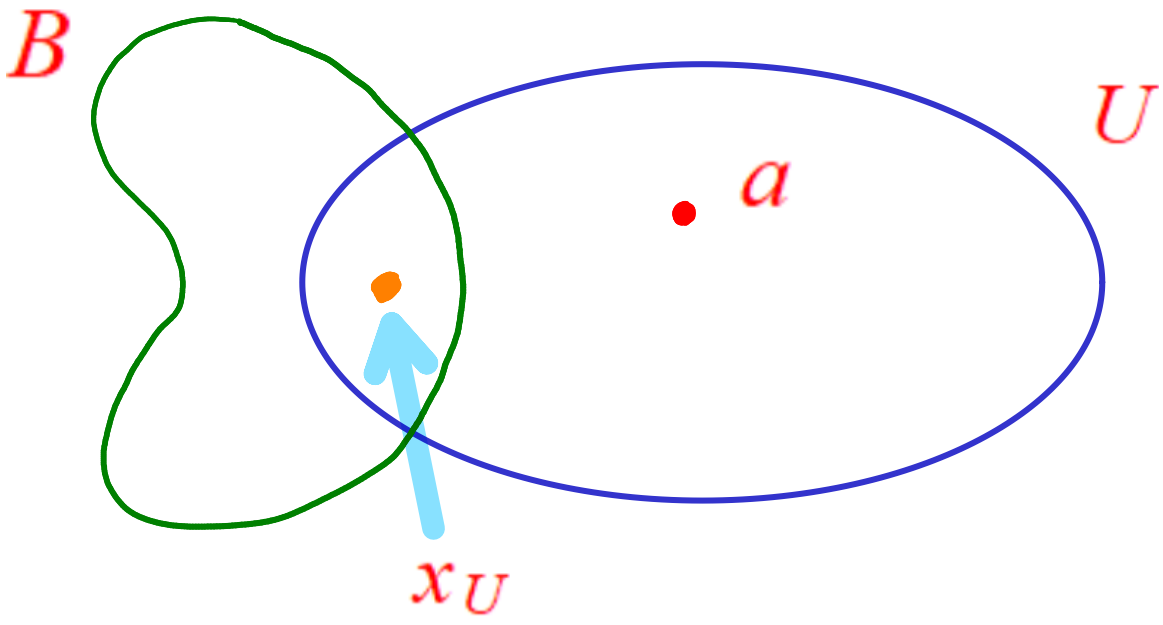
1. $a \in \overline{B}$.
2. Existe I, $\mathcal{U}$ ultrafiltro en I y $\langle x_i \rangle_{i \in I} \subseteq B$ tal que $\langle x_i \rangle_{i \in I} \to^{\mathcal{U}} a$.

El que 2 implica 1 es trivial. Veamos que 1 implica 2.

Sea $I = \mathcal{N}(a)$. Para cada $U \in I$ definimos $F_U = \{V \in I \mid V \subseteq U\}$. Tenemos que $\{F_U \mid U \in I\}$ tiene la pif, ya que $F_{U \cap V} = F_U \cap F_V$.



Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro que extienda a $\{F_U \mid U \in I\}$. Para cada $U \in I$, escojemos $x_U \in B \cap U$. Tal punto existe ya que $a \in \overline{B}$.

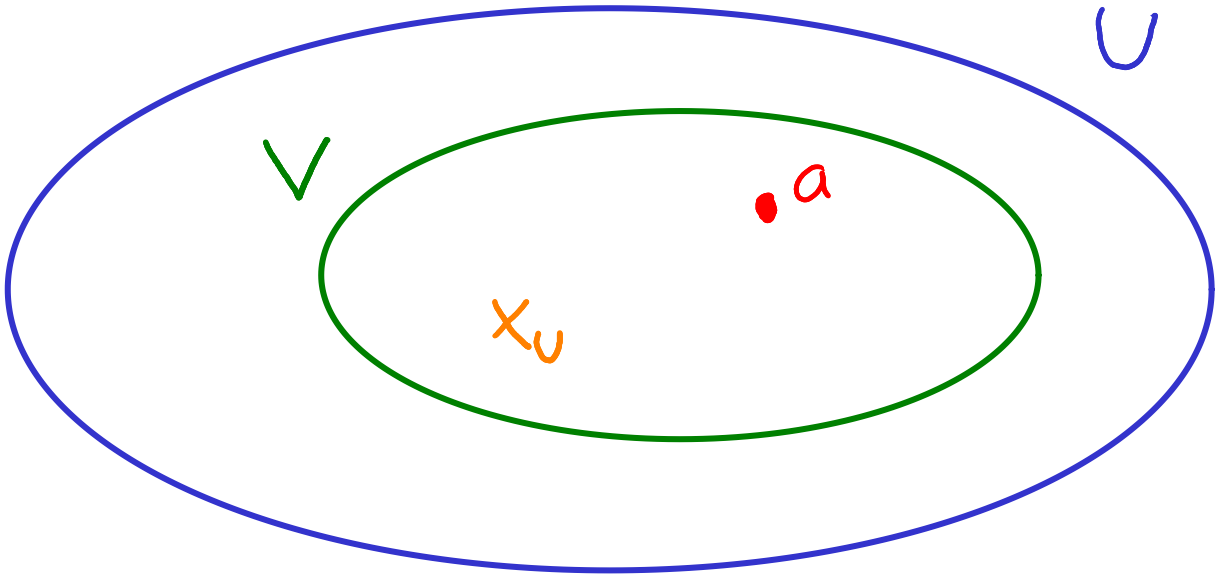


Afirmamos que $\langle x_U \rangle_{U \in I} \to^{\mathcal{U}} a.$ Para esto, sea $U \in \mathcal{N}(a).$ Necesitamos que:

$\{V \in I \mid x_V \in U\}$ este en $\mathcal{U}.$

$\{V \in I \mid x_V \in U\}$ este en $\mathcal{U}$.

Pero este conjunto contiene a $F_U \in \mathcal{U}$ (Recordemos que $F_U = \{V \in I \mid V \subseteq U\}$ y $x_V \in V$).



Definición (espacio compacto)

X es compacto si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.
Equivalentemente, tods familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

Teorema

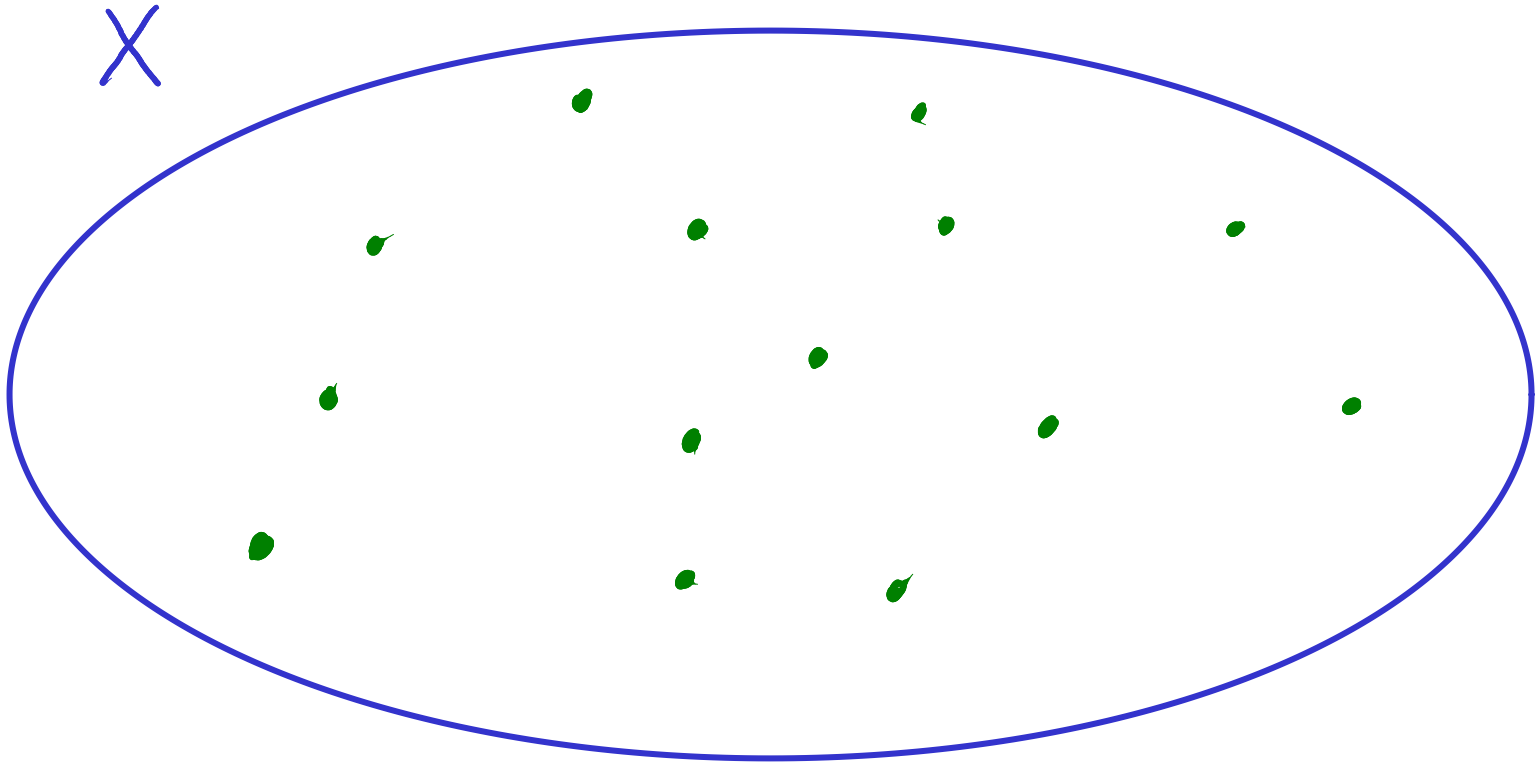
Son equivalentes:

1. X es compacto.
2. Para todo I, $\mathcal{U}$ ultrafiltro en I y $\langle x_i \rangle_{i \in I} \subseteq X$,

   existe $a \in X$ tal que $\langle x_i \rangle_{i \in I} \to^{\mathcal{U}} a$.

$1 \longrightarrow 2$

Supongamos que X es compacto pero tenemos $\langle x_i \rangle_{i \in I}$ que no $\mathcal{U}$-converje a ningún lado.



Para cada $a \in X$, existe $U_a \in \mathcal{N}(a)$ tal que $P_a = \{i \in I \mid x_i \in U_a\} \notin \mathcal{U}$. Por compacidad, existe $a_1, \ldots, a_n \in X$ tal que $X = U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}$.

De esta manera, $I = P_{a_1} \cup \ldots \cup P_{a_n}$.
Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, existe k tal que $P_{a_k} \in \mathcal{U}$, que es una contradicción.

$2 \longrightarrow 1$

Sea $\mathcal{C}$ una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita. Sea $I = [\mathcal{C}]^{<\omega}$. Para cada $\alpha \in \mathcal{C}$, sea $\langle \alpha \rangle = \{s \in I \mid \alpha \in s\}$. Encontremos $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en I tal que $\langle \alpha \rangle \in \mathcal{U}$ para cada $\alpha \in \mathcal{C}$.

Dado $s \in I$, escojemos $x_s \in \bigcap_{\alpha \in s} F_\alpha$ (se puede pues esta intersección es no vacía). Ahora, sea $a \in X$ tal que $\langle x_s \rangle_{s \in I} \to^{\mathcal{U}} a$. Afirmamos que $a \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{C}} F_\alpha$.

Supongamos que existe α tal que $a \notin F_\alpha$. Sea $U = X \setminus F_\alpha$, que es abierto de a. Tenemos que $\{s \in I \mid x_s \in U\} \in \mathcal{U}$. Pero $\langle \alpha \rangle$ también esta en $\mathcal{U}$ y es ajeno con este conjunto.

Evidentemente, no toda sucesión en [0,1] es converjente. Sin embargo, ¡toda sucesión es ultraconvergente!

Tarea

Usar ultraconverjencia para demostrar lo siguiente:

1) Todo cerrado de un compacto es compacto.

2) Todo subespacio compacto de un espacio Hausdorff es cerrado.

Teorema de Tychonoff

Producto de espacios compactos es compacto.

Sea $\{X_j \mid j \in J\}$ una colección de espacios compactos y $X = \prod_{j \in J} X_j$. Sea I un conjunto, $\mathcal{U}$ ultrafiltro en I y $\langle x_i \rangle_{i \in I} \subseteq X$. Veamos que tiene un punto de $\mathcal{U}$-converjencia.

Nos fijamos en las proyecciones a cada X_j. Es decir, para cada $j \in J$ vemos $\langle x_i(j) \rangle_{i \in I} \subseteq X_j$. Como X_j es compacto, existe $y_j \in X_j$ tal que $\langle x_i(j) \rangle_{i \in I} \to^{\mathcal{U}} y_j$.

Sea $y = \langle y_j \rangle_{j \in J} \in X$. Es fácil ver que $\langle x_i \rangle_{i \in I} \to^{\mathcal{U}} y$.