Ultrafiltros en las Matemáticas

Osvaldo Guzmán

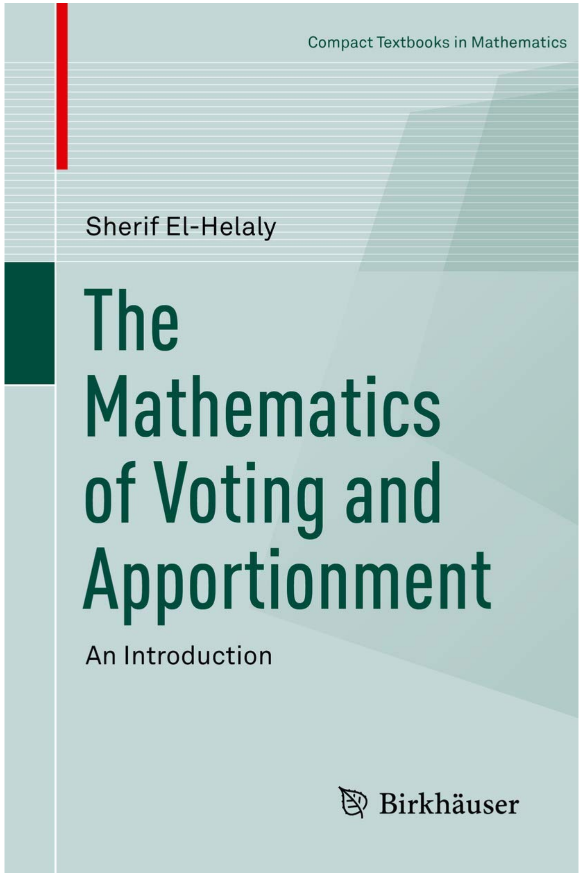
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM

Parte IV: El Teorema de Imposibilidad de Arrow
(o como arreglar las elecciones)

XXIII
ESCUELA DE VERANO
EN MATEMÁTICAS

CENTRO DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS

Ahora veremos una aplicación de ultrafiltros en Matemáticas de las votaciones y elecciones.

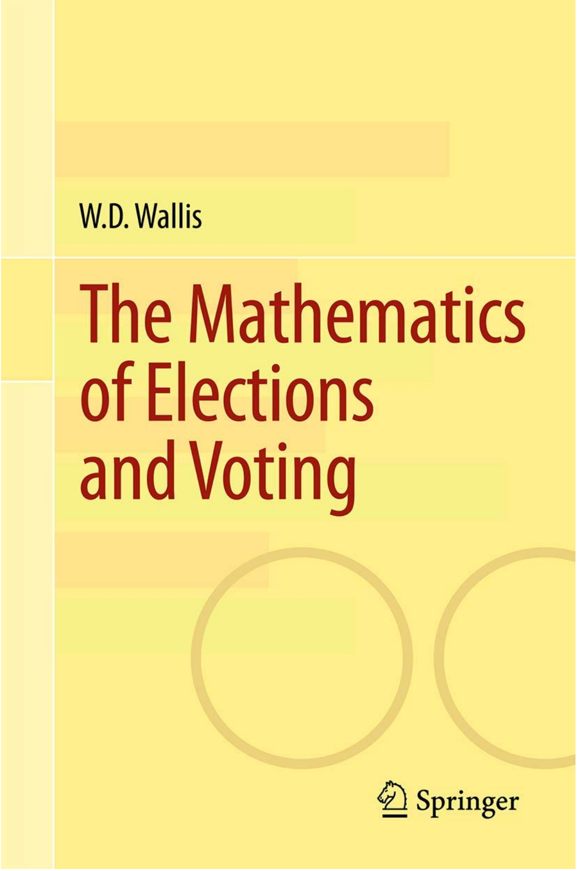

Compact Textbooks in Mathematics

Sherif El-Helaly

The Mathematics of Voting and Apportionment

An Introduction

Birkhäuser


W.D. Wallis

The Mathematics of Elections and Voting

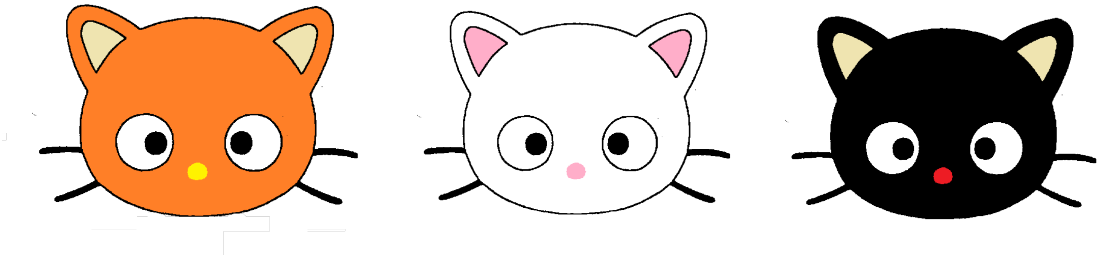
Springer

Es periodo electoral, tenemos C un conjunto de candidatos y V un conjunto de votantes. Los votantes ordenaran a los candidatos de acuerdo a sus preferencias (los ordenan de mejor a peor).

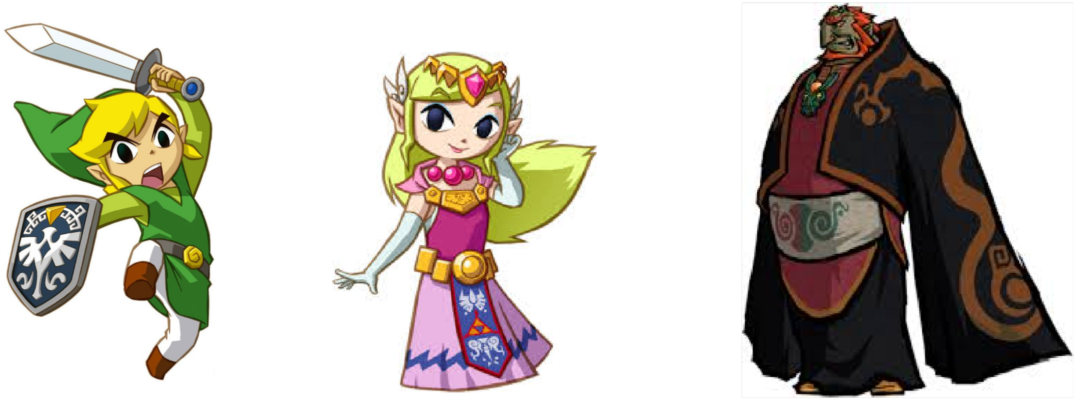
Después de la votación, se necesita una regla para decidir que candidato fue el ganador, que candidato quedó en segundo lugar...

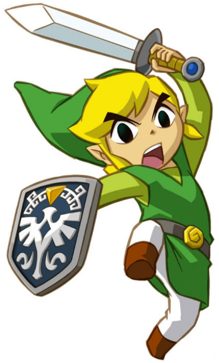
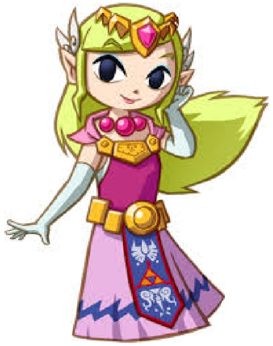
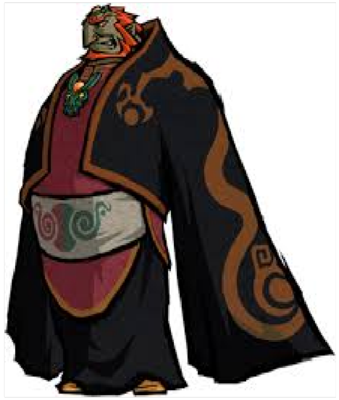
Es muy importante que no aceptamos empates, no es posible que dos o más candidatos ocupen el mismo lugar en la lista.

Candidatos:

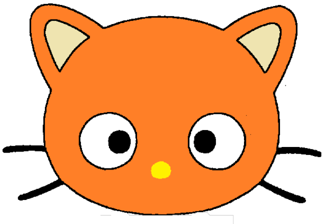
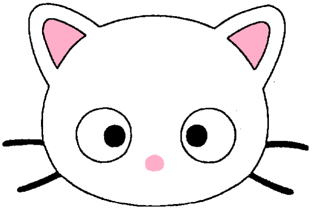
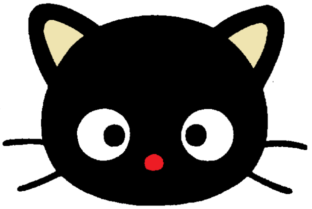


Votantes:

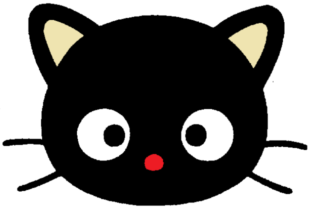
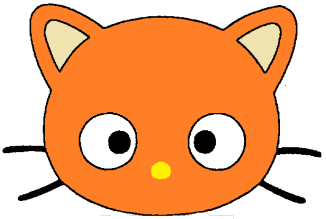
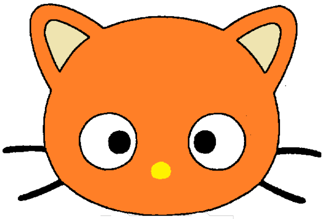


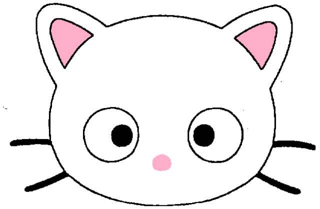
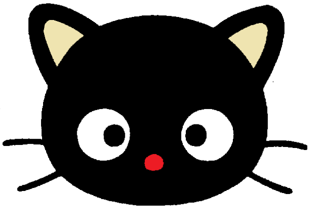
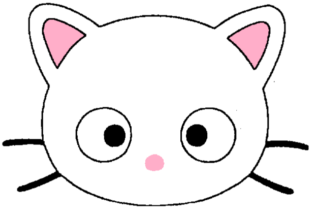
1

2

3

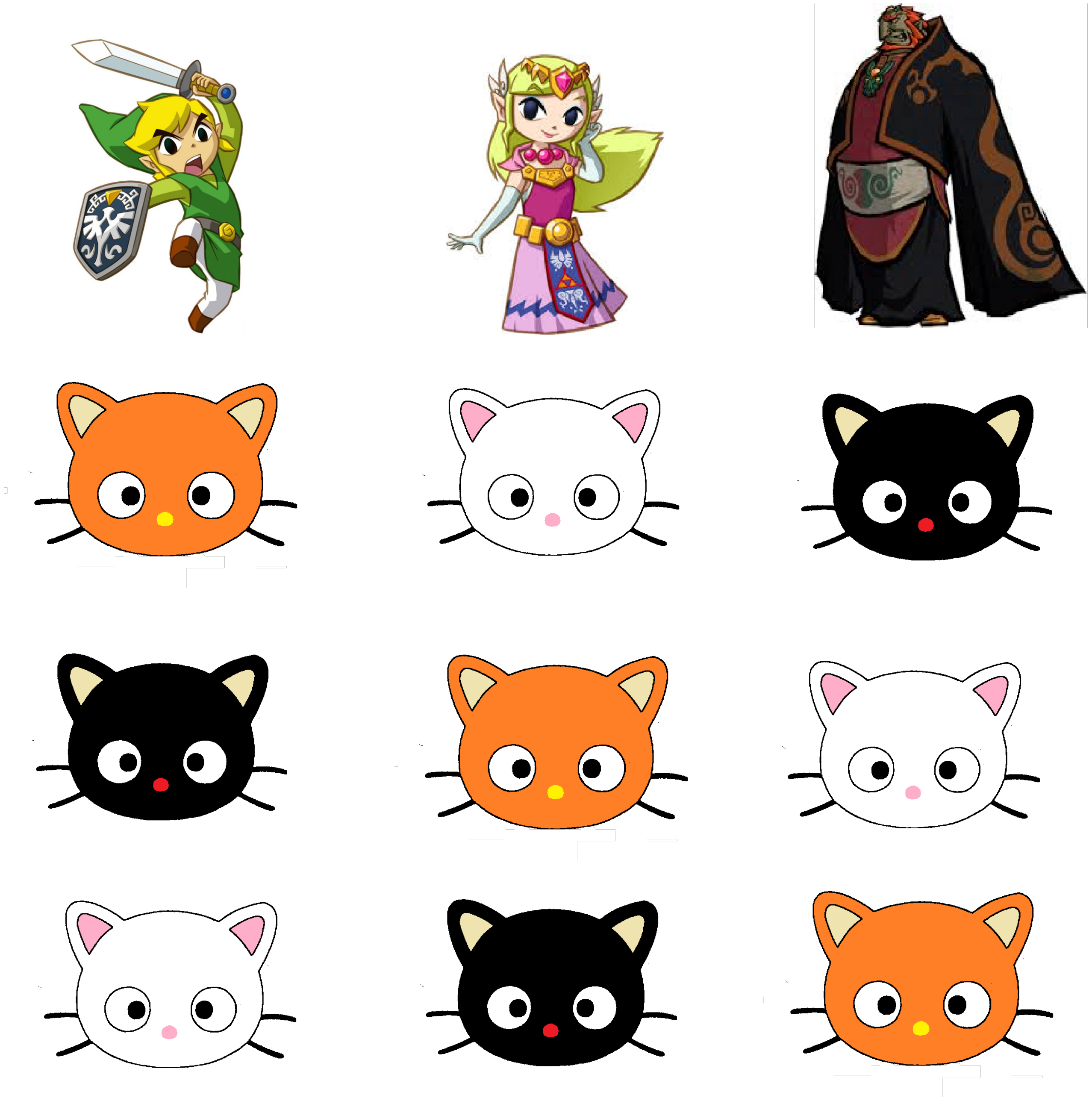
¿Como decidimos quién ganó?

Un posible intento sería darle 2 puntos al primer lugar, 1 punto al segundo y 0 al tercero. Después contamos los puntos.

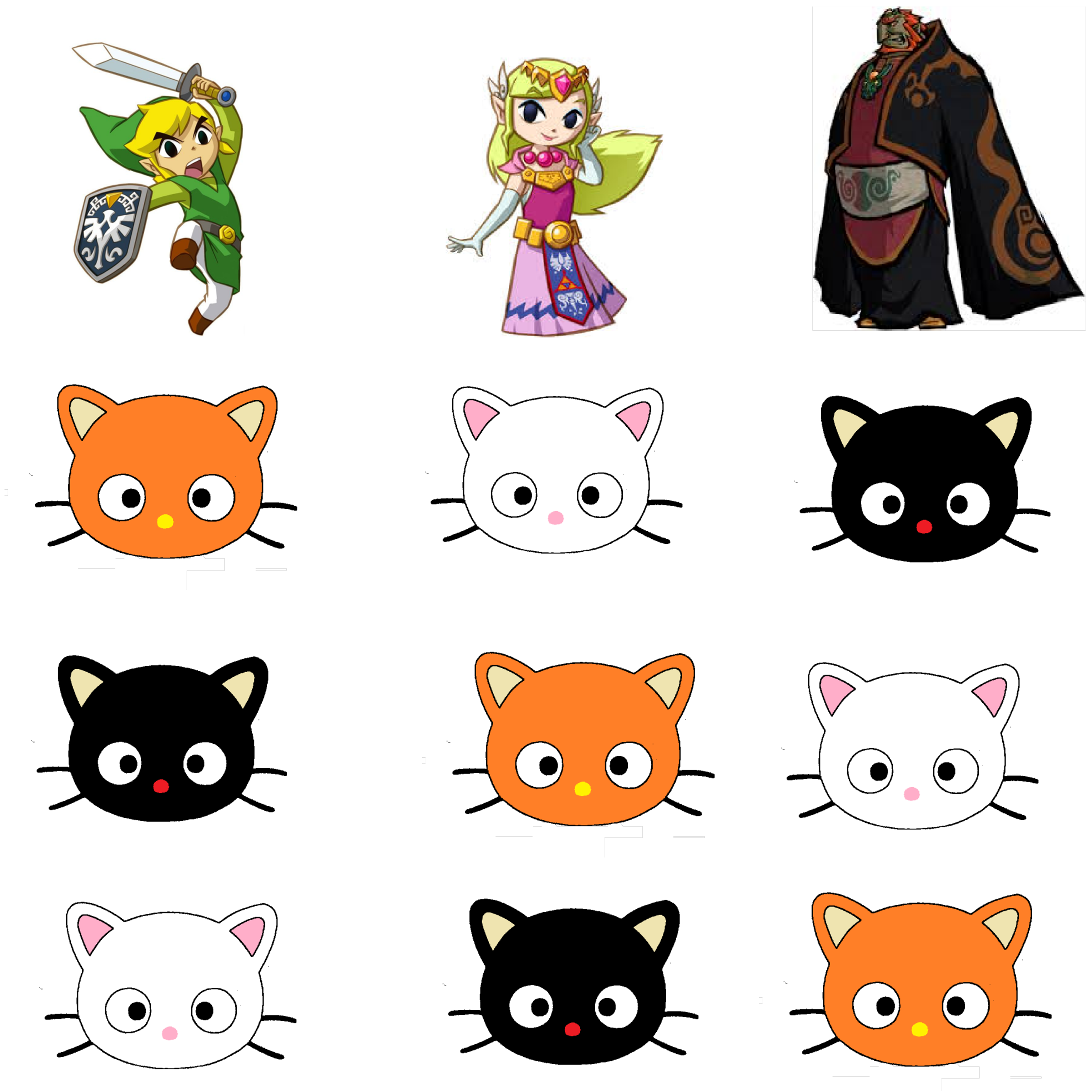
Pero esto en general no funciona, ya que puede haber empates.

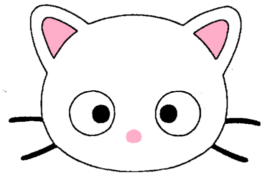
Otro intento sería ir comparando los candidatos de dos en dos.

Pueden pasar cosas extrañas...

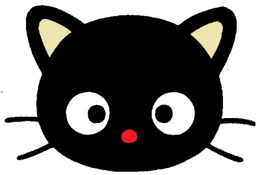


Tenemos esta elección. Comparemos los candidatos de dos en dos.

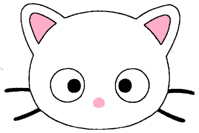




VS

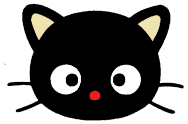


1 persona prefiere

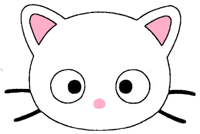


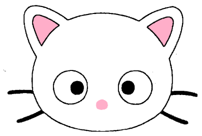
a

2 personas prefieren

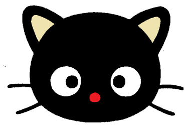


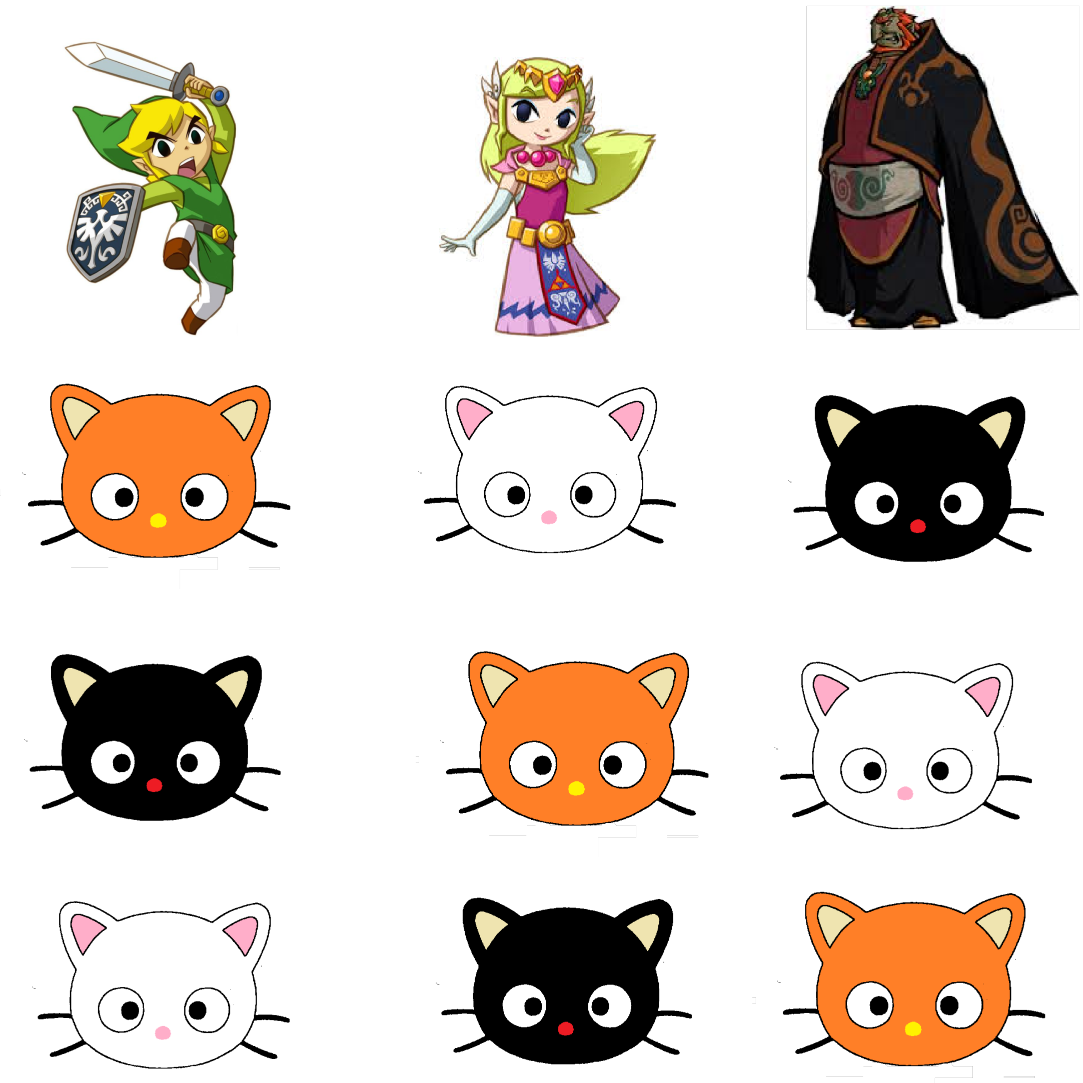
a

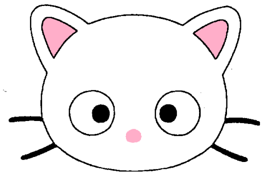
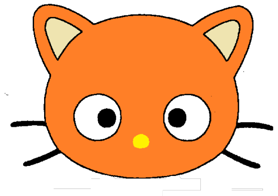


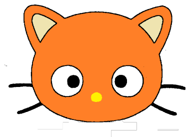


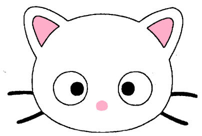
<

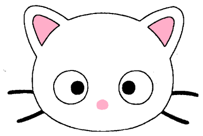


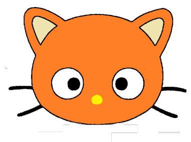


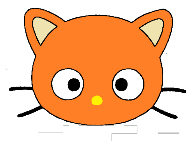
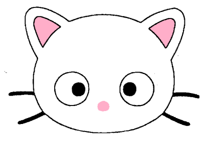
 vs 

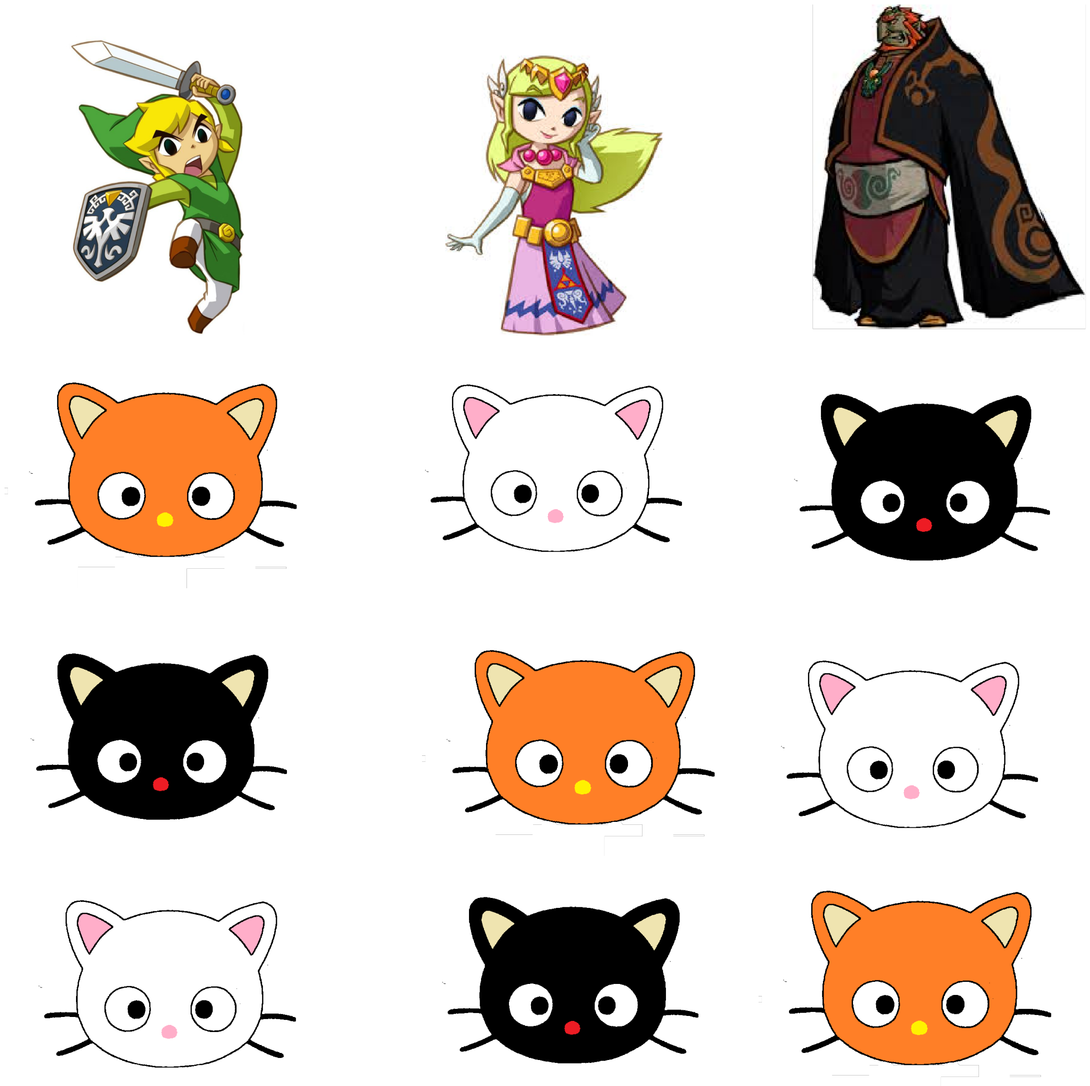
1 persona prefiere 

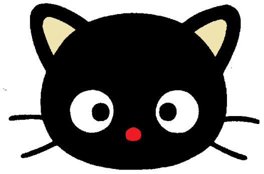
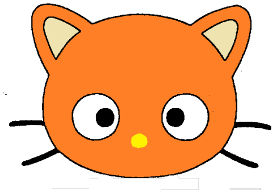
a 

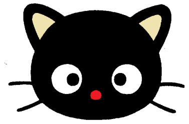
2 personas prefieren 

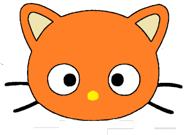
a 

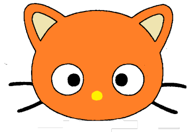
 < 

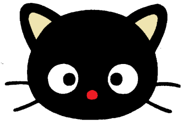


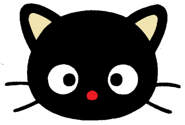
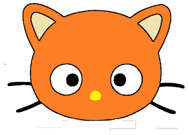
 vs 

1 persona prefiere 

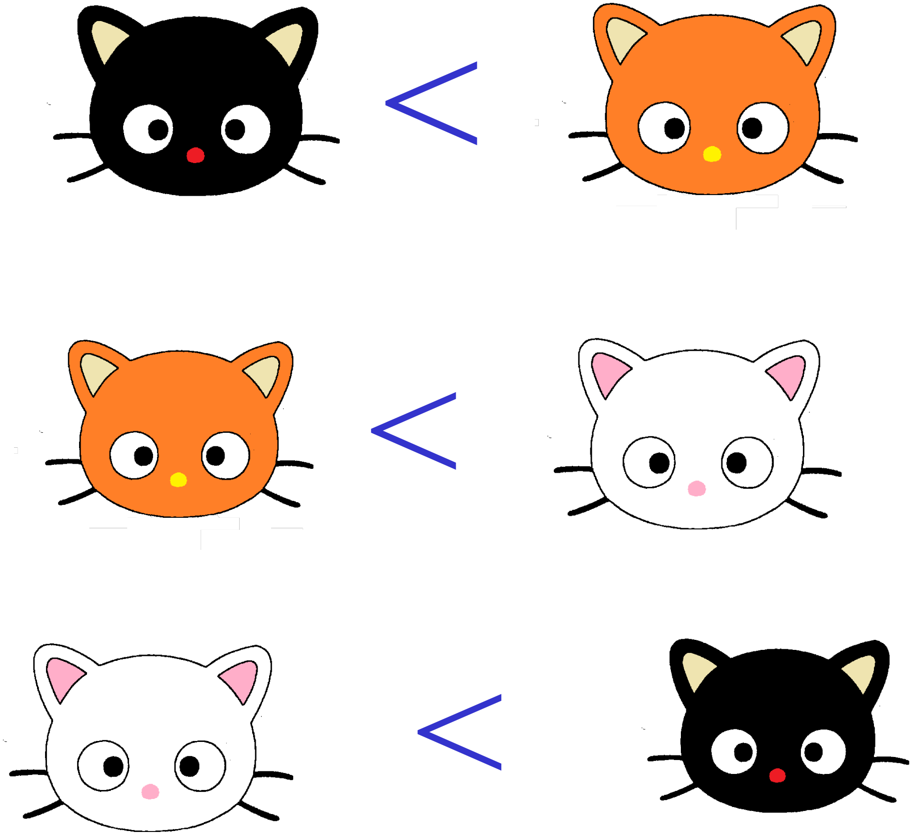
a 

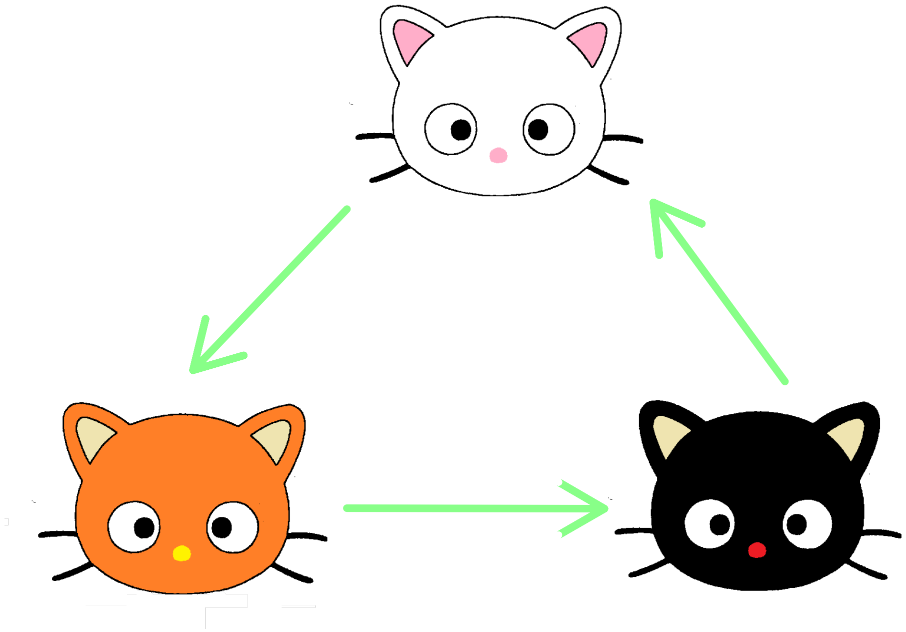
2 personas prefieren 

a 

 < 

Paradoja de Condorcet





Una preferencia es una lista ordenada de los candidatos (de mejor a peor).

Una elección es el evento en el que cada votante elige una preferencia.

Una regla de elección es un método en el que para cada elección, la regla le asigna una preferencia (la lista ordenada de los ganadores).

Definición

Sea V y C conjuntos, con $|C| = n \in \omega$.

1. $P(C)$ es el conjunto de funciones biyectivas de C a $\bar{n} = \{0, \ldots, n-1\}$.
2. A los elementos de $P(C)$ los llamamos *preferencias.*

Notemos que si $p \in P(C)$, $c, d \in C$ entonces $p(c) < p(d)$ significa que c es mejor que d.

3. *Una elección* es una función

$E : V \to P(C)$.

4. El conjunto de elecciones es

como $P(C)^V$.

5. Una *regla de elección* es una función

$\Sigma : P(C)^V \to P(C)$.

Definición

Sea $\Sigma : P(C)^V \rightarrow P(C)$ una regla de elección.

Decimos Σ es:

1. *Unánime* si para toda $E \in P(C)^V$, si $E(v) = p$ para todo $v \in V$, entonces $\Sigma(E) = p$.

Definición

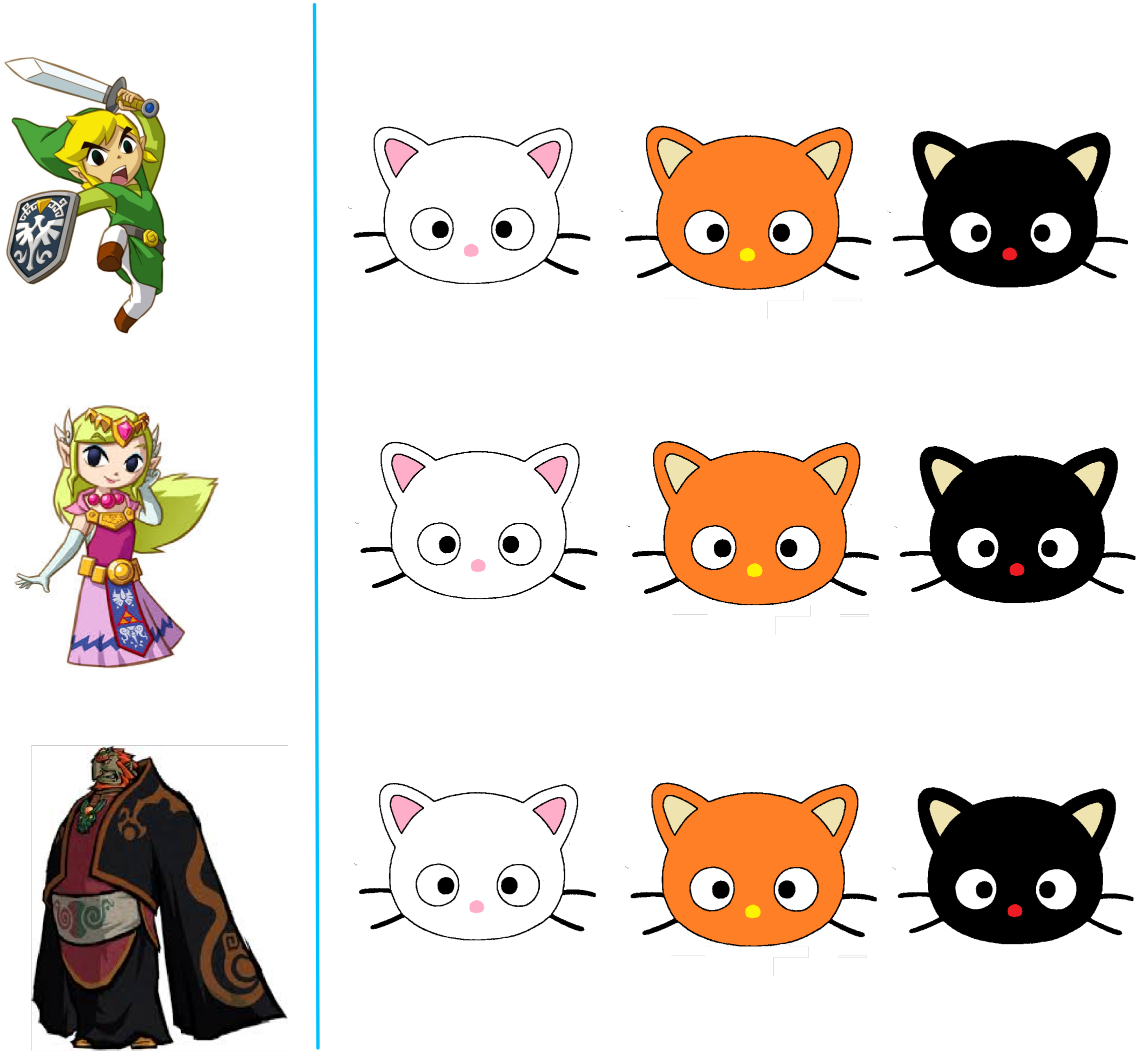
Sea $\Sigma : P(C)^V \to P(C)$ una regla de elección. Decimos Σ es:

1. *Unánime* si para toda $E \in P(C)^V$, si $E(v) = p$ para todo $v \in V$, entonces $\Sigma(E) = p$.

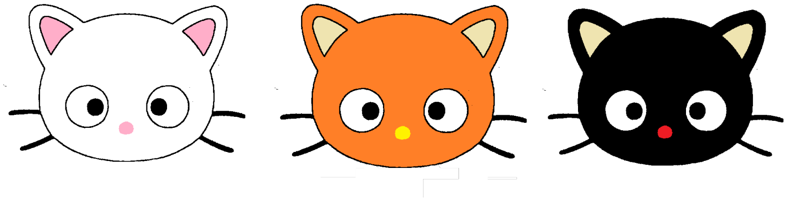
Es decir, si todos los votantes votaron igual, el resultado es la preferencia común.

2. Cumple *alternativas irrelevantes* si en una elección, el resultado del orden entre dos candidatos solo depende en como los votantes comparan a esos dos candidatos y no como se comparan con un tercero.

Unanimidad



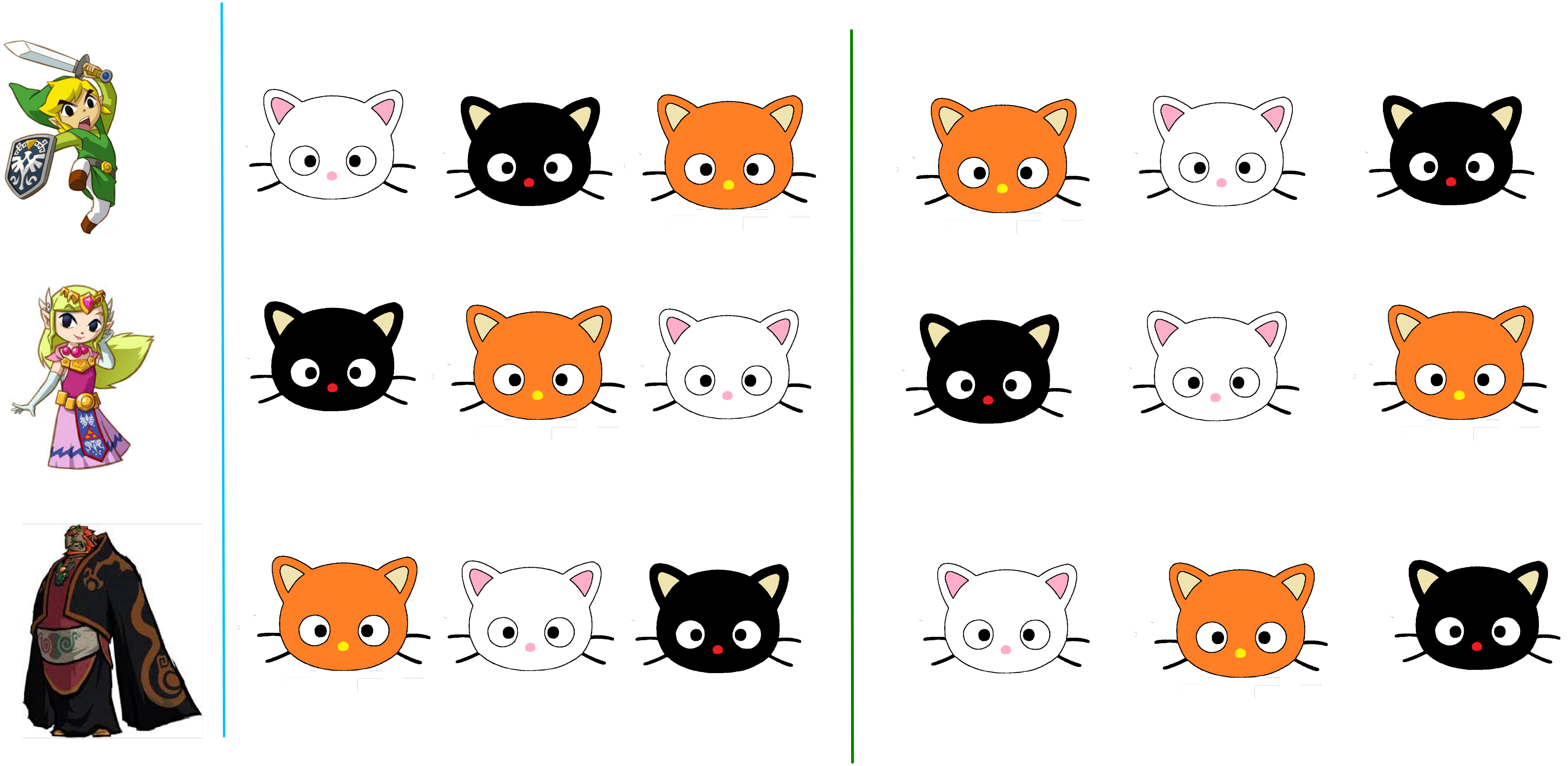
El resultado de la elección es:

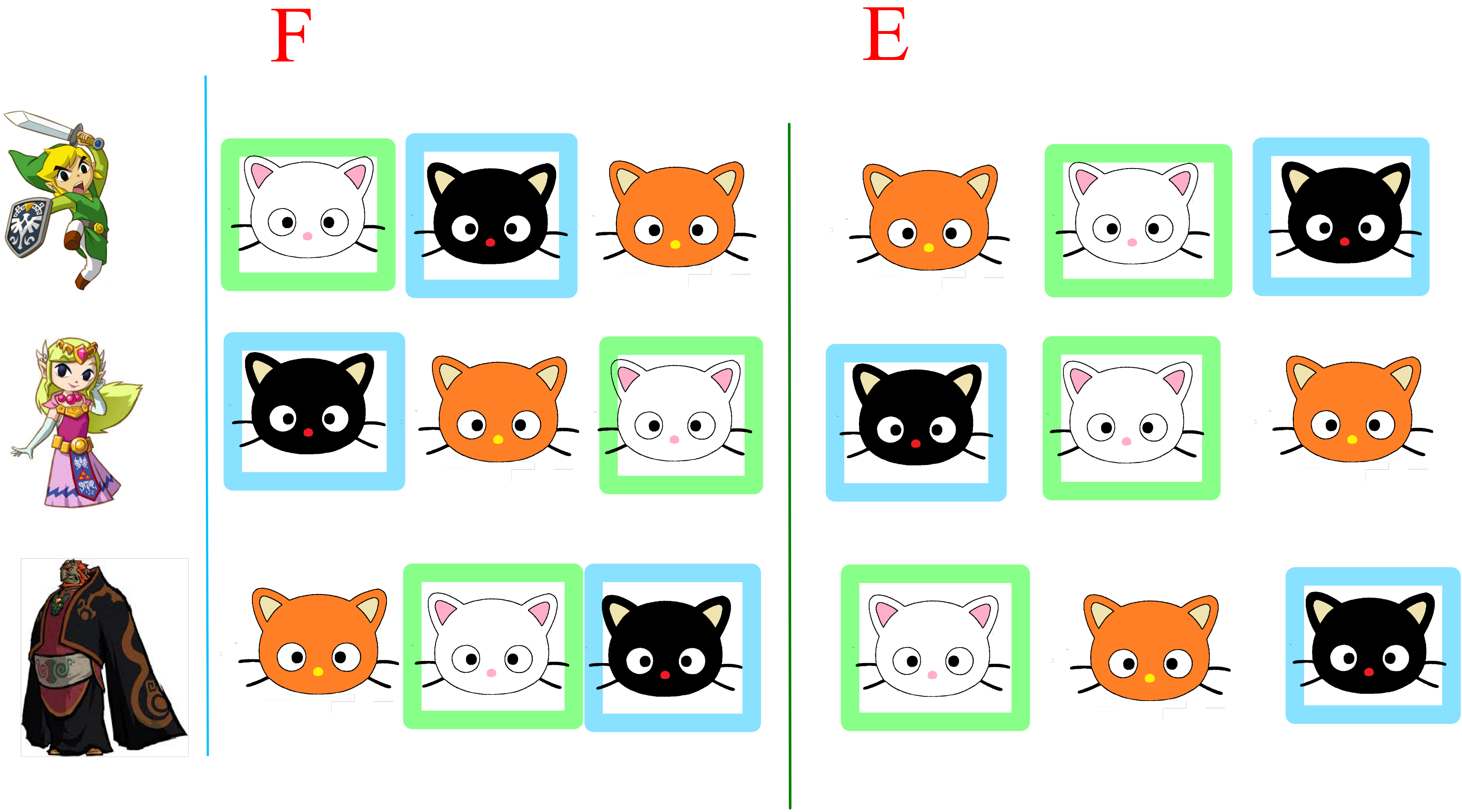


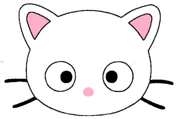
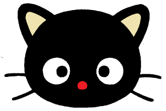
Alternativas Irelevantes

Tenemos dos elecciones

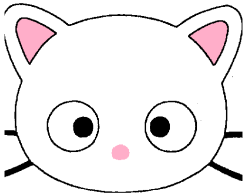
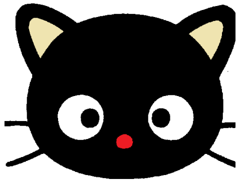
F E



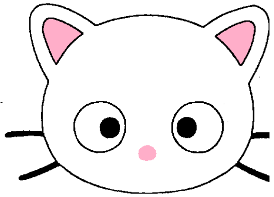
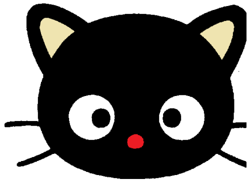


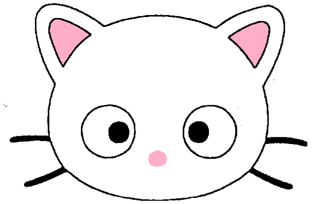
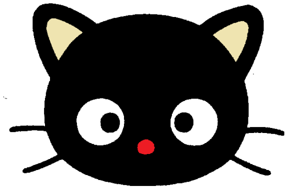
En ambas elecciones, cada votante clasifica a  y a  de la misma manera.

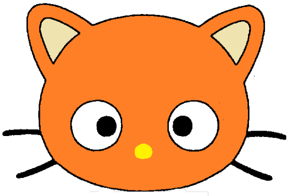
Entonces debe pasar que si:

$\Sigma(E)($  $) < \Sigma(E)($  $)$

entonces:

$\Sigma(F)($  $) < \Sigma(F)($  $)$

Es decir, el que  le gane a 

no debe depender del rendimiento de 

Escrito de manera más formal:

Σ cumple *alternativas irrelevantes si*:

Para todos $c, d \in C$, y E, F elecciones, si para todo $v \in V$ se cumple que:

$$E(v)(c) < E(v)(d) \text{ si y solo si } F(v)(c) < F(v)(d)$$

Entonces:

$$\Sigma(E)(c) < \Sigma(E)(d) \text{ si y solo si } \Sigma(F)(c) < \Sigma(F)(d)$$

Definición (regla justa)

Decimos que una regla es justa si cumple unanimidad y alternativas irrelevantes.

¿Como encontrar reglas justas?

Veamos un ejemplo de una regla justa...
pero que no parece muy justa...

Definición (Dictador)

Sea $v \in V$. Definimos Σ_v *la regla del dictador* v donde:

$$\Sigma_v(E) = E(v) \text{ para toda elección } E.$$

Definición (Dictador)

Sea $v \in V$. Definimos Σ_v *la regla del dictador* v donde:

$\Sigma_v(E) = E(v)$ para toda elección E.

Es decir, no importa como voten los demás votantes, el resultado siempre es la preferencia de v.

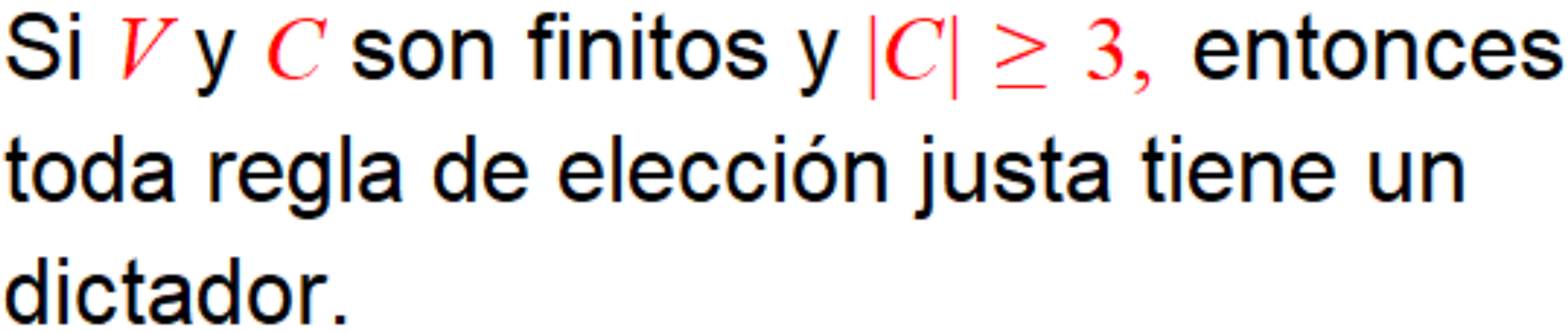
Decimos que una regla Σ *tiene dictador* si existe $v \in V$ tal que $\Sigma = \Sigma_v$.

Tarea

Demostrar que toda regla que tenga un dictador es justa.

¿Como encontrar reglas justas que no tengan dictadores?

Teorema de Imposibiliad de Arrow



Si V y C son finitos y $|C| \geq 3,$ entonces toda regla de elección justa tiene un dictador.

Tarea

La condición de $|C| \geq 3$ es necesaria para el teorema.

Demostrar que si $|C| = 2$, entonces existen reglas de elección justas sin dictadores.

Hint: Considerar los casos:

1. $|V|$ impar.
2. $|V| = 2$.
3. $|V| > 2$ y par.

El Teorema de Arrow tiene un dual más optimista:

Sea C finito con $|C| \geq 3$.

Teorema de Imposibilidad de Arrow

Si V es finito, entonces todo proceso de elección justo tiene un dictador.

Sea C finito con $|C| \geq 3$.

Teorema de Imposibilidad de Arrow

Si V es finito, entonces todo proceso de elección justo tiene un dictador.

Teorema de Posibilidad de Galvin

Si V es infinito, entonces existen procesos de elección justos sin dictadores.

"Solo el infinito te hará libre"

Desde aquí, asumiremos siempre que C es finito y $|C| \geq 3.$ Para $V,$ suponemos que $|V| \geq 2$ pero no asumimos si es finito o infinito.

Definición (regla localmente uniforme)

Sea Σ una regla de elección. Σ es *localmente unánime* si para toda elección E y candidatos $c, d \in C$, si para todo $v \in V$:

$$E(v)(c) < E(v)(d)$$

Entonces:

$$\Sigma(E)(c) < \Sigma(E)(d)$$

Definición (regla localmente uniforme)

Sea Σ una regla de elección. Σ es *localmente unánime* si para toda elección E y candidatos $c, d \in C$, si para todo $v \in V$:

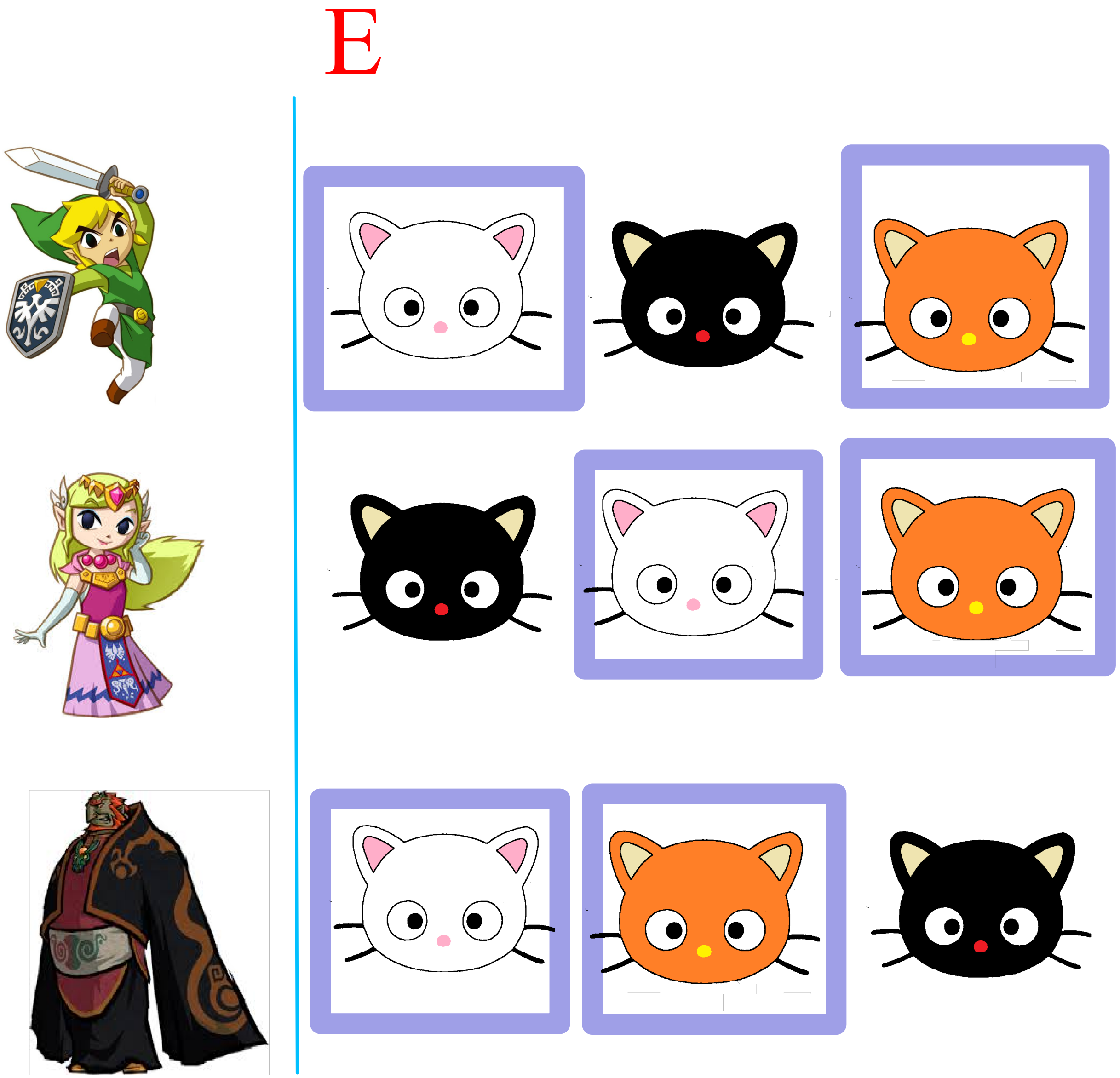
$$E(v)(c) < E(v)(d)$$

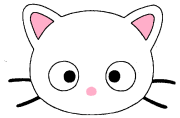
Entonces:

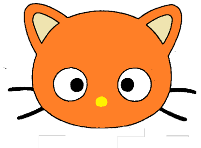
$$\Sigma(E)(c) < \Sigma(E)(d)$$

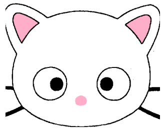
Si todos los votantes prefieren a c ante d, entonces c le gana a d.

Regla localmente unánime

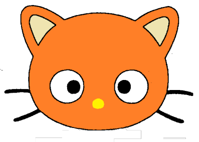


Si todos los votantes prefieren a 

ante  , entonces

$\Sigma(E)$()

es menor que

$\Sigma(E)$()

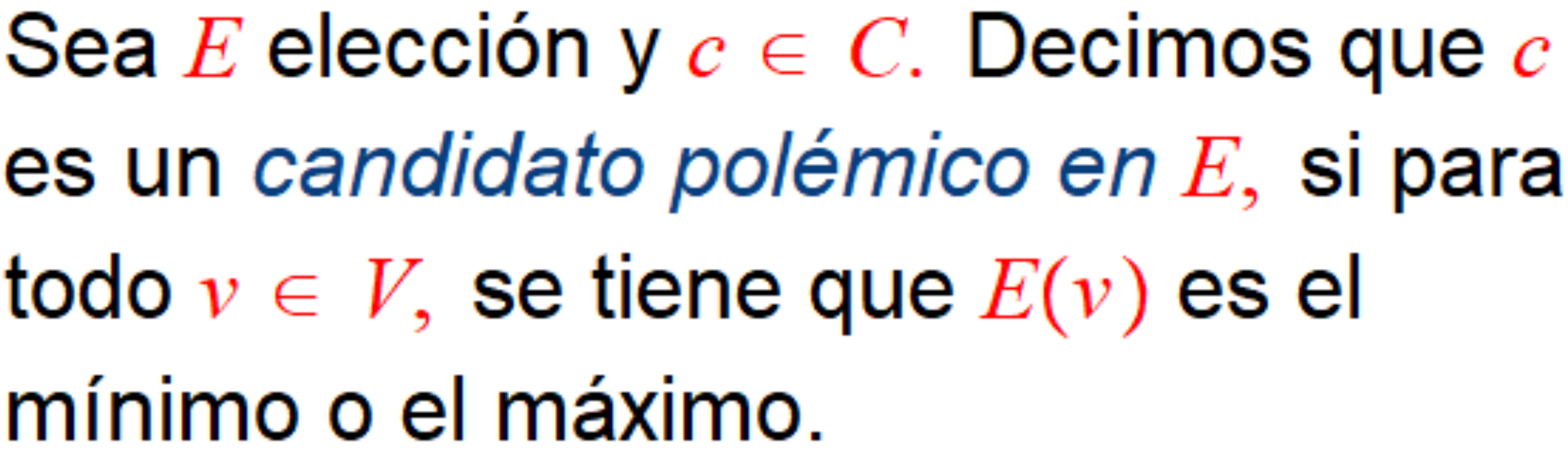
Lema

Toda regla justa es localmente unánime.

Sea Σ una regla justa. Sea E una elección y c, d candidatos tal que $E(v)(c) < E(v)(d)$ para cada $v \in V$. Sea p una preferencia tal que $p(c) = 0$ y $p(d) = 1$. Definamos F elección tal que $F(v) = p$ para todo $v \in V$. Tenemos que:

1. $\Sigma(F)(c) = 0$ y $\Sigma(F)(d) = 1$ (unanimidad).
2. En particular, $\Sigma(F)(c) < \Sigma(F)(d)$.
3. Por alternativas irrelevantes aplicada a E y F, se sigue que $\Sigma(E)(c) < \Sigma(E)(d)$.

Definición (candidato polémico)



Sea E elección y $c \in C$. Decimos que c es un *candidato polémico en* E, si para todo $v \in V$, se tiene que $E(v)$ es el mínimo o el máximo.

Es decir, cada votante lo pone en primer o en último lugar.

Todo votante lo ama o lo odia.

Lema

Sea Σ regla justa, E elección y $c \in C$ polémico en E. Entonces $\Sigma(E)(c)$ es el mínimo o el máximo (c quedó en primer o en último lugar).

Supongamos que no. Así, existen candidatos $a, b \in C$ tales que:

$$\Sigma(E)(a) < \Sigma(E)(c) < \Sigma(E)(b)$$

$$\Sigma(E)(a) < \Sigma(E)(c) < \Sigma(E)(b)$$

Ahora definimos la elección F tal que para todo votante $v \in V$:

1. Si $E(v) = (c, \ldots,)$, entonces $F(v) = (c, b, a, \ldots)$.
2. Si $E(v) = (\ldots, c)$, entonces $F(v) = (b, a, \ldots, c)$.

1. Si $E(v) = (c, \ldots,)$, entonces $F(v) = (c, b, a, \ldots)$.
2. Si $E(v) = (\ldots, c)$, entonces $F(v) = (b, a, \ldots, c)$.

Por *unanimidad local*, tenemos que:

$$\boxed{\Sigma(F)(b) < \Sigma(F)(a).}$$

E y F coinsiden en como comparan a c y b y a c y a. Usando *alternativas irrelevantes:*

$$\Sigma(E)(c) < \Sigma(E)(b) \rightarrow \Sigma(F)(c) < \Sigma(F)(b).$$

$$\Sigma(E)(a) < \Sigma(E)(c) \rightarrow \Sigma(F)(a) < \Sigma(F)(c).$$

Por lo que $\boxed{\Sigma(F)(a) < \Sigma(F)(b)}$

Demostramos que:

$$\boxed{\Sigma(F)(a) < \Sigma(F)(b)}$$

$$\boxed{\Sigma(F)(b) < \Sigma(F)(a).}$$

Que es una contradicción.

Definición

Sea Σ una regla, $c, d \in C$ distintos y $v \in V$.

Decimos que v es (c,d)-*decisivo (para Σ)* si para toda elección E, si $E(v)(c) < E(v)(d)$, entonces $\Sigma(E)(c) < \Sigma(E)(d)$.

Es decir, en toda elección, si v prefiere a c que a d, entonces c le ganará a d (según Σ).

Notemos que ser dictador es equivalente a ser (c,d)-decisivo para todo $c,d \in C$ distintos.

Teorema de Arrow para 2 votantes

En esta sección asumiremos que V solo tiene dos elementos. Digamos $V = \{v, w\}$. Recordemos que $|C| \geq 3$.

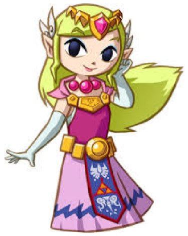
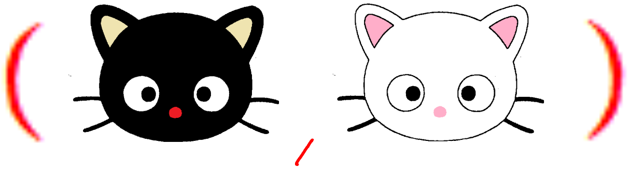
También fijemos Σ una regla justa. Veamos que tiene un dictador.

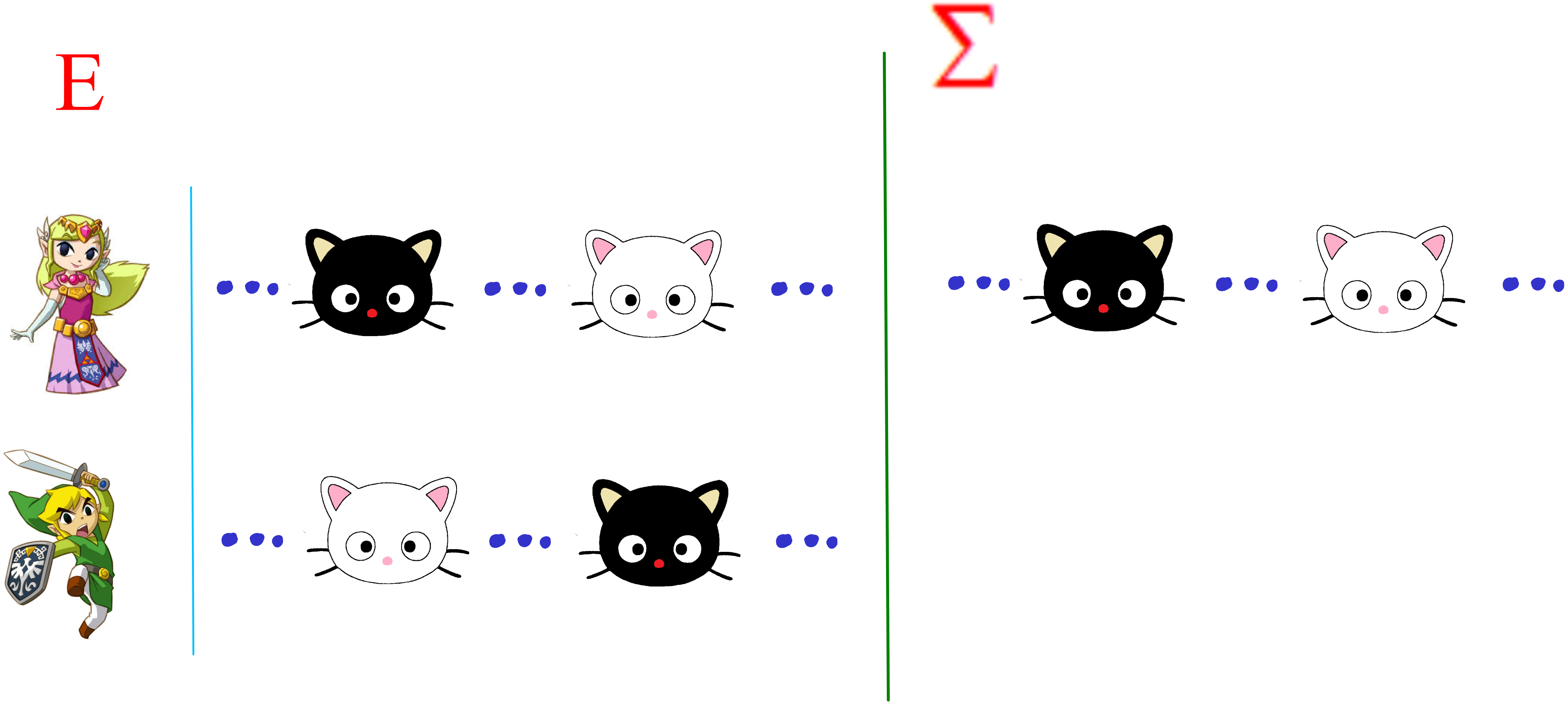
Como solo tenemos dos votantes, tenemos que v es (c, d)-decisivo (según Σ) si y solo si existe una elección E tal que:

1. $E(v)(c) < E(v)(d)$.
2. $E(w)(d) < E(w)(c)$.
3. $\Sigma(c) < \Sigma(d)$.

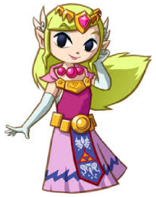
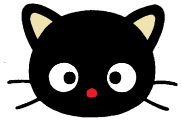
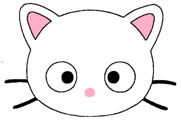
1. $E(v)(c) < E(v)(d)$.
2. $E(w)(d) < E(w)(c)$.
3. $\Sigma(c) < \Sigma(d)$.

Esto por que para otra elección que cumpla 1), si también cumple 2) cumplirá 3) por alternativas irelevantes. Si no cumple 2), entonces 3) también se cumple por unanimidad.

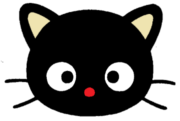
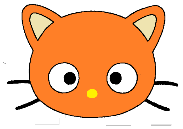
 es  decisiva si existe una elección que se ve así:

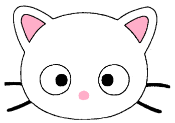
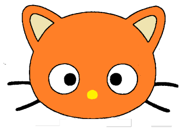


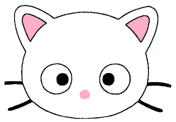
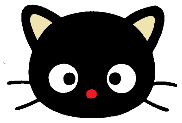
Proposición

Si  es ( , ) decisiva, entonces

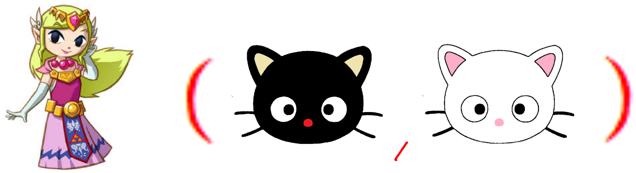
También es decisiva para:

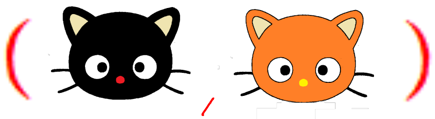
( , )

( , )

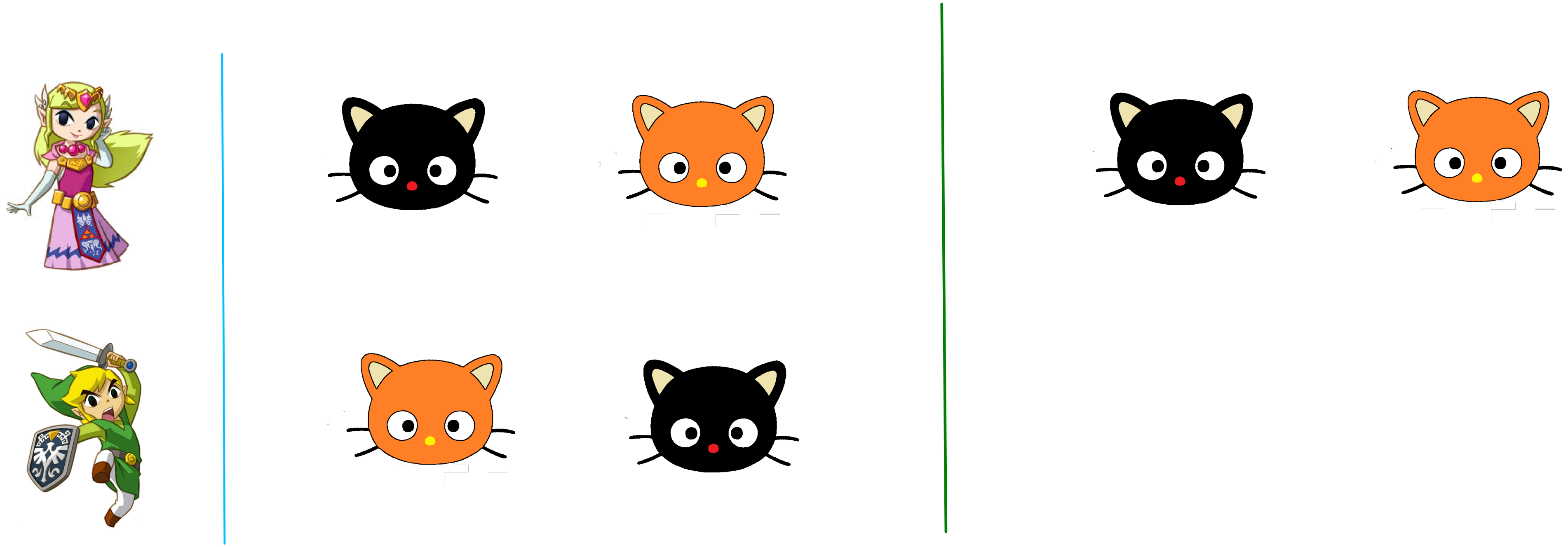
( , )

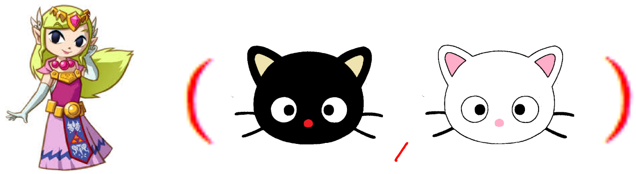
(y así para cualquier otra combinación)

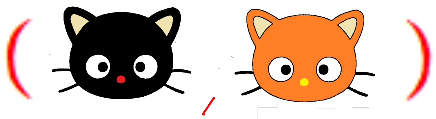


Veamos para 

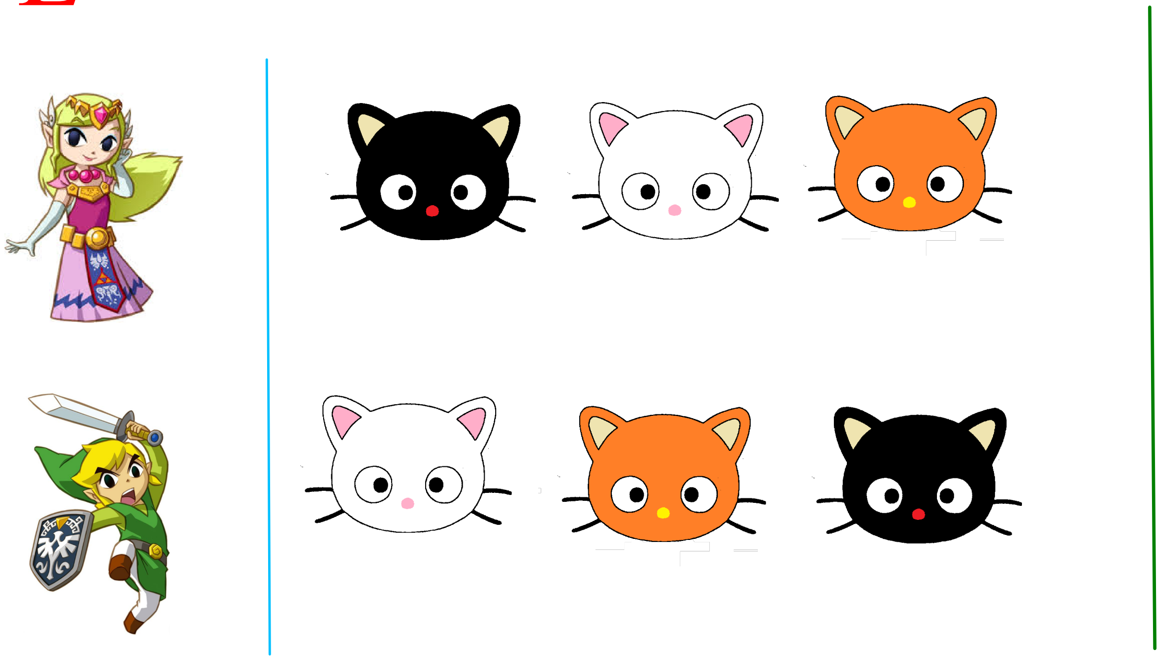
Queremos una elección así:

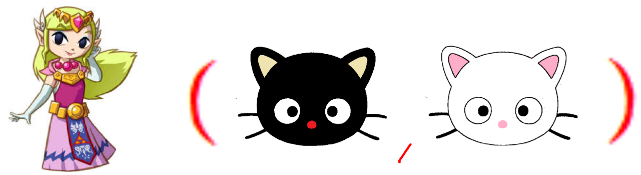


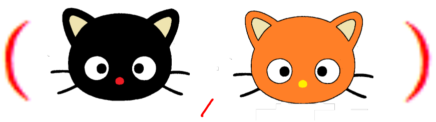


Veamos para 

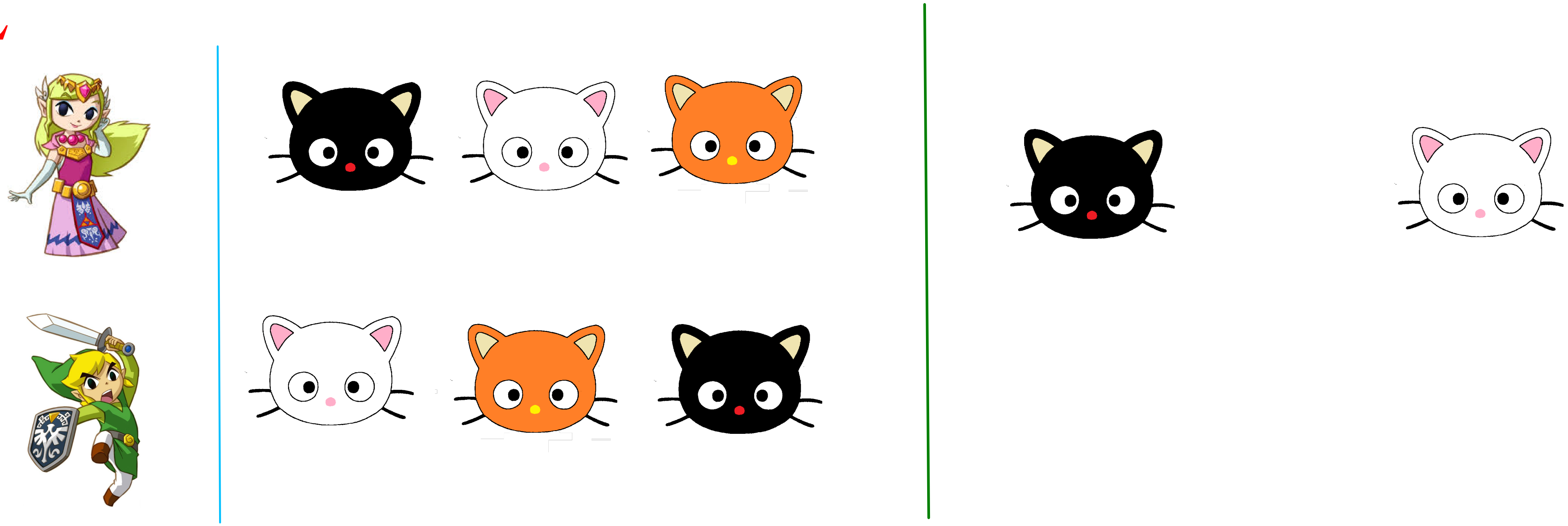
E

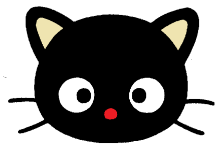
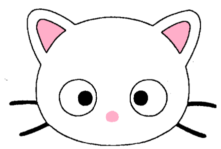


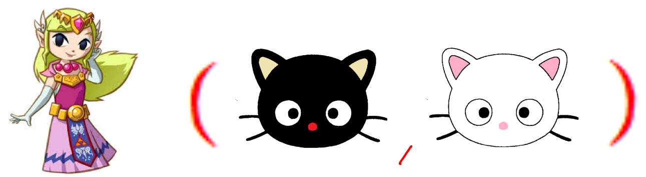


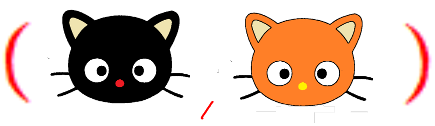
Veamos para 

E

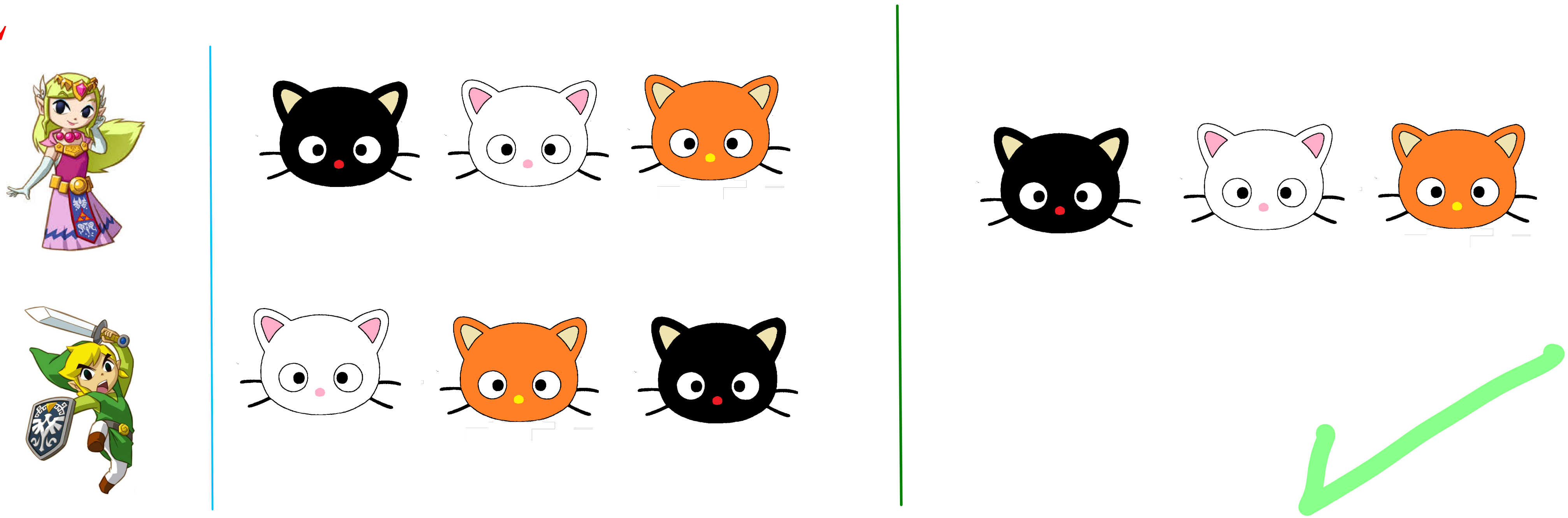


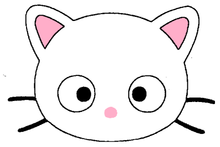
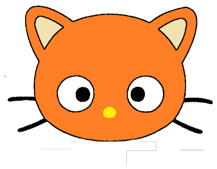
 Le gana a  por lo decisivo

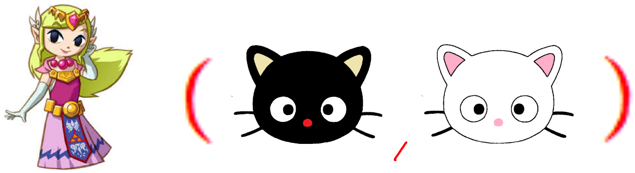


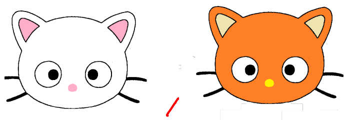
Veamos para 

E

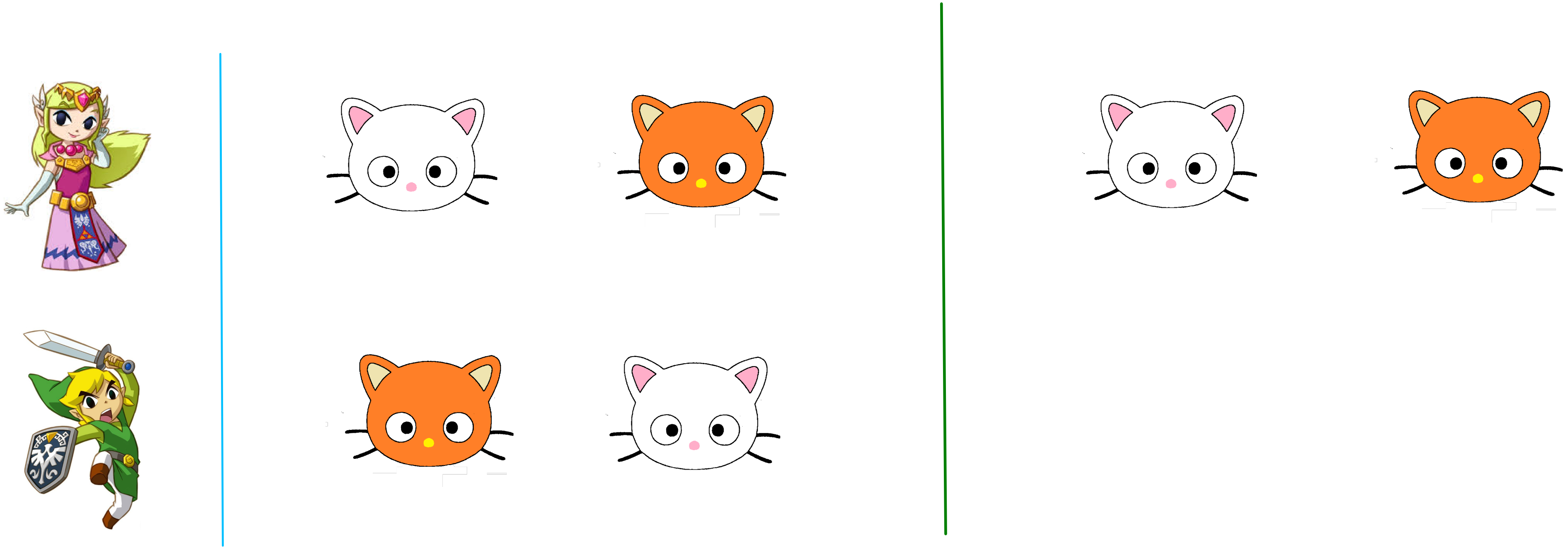


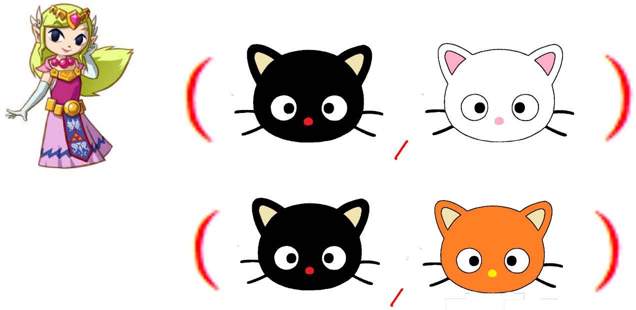
 le gana a  por unanimidad local

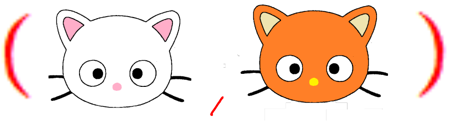


Veamos para ()

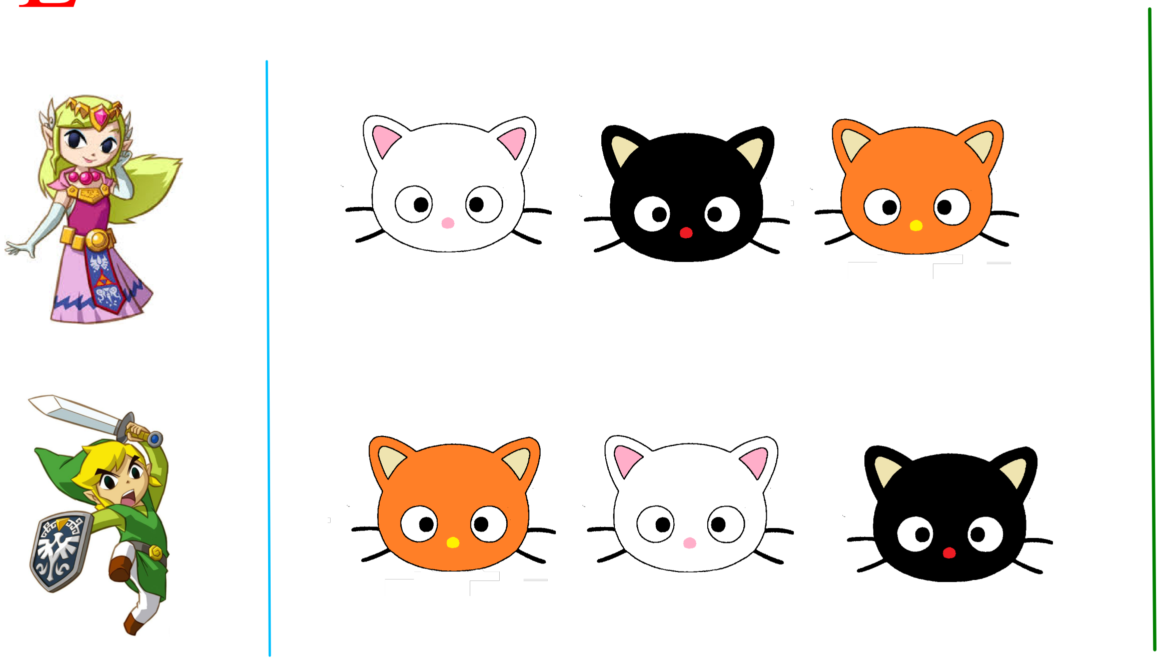
Queremos una elección así:

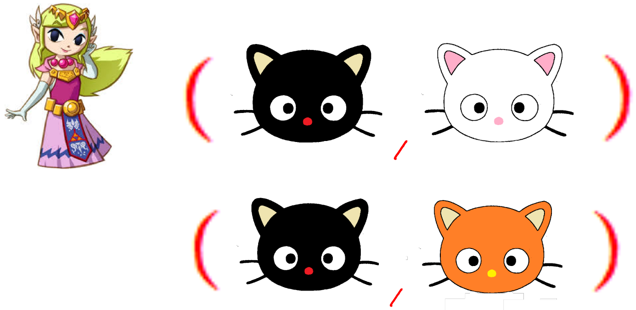


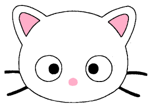
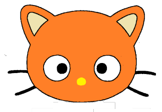


Veamos para 

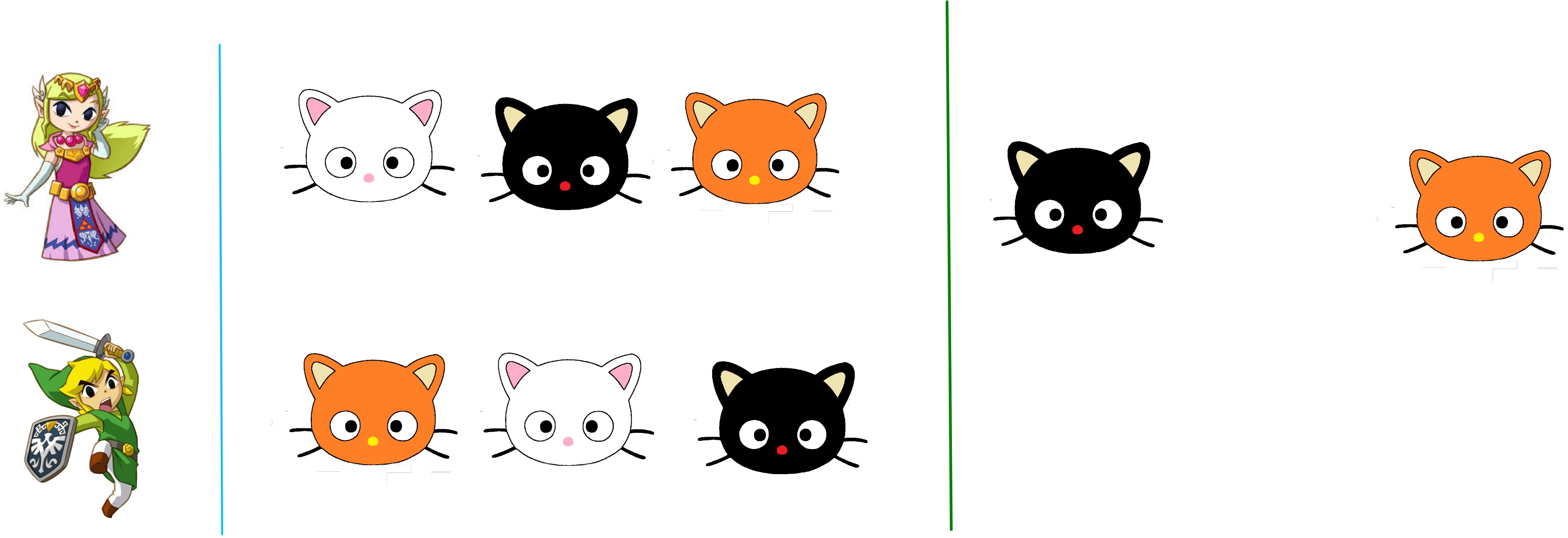
E

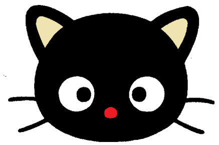
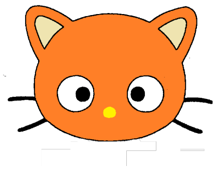


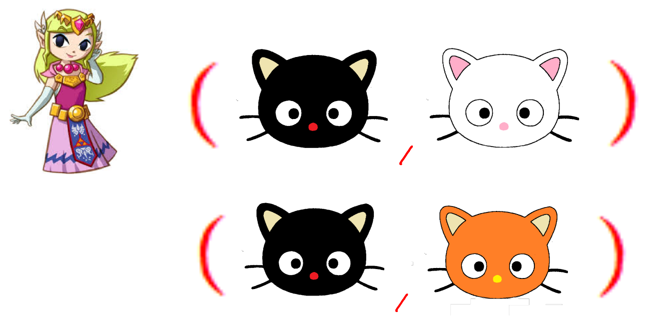


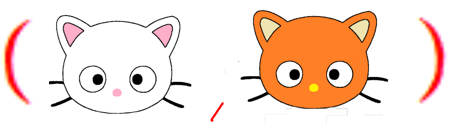
Veamos para ( , )

E

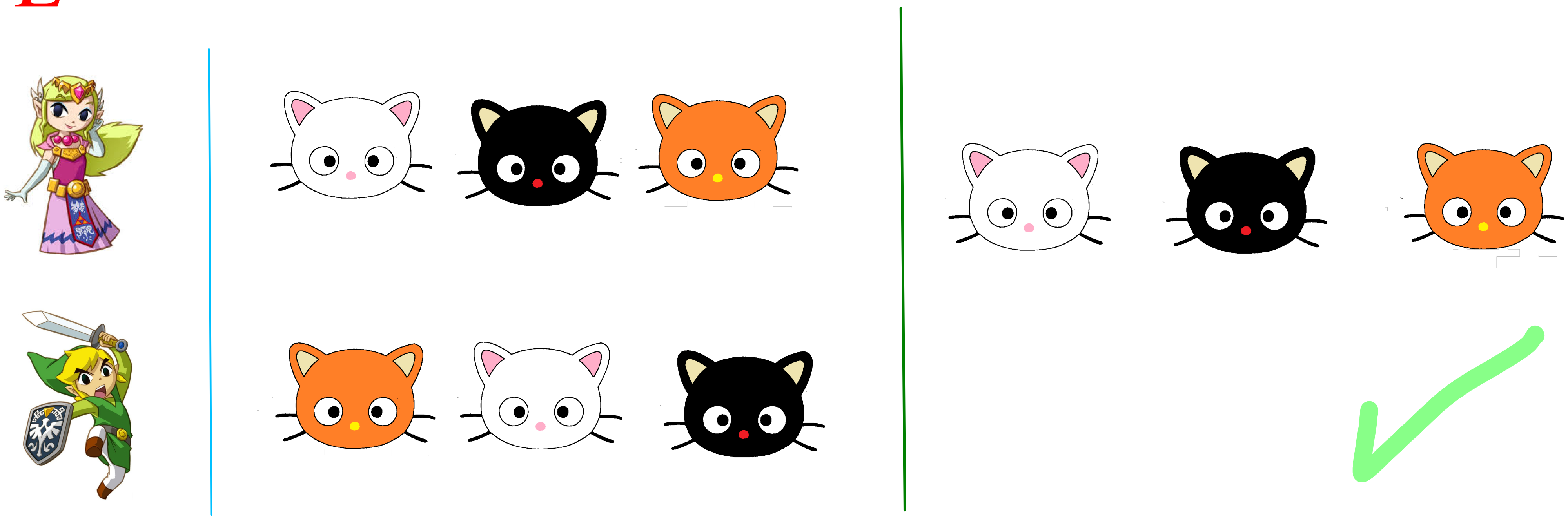


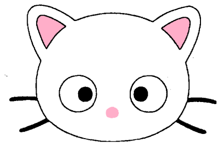
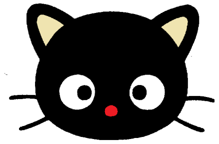
 le gana a  por decisivo

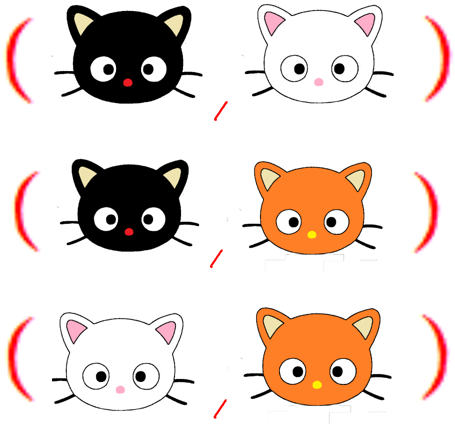


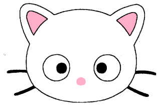
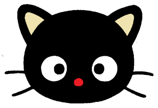
Veamos para ()

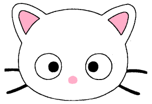
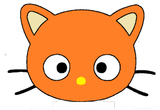
E

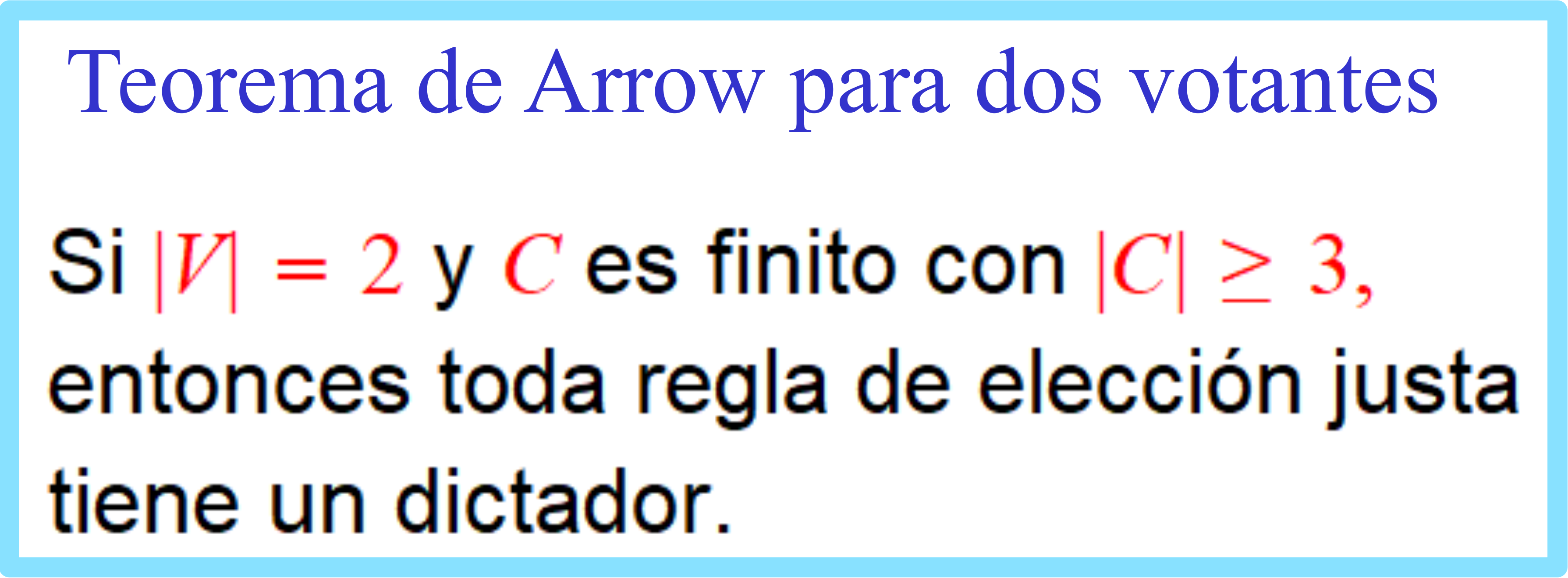


 le gana a  por uniformidad local



Veamos para (, )

Usamos (, ) y los resultados anteriores.



Teorema de Arrow para dos votantes

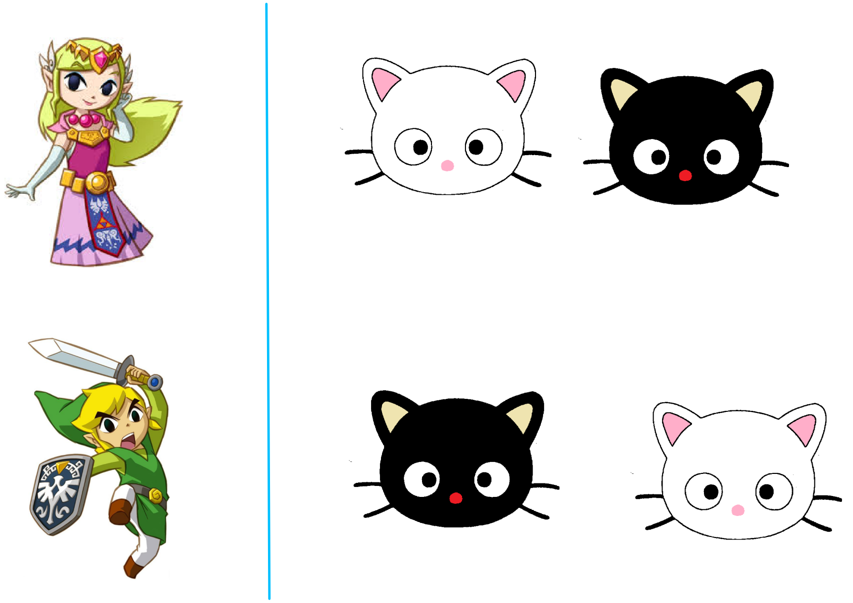
Si $|V| = 2$ y C es finito con $|C| \geq 3$, entonces toda regla de elección justa tiene un dictador.

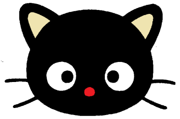
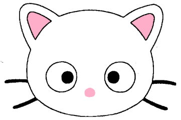
Teorema de Arrow para dos votantes

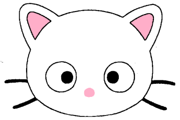
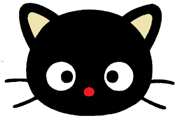
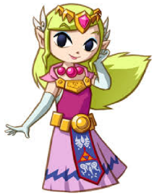
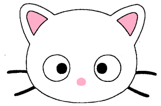
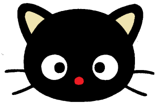
Si $|V| = 2$ y C es finito con $|C| \geq 3$, entonces toda regla de elección justa tiene un dictador.

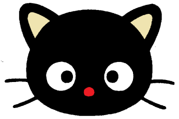
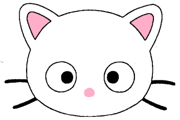
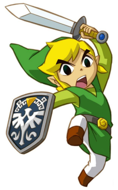
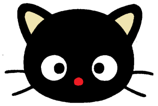
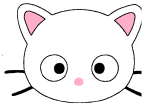
Sea Σ una regla justa, veamos que tiene un dictador. Consideremos la siguiente elección:

E



( , )

 le gana a  entonces  es ( , )decisiva

 le gana a  entonces  es ( , )decisivo

Como sea, habrá un decisivo y por lo anterior será el dictador.