Ultrafiltros en las Matemáticas

Osvaldo Guzmán

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM

Parte III: El Teorema de Ramsey

XXIII
ESCUELA DE VERANO
EN MATEMÁTICAS

CENTRO DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS

El ultracuantificador

En lógica se estudian varios tipos de cuantificadores, siendo los más conocidos:

$$\forall \qquad\qquad \exists$$

Ahora definiremos un cuantificador basado en un ultrafiltro.

Definición (Cuantificador de un filtro)

Sea X un conjunto. $\mathcal{F}$ filtro en X y $\sigma(x)$ una fórmula. Definimos el cuantificador:

$$\boxed{\exists^{\mathcal{F}} x(\sigma(x))}$$

Significa que el conjunto $\{x \in X \mid \sigma(x)\}$ esta en $\mathcal{F}$.

Es decir $\exists^{\mathcal{F}} x(\sigma(x))$ significa que existen "muchos" (según $\mathcal{F}$) x que cumplen $\sigma(x)$.

Este cuantificador es especialmente interesante cuando usamos un ultrafiltro.

Evidentemente (si $X \neq \emptyset$), se tiene que $\exists^{\mathcal{U}} x(\sigma(x))$ implica $\exists x(\sigma(x))$.

Sin embargo, $\exists^{\mathcal{U}} x$ es mucho mejor que el usual $\exists x$.

Tarea

Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{U}$ ultrafiltro en X y $\sigma,\ \varphi$ fórmulas.

1. $\exists^{\mathcal{U}} x(\sigma(x) \vee \varphi(x))$ es equivalente a $\exists^{\mathcal{U}} x(\sigma(x)) \vee \exists^{\mathcal{U}} x(\varphi(x))$.
2. $\exists^{\mathcal{U}} x(\sigma(x) \wedge \varphi(x))$ es equivalente a $\exists^{\mathcal{U}} x(\sigma(x)) \wedge \exists^{\mathcal{U}} x(\varphi(x))$.
3. $\neg\exists^{\mathcal{U}}_{x}(\sigma(x))$ es equivalente a $\exists^{\mathcal{U}}_{x}(\neg\sigma(x))$.

4. Definamos $\forall^{u}x(\sigma(x))$ como $\neg\exists^{u}_{x}(\neg\sigma(x))$.

Demostrar que $\forall^{u}$ y $\exists^{u}$ son equivalentes.

5. Los puntos 2, 3 y 4 no son ciertos para $\exists$.

La definición anterior se extiene naturalmente a fórmulas de más de una variable.

$$\exists^{\mathcal{U}} x \exists^{\mathcal{U}} y(\sigma(x,y))$$

significa

$$\exists^{\mathcal{U}} x(\{y \mid \sigma(x,y)\} \in \mathcal{U})$$

Se siguen cumpliendo las propiedades anteriores.

Teoría de Ramsey

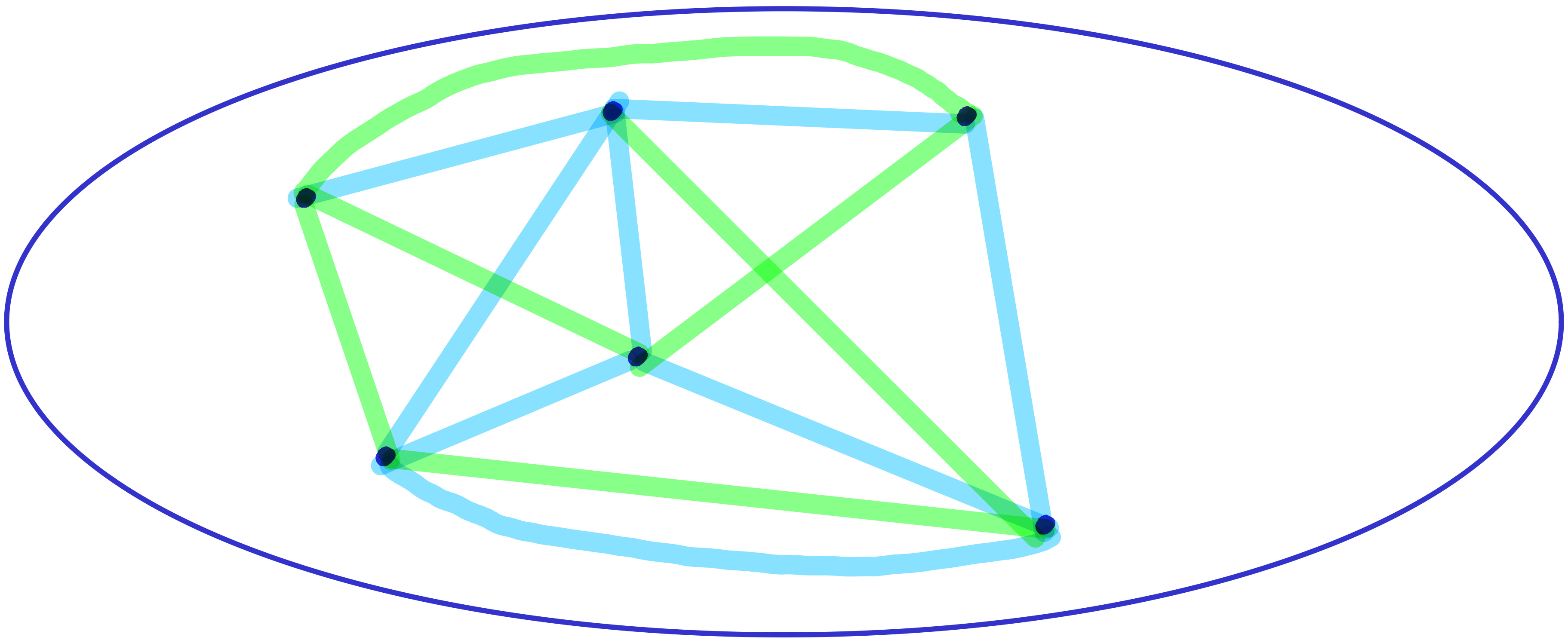
Notación

Sea X un conjunto y $n \in \omega$.

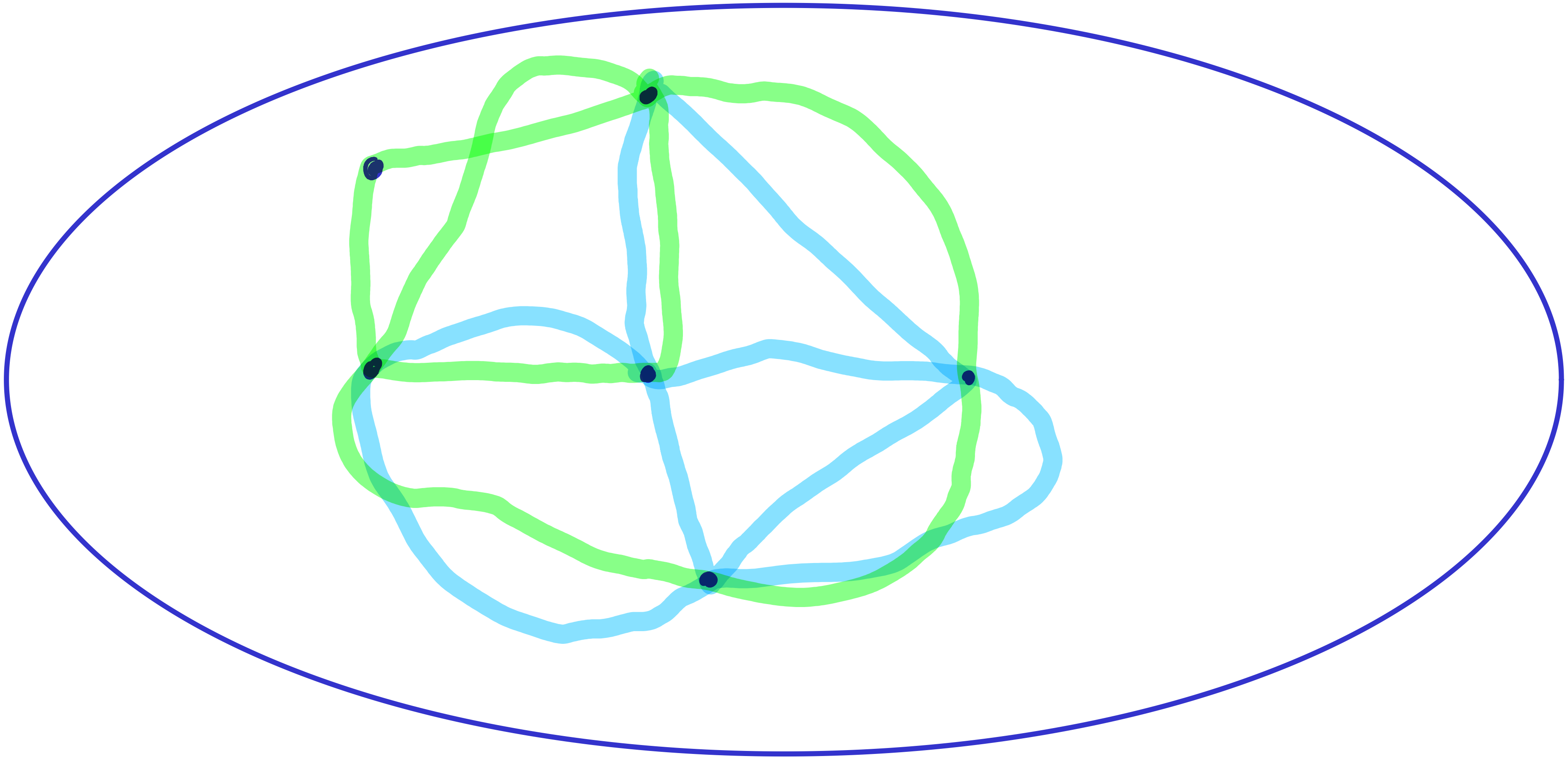
1. Definimos $[X]^n$ como la colección de todos los subconjuntos de X de tamaño n.
2. De igual manera, $[X]^\omega$ es la colección de los subconjuntos numerables de X.
3. Denotamos $\bar{n} = \{i \in \omega \mid i < n\}$.

Una coloración de $[X]^n$ es simplemente una función $d : [X]^n \to C$.
(donde C es algún conjunto).

En el caso de $n = 2$, lo podemos imaginar como una coloración de las aristas de la gráfica completa cuyo conjunto de vértices es X.

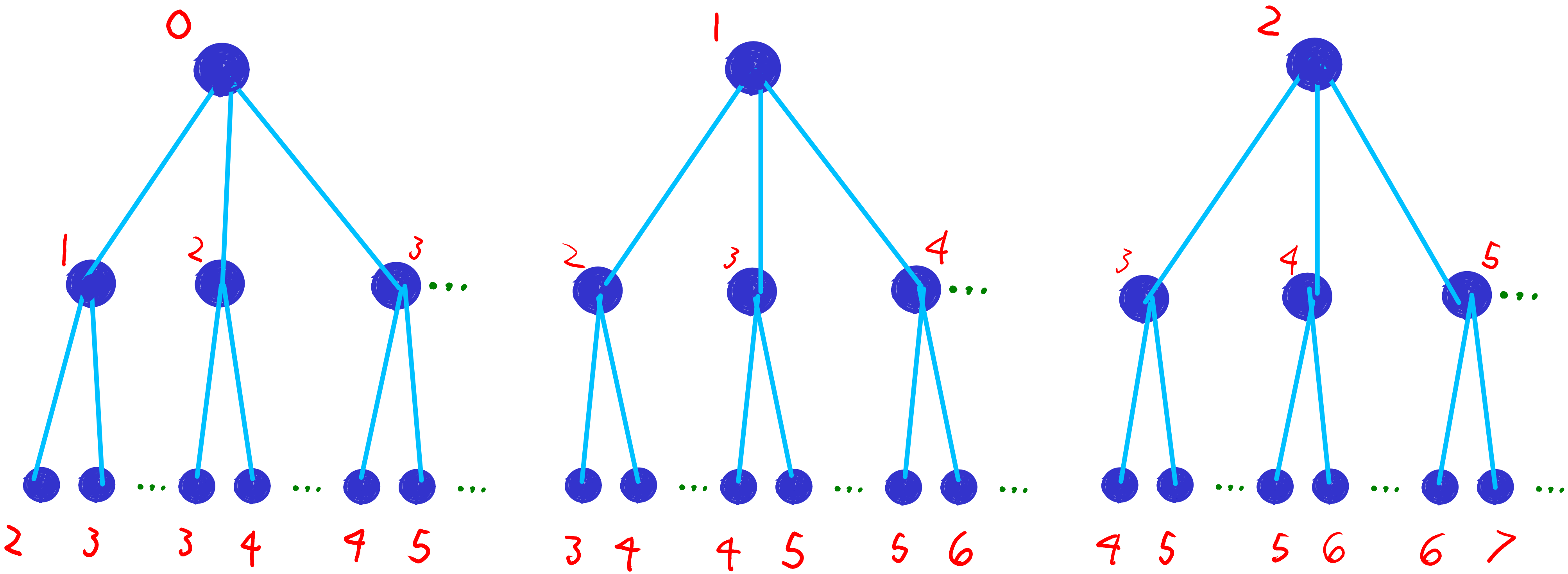


El caso de $n > 2$ es similar, pero coloreamos la hypergráfica completa.

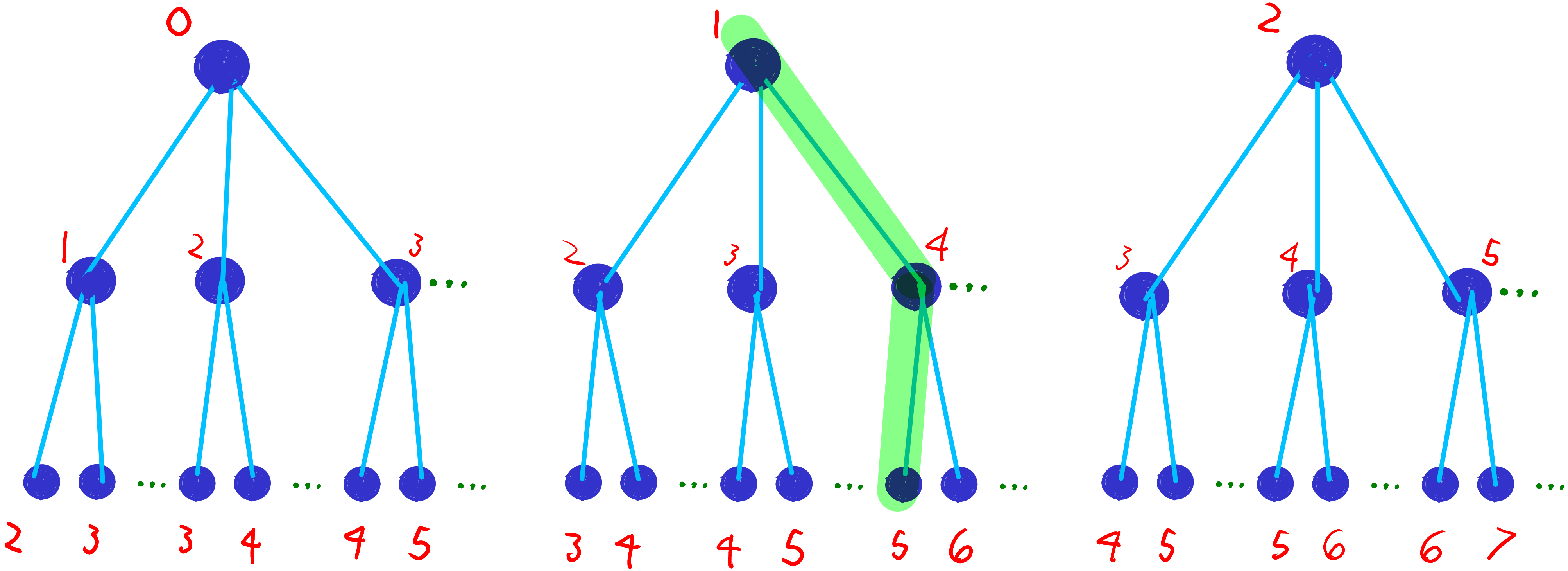


Una forma más conveniente de dibujar a $[\omega]^n$ (o a $[X]^n$ cuando X tiene un orden lineal) es pensar a $[\omega]^n$ como un árbol de la siguiente manera:

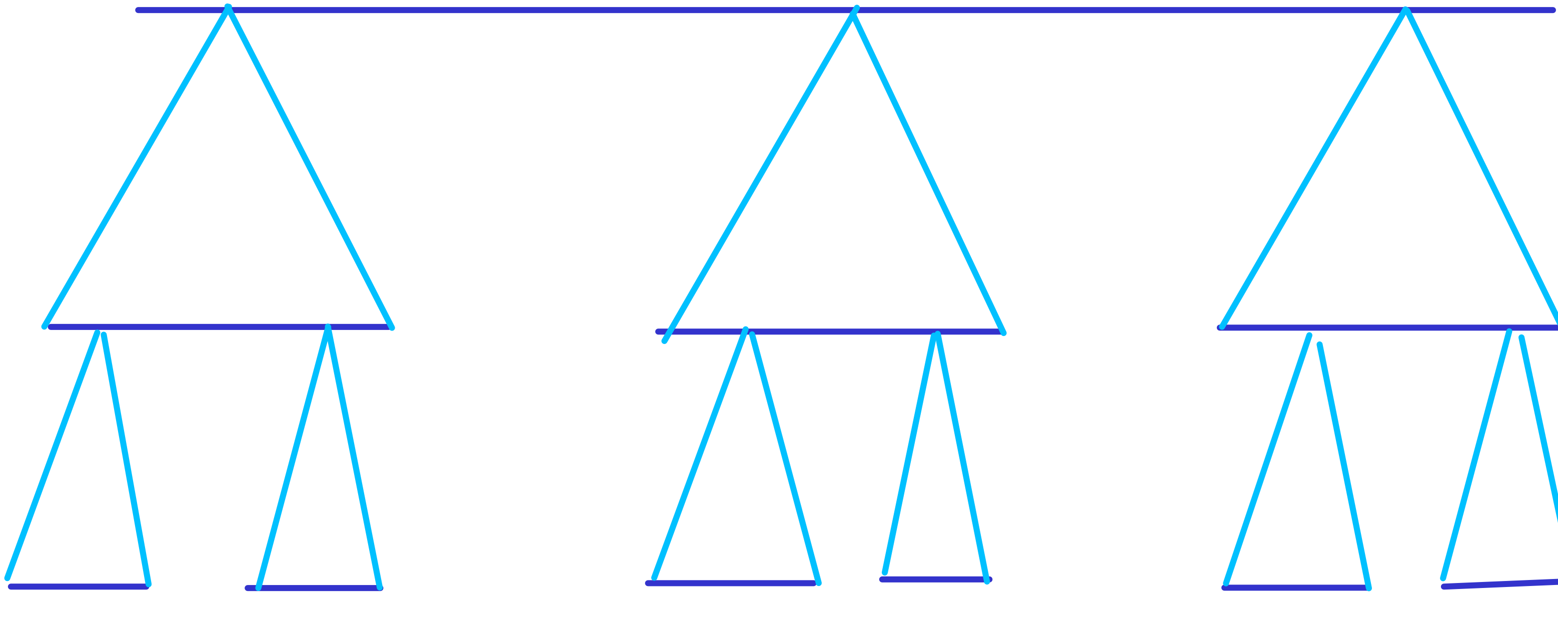
$[\omega]^3$



$[\omega]^3$



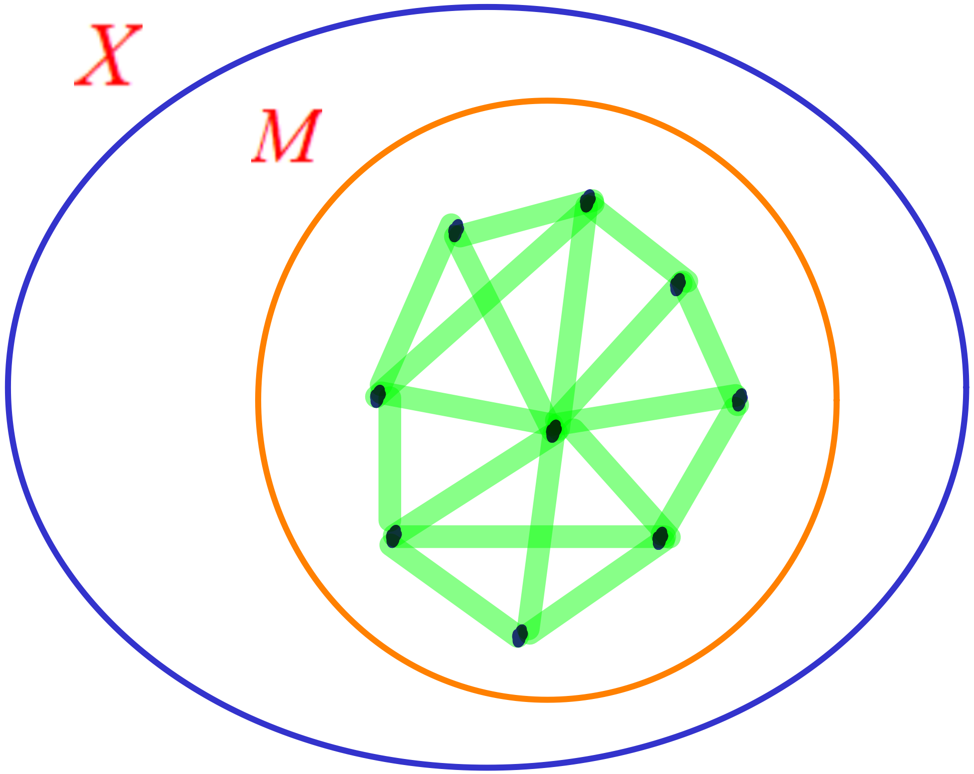
Esta rama representa a $\{1,4,5\}$



Así una coloración de $[\omega]^3$ se corresponde a colorear las ramas del árbol anterior.

Definición (conjunto monocromático)

Sea X un conjunto y $c : [X]^n \to \overline{m}$. Decimos que $M \subseteq X$ es monocromático (c-monocromático) si $c(a) = c(b)$ para todos $a, b \in [M]^n$.



Teorema (infinito) de Ramsey

Sean $n, m > 0.$ Toda coloración de $[\omega]^n$ con m colores tiene un monocromático infinito.

Teorema (infinito) de Ramsey

Sean $n, m > 0$. Toda coloración de $[\omega]^n$ con m colores tiene un monocromático infinito.

La conclusión del teorema se suele abreviar como:

$$\omega \longrightarrow (\omega)^n_m$$

Teorema (infinito) de Ramsey

Sean $n, m > 0$. Toda coloración de $[\omega]^n$ con m colores tiene un monocromático infinito.

Demostración

Haremos el caso n = 3 y m = 2. El caso general se queda de tarea.

Tenemos $c : [\omega]^3 \to \{0,1\}$. Queremos encontrar un monocrómatico. Escojamos $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal en ω. Notemos que una de las siguientes fórmulas debe ser verdadera:

$$\exists^{\mathcal{U}} x \exists^{\mathcal{U}} y \exists^{\mathcal{U}} z (c(x,y,z) = 0)$$

$$\exists^{\mathcal{U}} x \exists^{\mathcal{U}} y \exists^{\mathcal{U}} z (c(x,y,z) = 1)$$

(una es la negación de la otra).

Sin perdida de generalidad, supongamos que se cumple que:

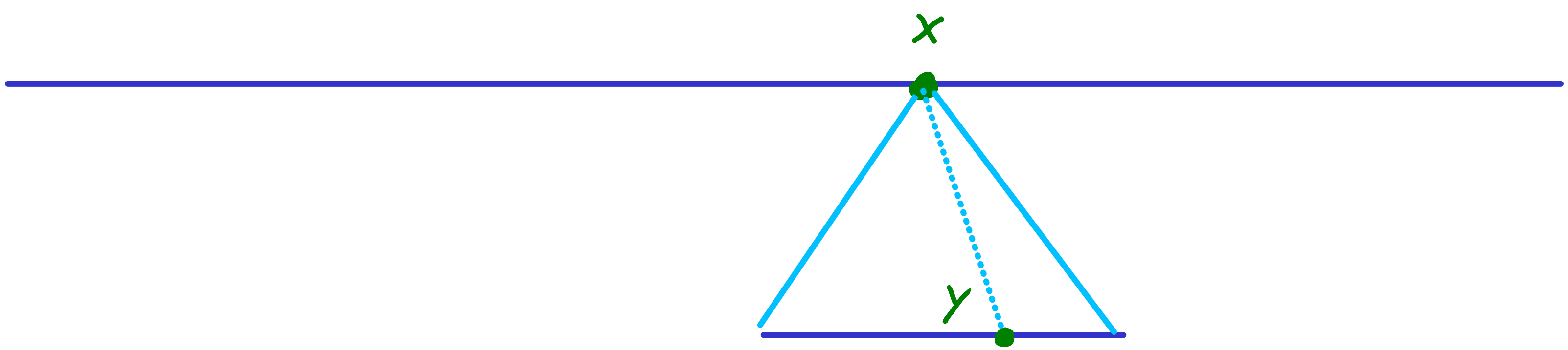
$$\exists^{\mathcal{U}} x \exists^{\mathcal{U}} y \exists^{\mathcal{U}} z (c(x,y,z) = 0)$$

Veremos que existe un monocromático infinito de color 0.

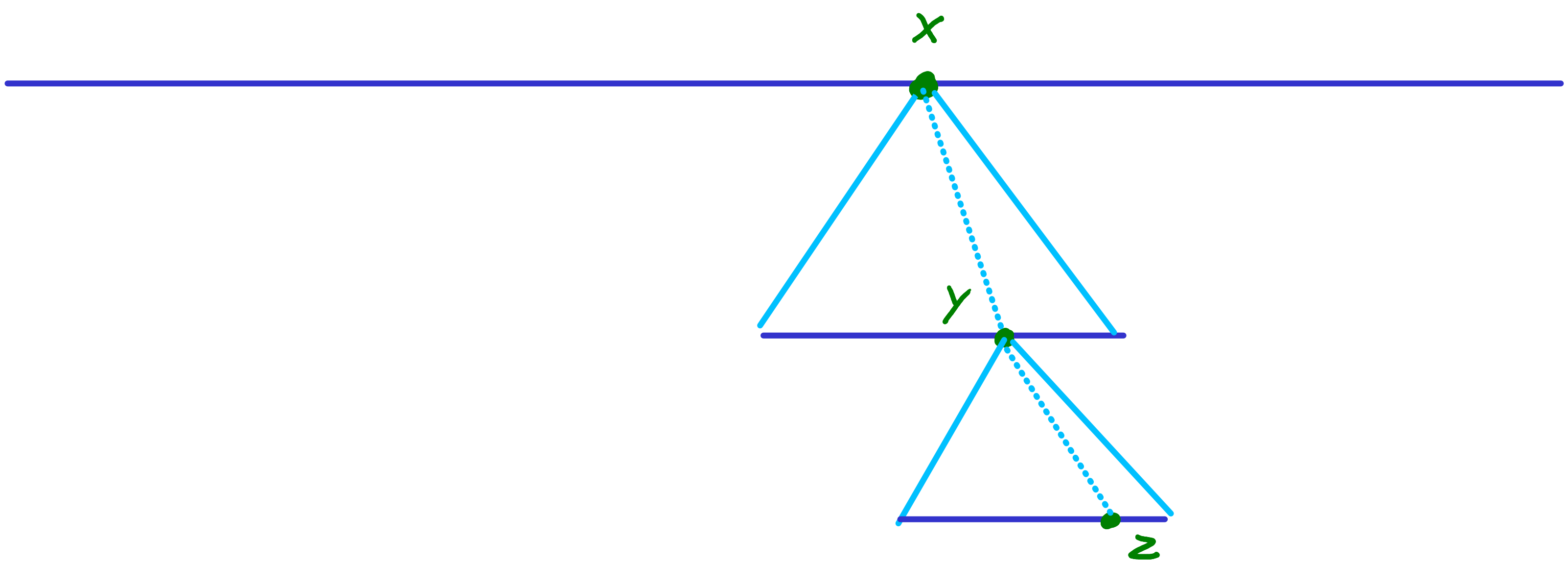
Construimos T un subárbol de $[\omega]^3$ de la siguiente manera:

El primer nivel es el conjunto $\{x \mid \exists^{\mathcal{U}} y \exists^{\mathcal{U}} z(c(x,y,z) = 0)\}$ que esta en el ultrafiltro.

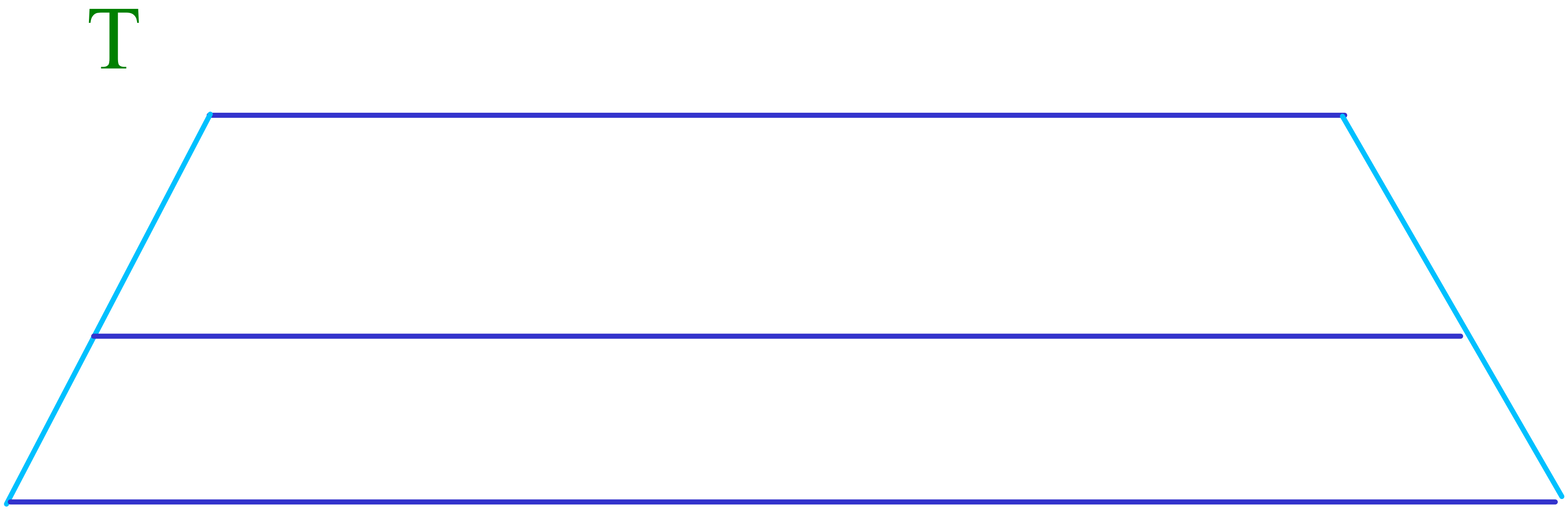
Para cada uno de estos x, el conjunto de sus sucesores inmediatos es $\{y \mid \exists^{\mathcal{U}} z(c(x,y,z) = 0)\}$, que esta en el ultrafiltro.



Para uno de estos y, el conjunto de sus sucesores inmediatos es $\{z \mid (c(x,y,z) = 0)\}$, que esta en el ultrafiltro.



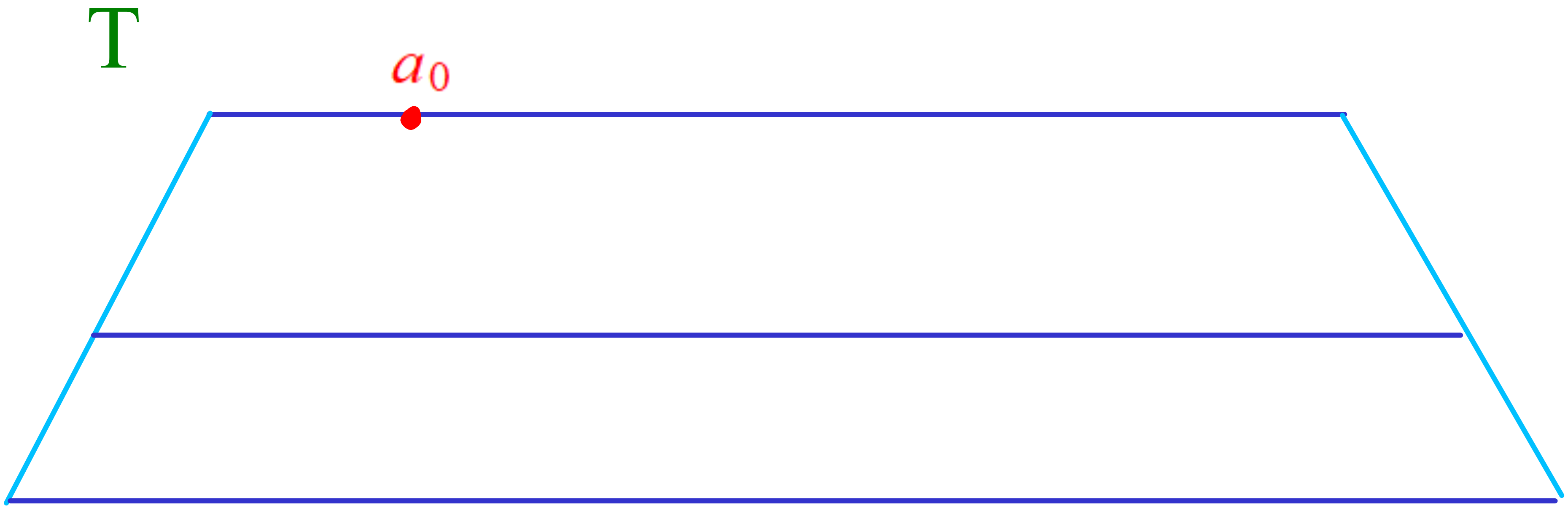
Por construcción, todas las ramas de T tienen color 0.



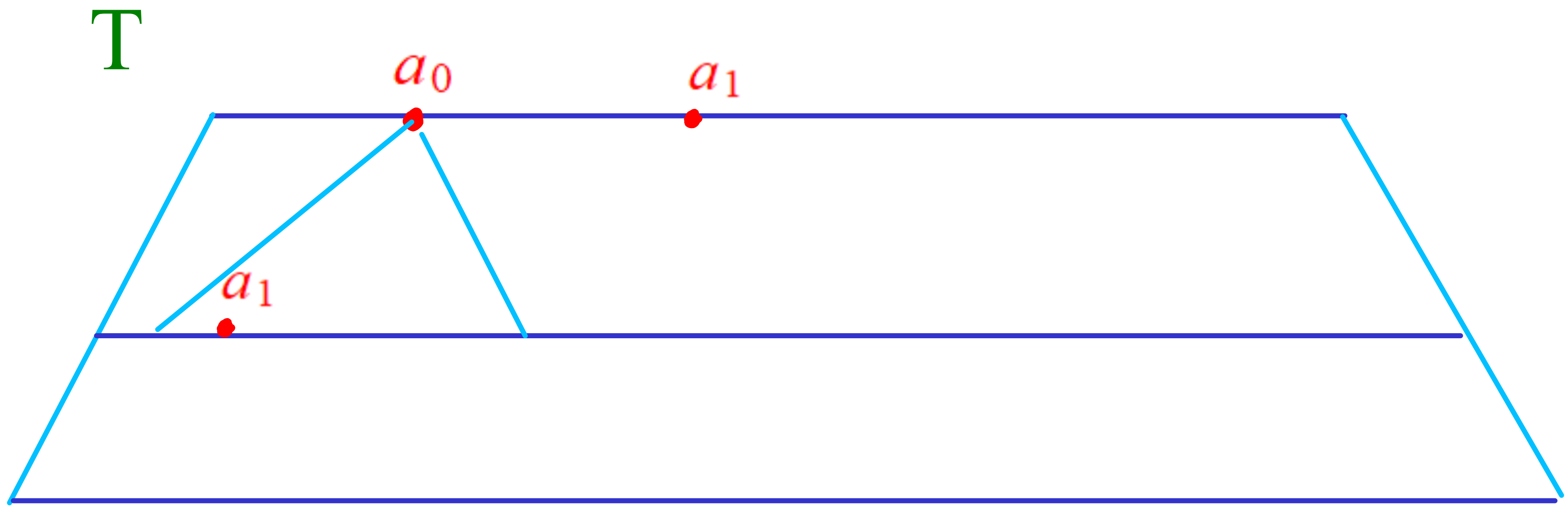
Recordemos que como el ultrafiltro es no principal, la intersección de cualquier cantidad finita de sus elementos es infinita (y esta en el ultrafiltro).

Construiremos un conjunto $M = \{a_n \mid n \in \omega\}$ de la siguiente manera:

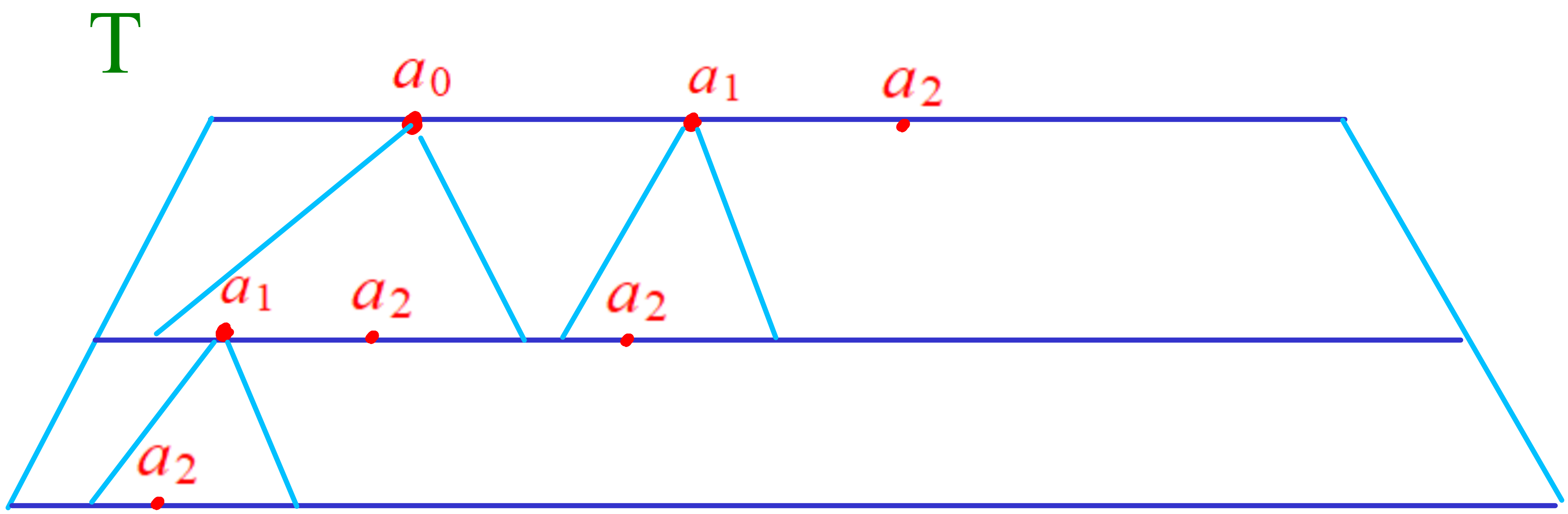
a_0 esta en el primer nivel de T.



a_1 esta en el primer nivel de T y es sucesor de a_0.

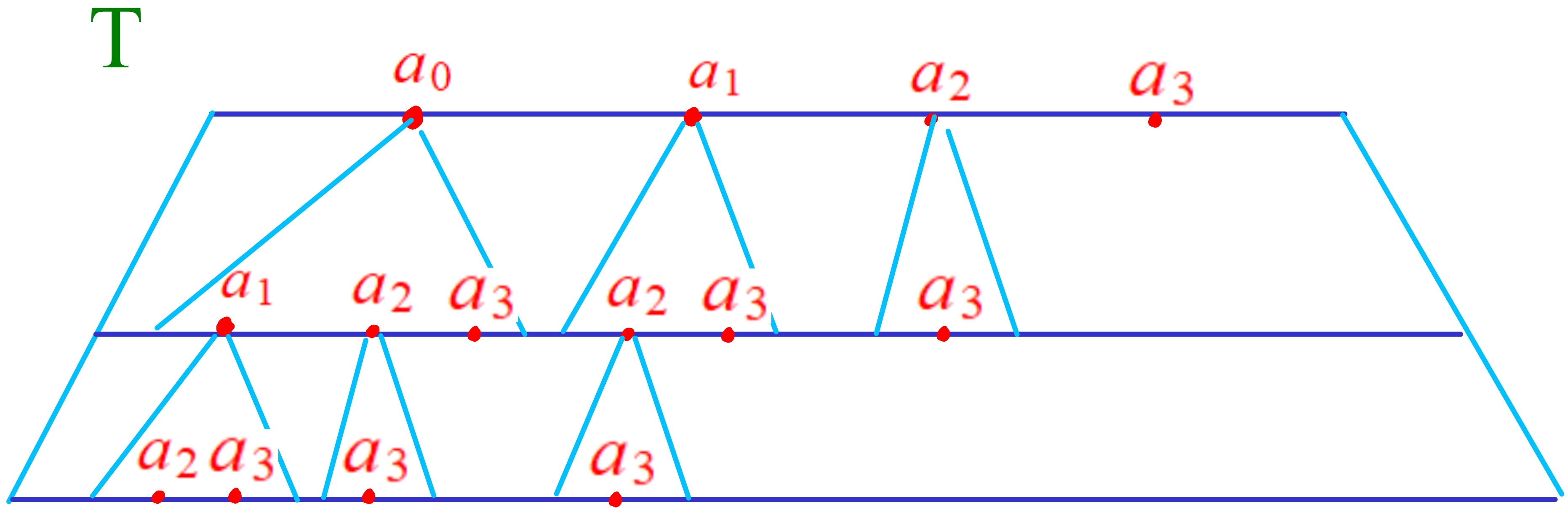


a_2 esta en el primer nivel, es sucesor de a_0, a_1 y de (a_0, a_1).



Tenemos que $c(a_0, a_1, a_2) = 0$

a_3 esta en el primer nivel, es sucesor de a_0, a_1, a_2, (a_0, a_1), (a_1, a_2), (a_0, a_2).



Tenemos que $\{a_0, a_1, a_3\}$, $\{a_0, a_2, a_3\}$ y $\{a_1, a_2, a_3\}$ tienen color 1.

Así continuamos, el punto es que nos encargamos que cada subconjunto de M de tamaño 3 es una rama de T. Concluimos que M es monocromático.

En la demostración anterior, aunque el conjunto monocromático se construyó usando conjuntos en el ultrafiltro, la demostración no da que el monocromático este en el ultrafiltro.

Definición (Ultrafiltro de Ramsey)

Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro no principal en ω. Decimos que $\mathcal{U}$ *es Ramsey* si toda coloración de $[\omega]^2$ tiene un monocromático en $\mathcal{U}$.

Es fácil conseguir ultrafiltros que no son Ramsey

Tarea

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro que extiende al filtro dual de alguno de los siguientes ideales:

$$\mathcal{ED},\ \mathcal{ED}_{fin},\ \text{fin}\times\text{fin},\ \mathcal{J}_{\frac{1}{n}},\ \mathcal{Z},\ \text{nwd}(\mathbb{Q})$$

Entonces $\mathcal{U}$ NO es Ramsey

¿Existen los ultrafiltros de Ramsey?

No puede demostrarse que si ni que no...

Teorema

Es consistente que existen ultrafiltros de Ramsey. La Hipótesis del Continuo implica que estos existen.

Teorema (Kunen)

Es consistente que NO existen ultrafiltros de Ramsey. No existen tales ultrafiltros en el Random model.

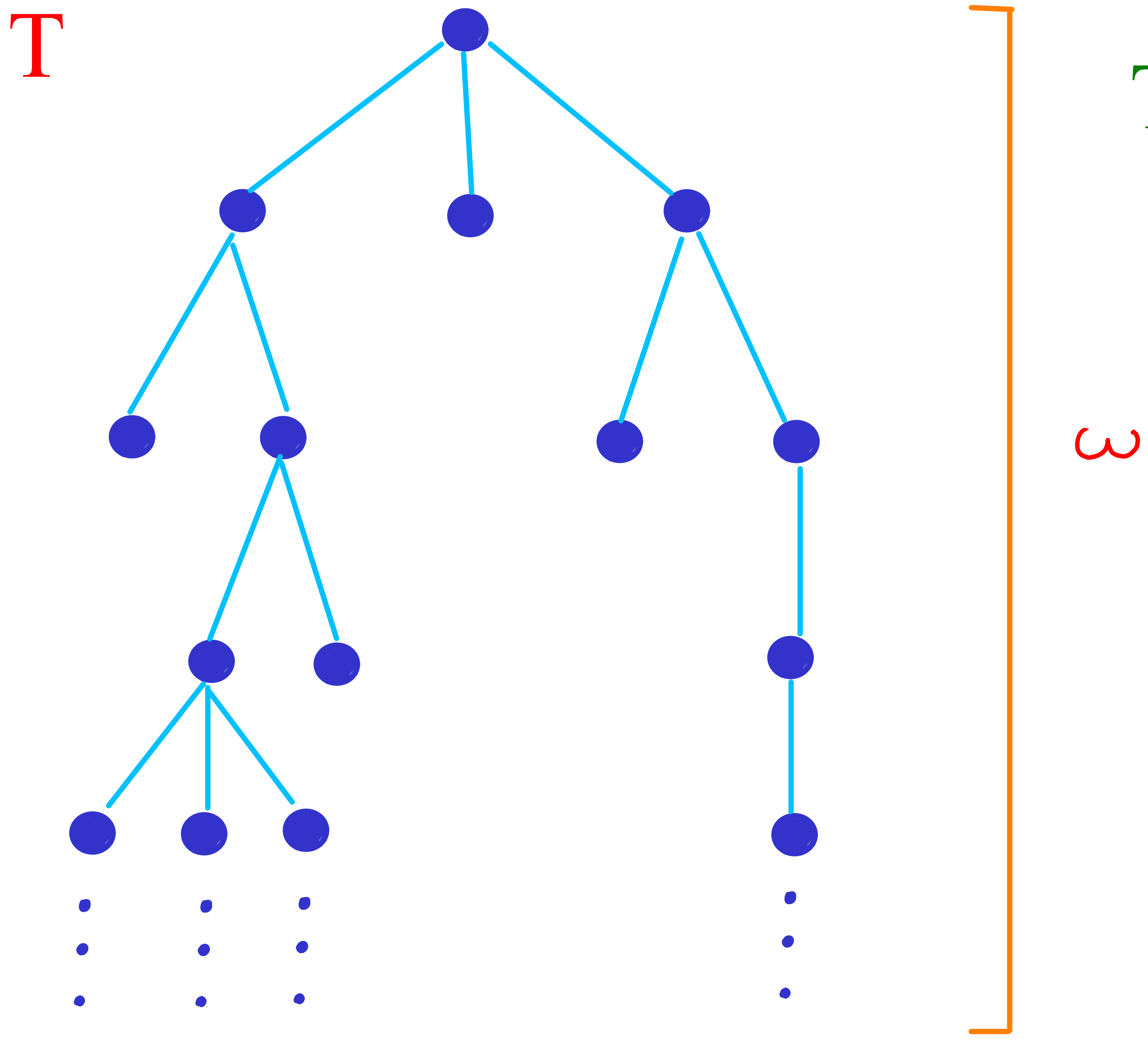
Teorema de Kőnig

Todo árbol infinito de ramificación finita tiene una rama cofinal

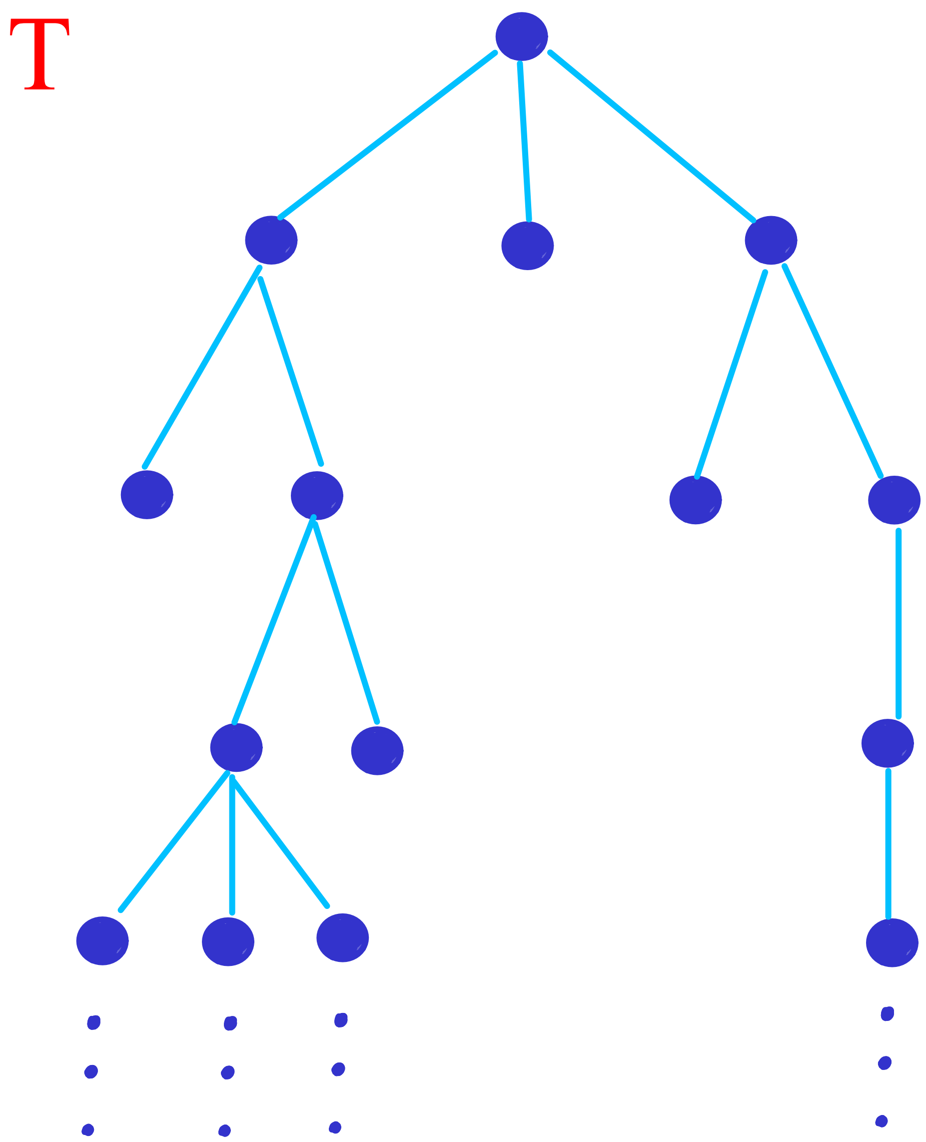
Teorema de Kőnig

Todo árbol infinito de ramificación finita tiene una rama cofinal

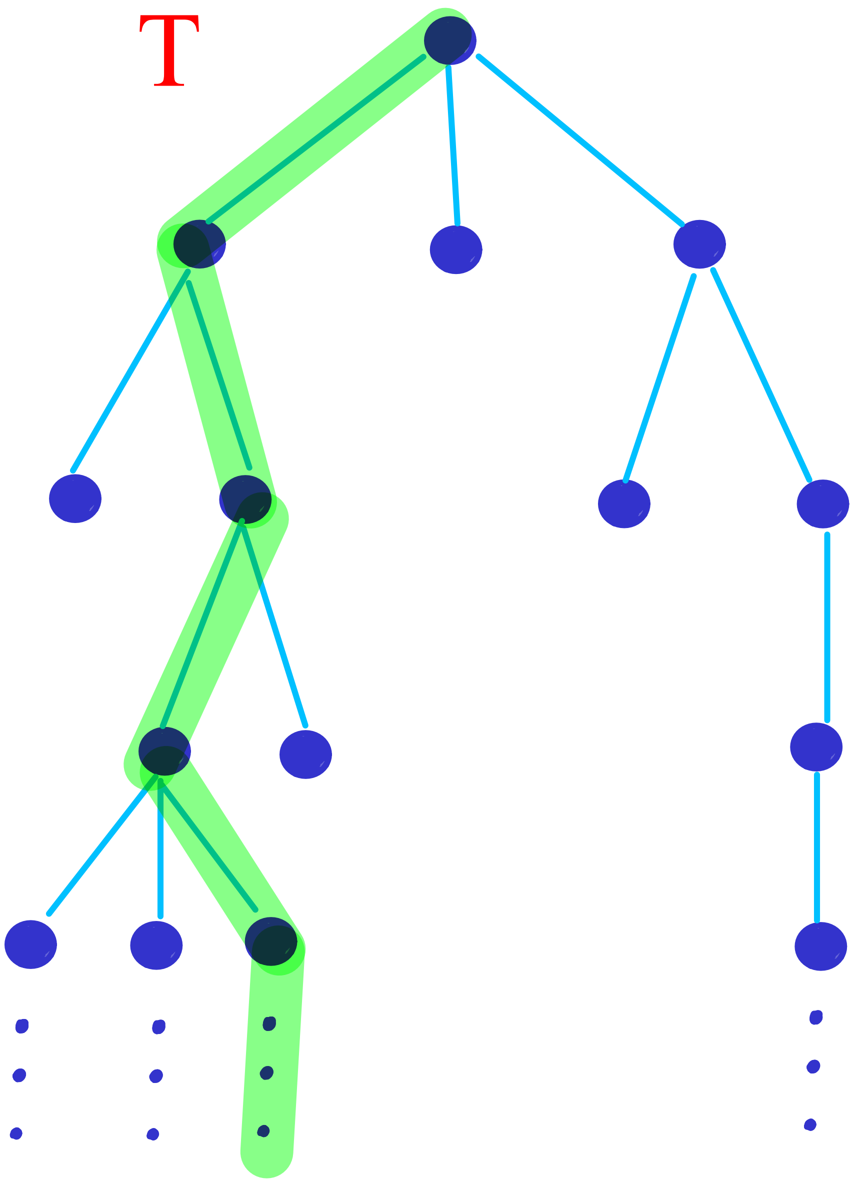
El teorema dice que para todo árbol T tal que:



T tiene altura ω



Todo nodo tiene solo una cantidad finita de sucesores inmediatos (algunos pueden tener 0 sucesores inmediatos).

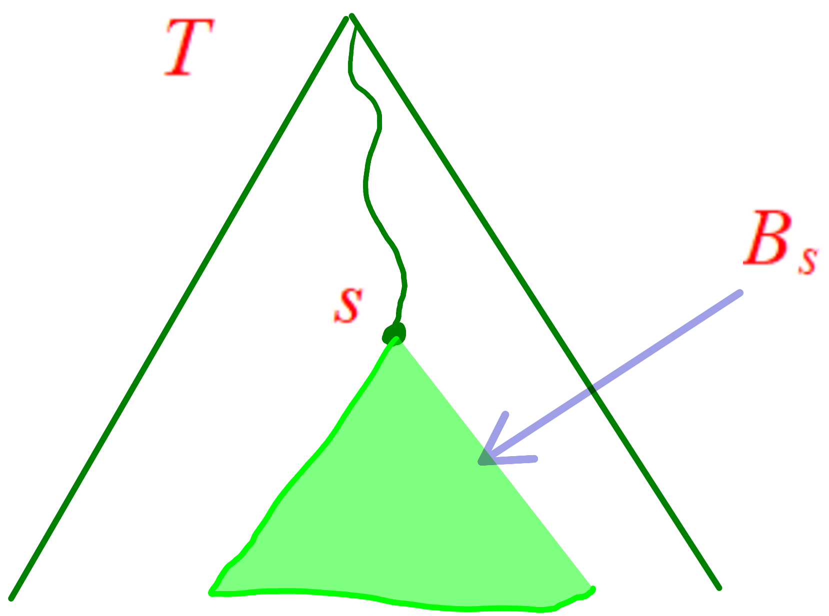


T tiene una rama cofinal, es decir, un camino que llega hasta el final.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre T.

Para cada $s \in T$, definimos

$B_s = \{t \in T \mid t$ extiende a $s\}$



Definimos $R = \{s \mid B_s \in \mathcal{U}\}$.

Se prueba que R es una rama cofinal (*!Tarea¡*).

$\square$

Teorema finito de Ramsey

Para cada $m, k, l > 0,$ existe n tal que toda coloración $c : [\bar{n}]^k \to l,$ existe $M \subseteq \bar{n}$ monocromático de tamaño $m.$

Teorema finito de Ramsey

Para cada $m, k, l > 0$, existe n tal que toda coloración $c : [\bar{n}]^k \to \bar{l}$, existe $M \subseteq \bar{n}$ monocromático de tamaño m.

La conclusión anterior se abrevia como:

$$n \to (m)_l^k$$

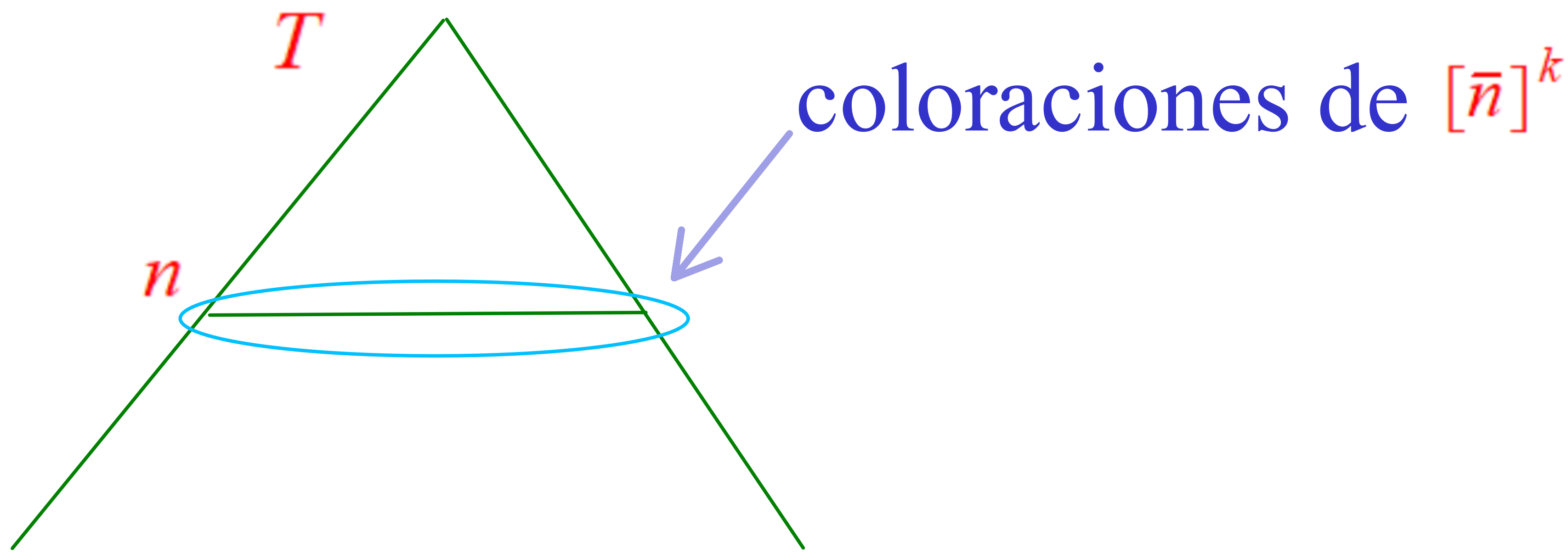
Demostración

Procedemos por contradicción. Es decir:

Existen m, k, l tal que para todo $n \in \omega$, existe una coloración $c : [\bar{n}]^k \to \bar{l}$ que no tiene monocromáticos de tamaño m.

Definimos un árbol T como sigue:

El nivel n de T consta de todas las coloraciones de $[\bar{n}]^k$ en $\bar{l}$ que no tienen monocromáticos de tamaño m.



Si $c : [\bar{n}]^k \to \bar{l}$ esta en T, los sucesores inmediatos de T son las $d : [\overline{n+1}]^k \to \bar{l}$ que extienden a c.

Tenemos que:

1. T es de ramificación finita.
2. T es infinito (estamos suponiendo que $n \to (m)_l^k$ falla para toda $n \in \omega$).

Así, por el teorema de Kőnig, el árbol tiene una rama cofinal.

Pero esta rama induce una coloración de $[\omega]^k$ en $\bar{l}$ sin monocromáticos de tamaño m, lo cual contradice el teorema de Ramsey.

Veamos de nuevo el Teorema de Ramsey:

Teorema de Ramsey

Sean $n, m > 0$. Toda coloración de $[\omega]^n$ con m colores tiene un monocromático infinito.

$$\omega \longrightarrow (\omega)^n_m$$

¿Es cierto el Teorema de Ramsey para dimensión infinita?

Sea $m > 0.$ ¿Es cierto que toda coloración de $[\omega]^{\omega}$ tiene un monocromático infinito?

¿Es cierto que $\omega \rightarrow (\omega)_m^{\omega}$?

Axioma de Elección: ¡No!

Axioma de Determinación: ¡Si!

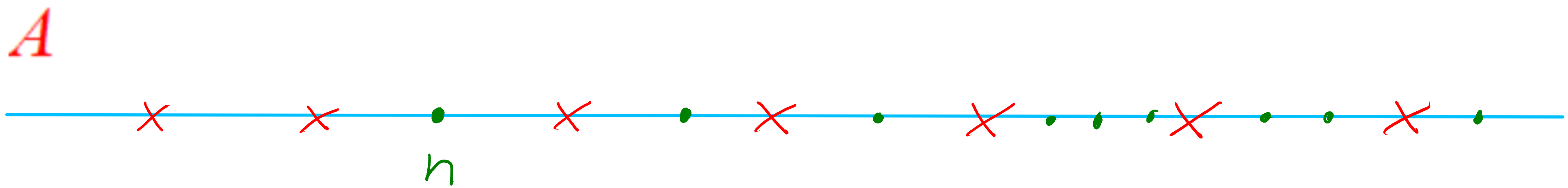
Usando ultrafiltros no principales, podemos hacer contraejemplos para $\omega \to (\omega)^{\omega}_{2}$

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal en ω.
Definimos la coloración $c : [\omega]^{\omega} \to \{0, 1\}$

1. $c(A) = 0$ si $\exists^{\mathcal{U}} n(|A \cap \bar{n}|$ es par$)$.
2. $c(A) = 1$ si $\exists^{\mathcal{U}} n(|A \cap \bar{n}|$ es impar$)$.

Es decir,

Sea $A \subseteq \omega$ infinito. Para cada $n \in \omega$, nos fijamos si el número de de elementos de A atrás de n es par o impar. Una de estas opciones se repite $\mathcal{U}$ veces. Si la opción par se repitió $\mathcal{U}$ veces, coloreamos de color 0 y si la impar se repitió $\mathcal{U}$ veces, coloreamos de color 1.



Notemos que si $A \subseteq \omega$ es infinito y $a = min(A)$, entonces $c(A) \neq c(A \setminus \{a\})$. Así, no pueden existir monocromáticos infinitos.

Tarea

Escribir con cuidado la prueba anterior. ¿Por qué es importante que usamos un ultrafiltro y no solo un filtro?, ¿Donde usamos los no principal?

Sin embargo, aún bajo el AC si existen versiones del teorema de Ramsey para dimensiones infinitas (ver los teoremas de Nash-Williams y de Ellentuck), pero esto ya sale del curso.