Ultrafiltros en las Matemáticas

Osvaldo Guzmán

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM

Parte II: Juegos, definibilidad y Axioma de Elección

XXIII
ESCUELA DE VERANO
EN MATEMÁTICAS

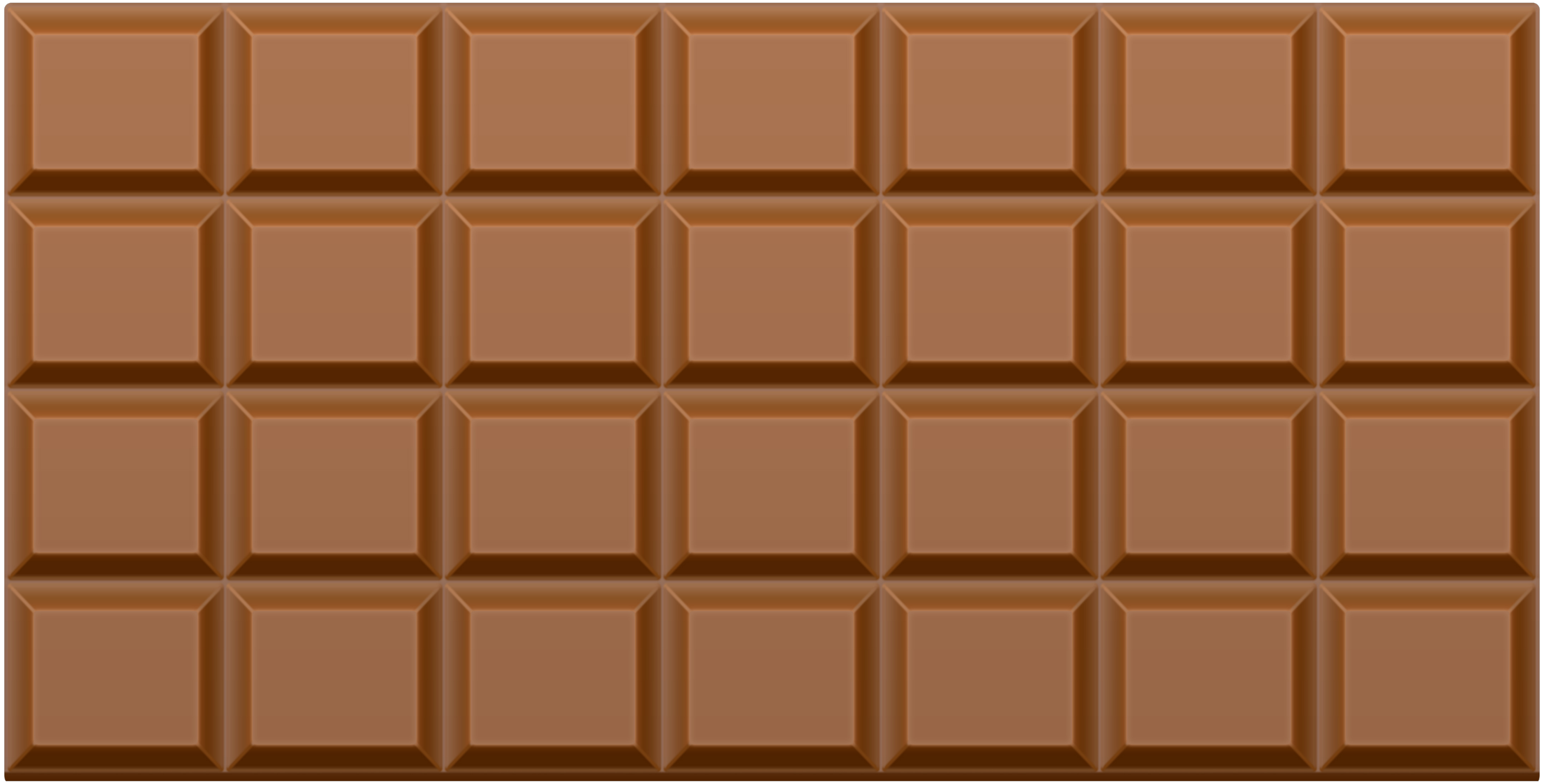
CENTRO DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS

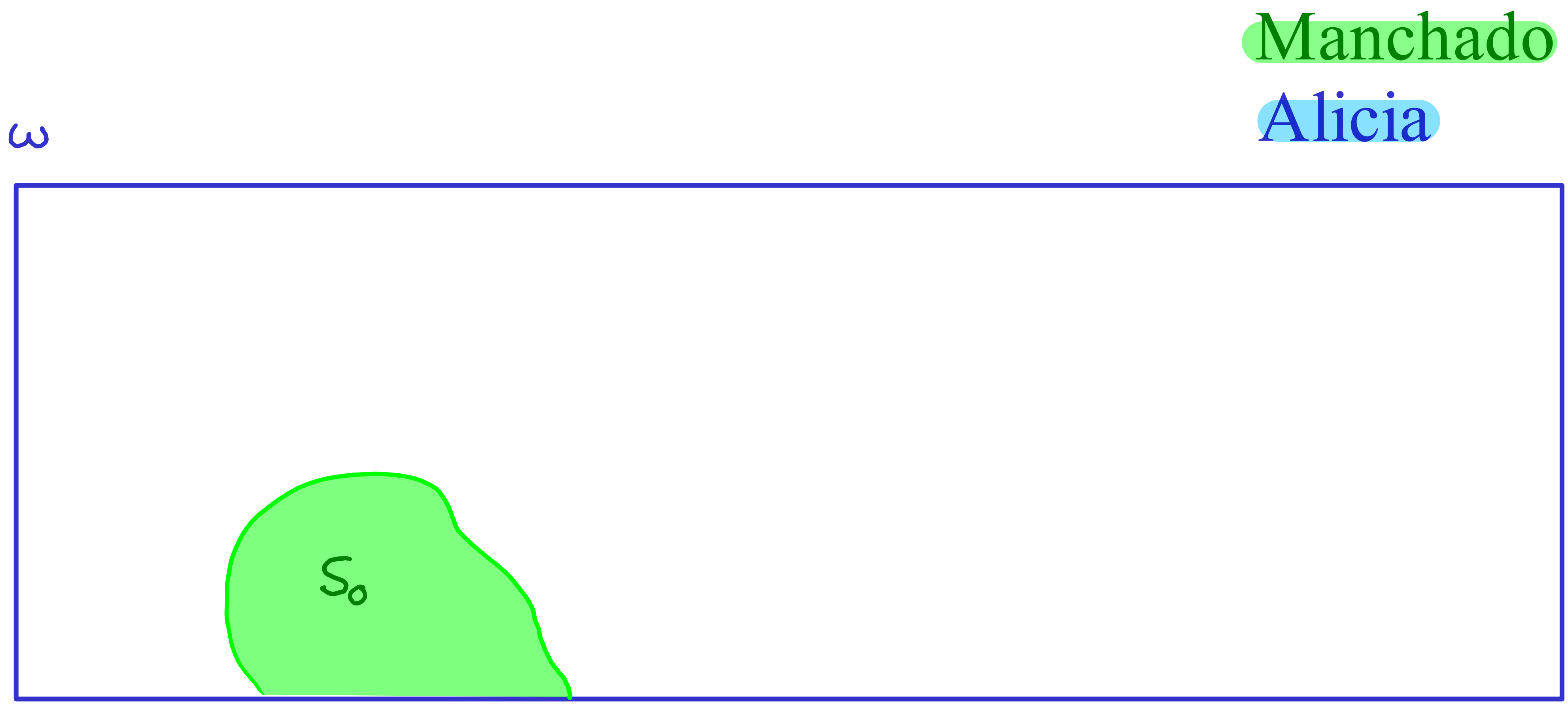
Definición (Juego del Chocolate)

Sea $\mathcal{F}$ un filtro en ω. El *juego del Chocolate de* $\mathcal{F}$ (denotado por $\mathcal{CH}(\mathcal{F})$) se define como sigue:

1. Una batalla entre dos jugadores: *Manchado vs Alicia*.
2. El juego se desarolla por turnos y dura ω pasos.
3. Después de los ω pasos, se decidirá quién es el ganador.

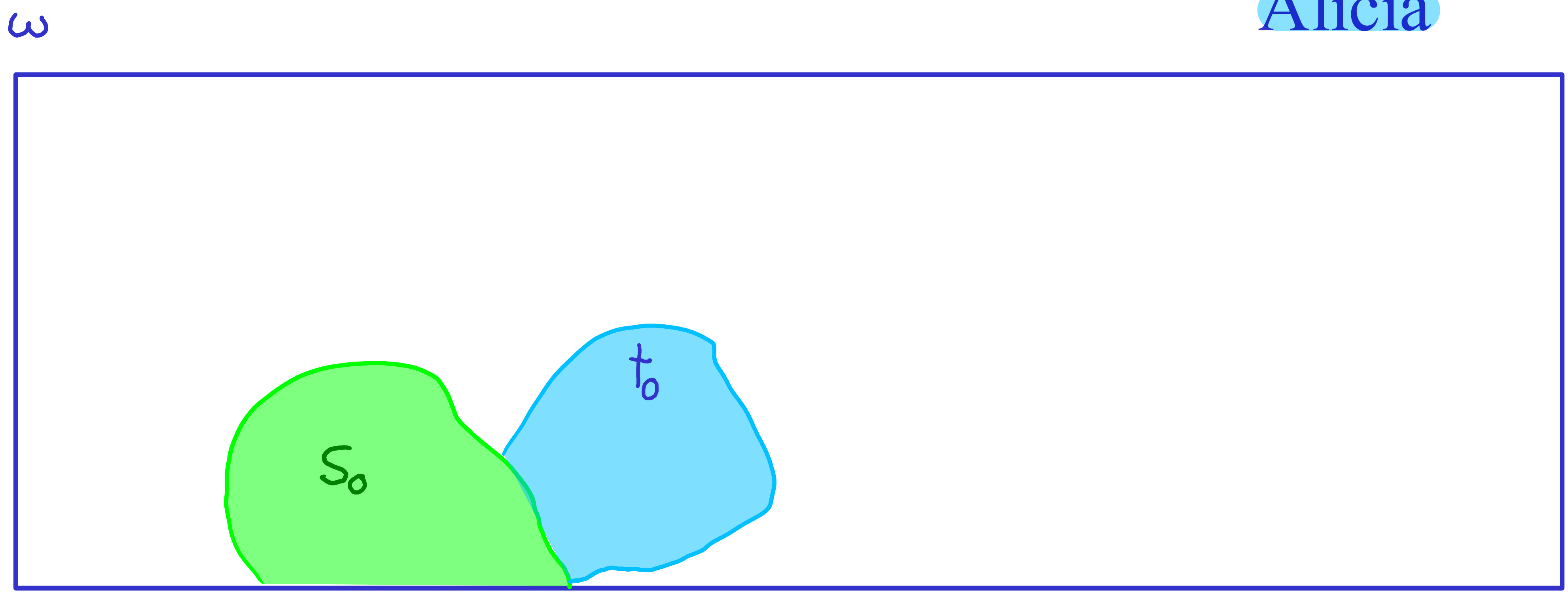
Pensemos en ω como una barra infinita de chocolate.



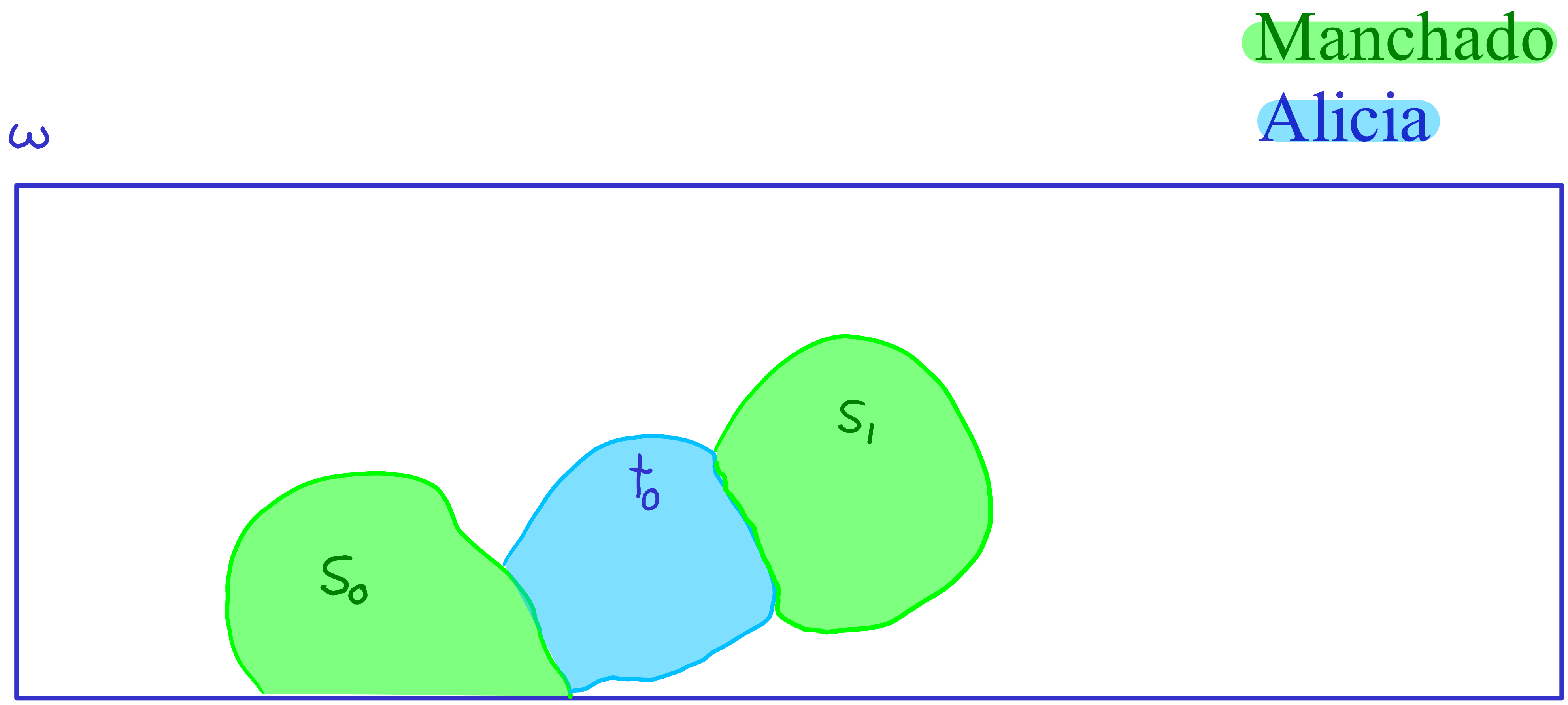


Manchado come $s_0 \in \mathrm{fin}(\omega)$.

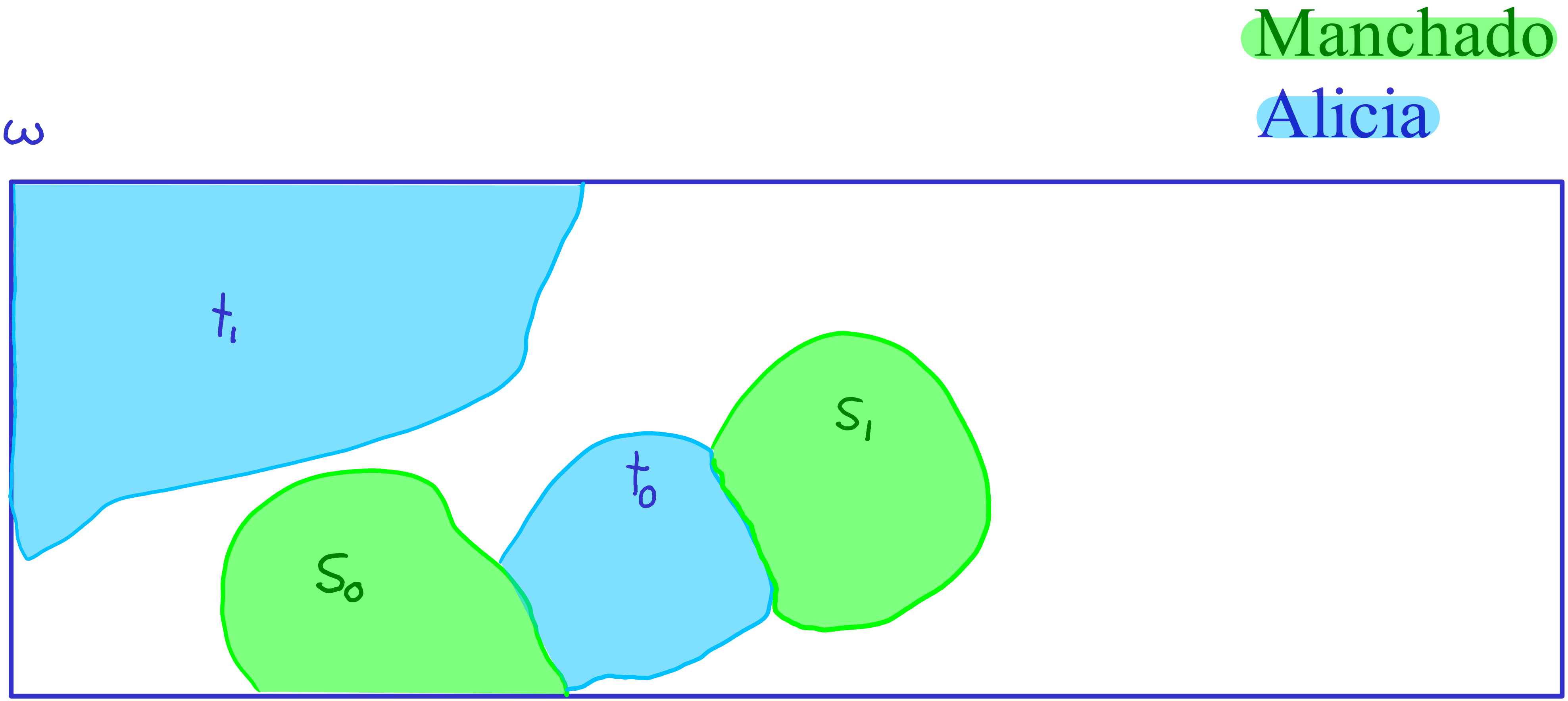
Manchado
Alicia



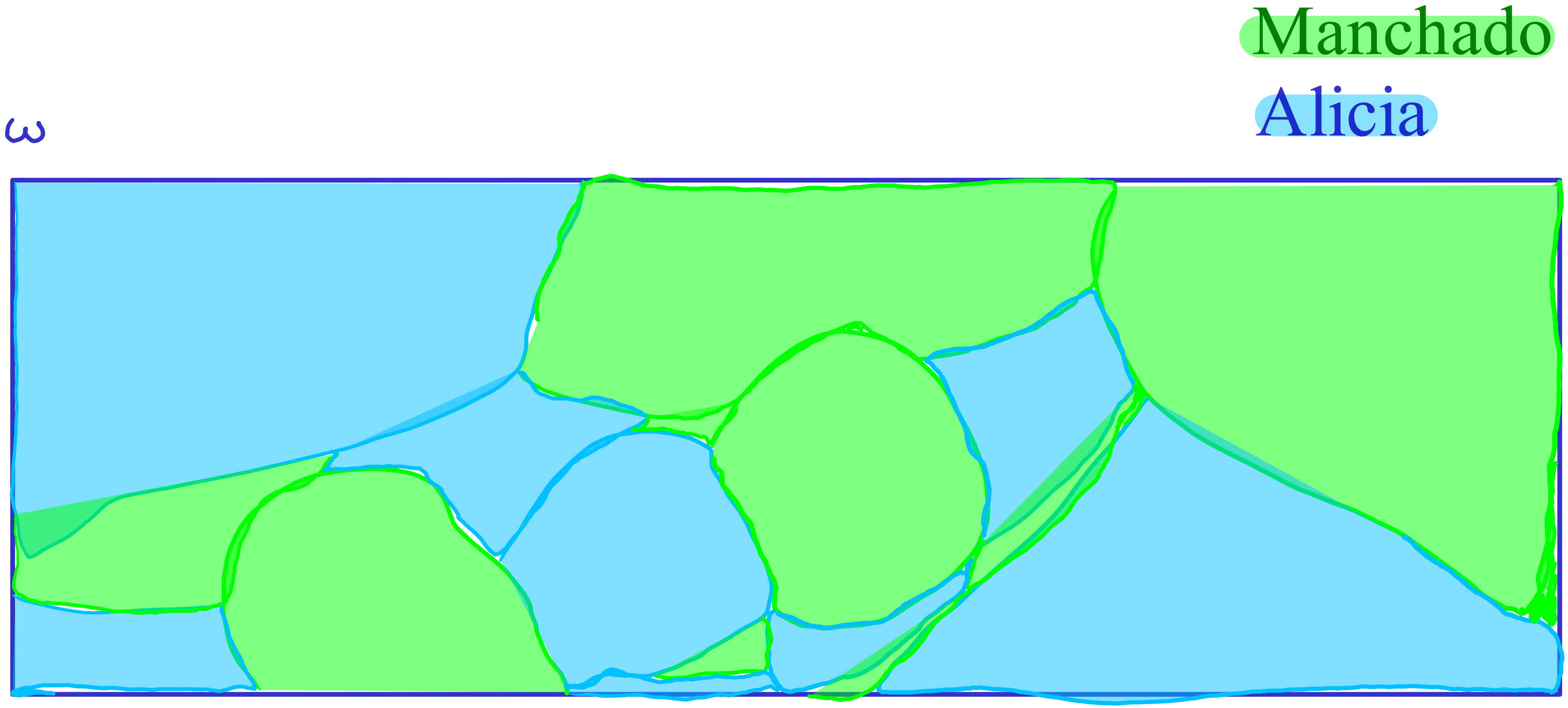
Alicia come $t_0 \in \mathrm{fin}(\omega)$ (ajeno con s_0).



Manchado come $s_1 \in \text{fin}(\omega)$ (ajeno con $s_0 \cup t_0$)



Alicia come $t_0 \in \text{fin}(\omega)$ (ajeno con $s_0 \cup t_0 \cup s_1$).



El juego continua por ω turnos.

Al final, Manchado comió $\bigcup_{n\in\omega} s_n$ y Alicia comió $\bigcup_{n\in\omega} t_n$.

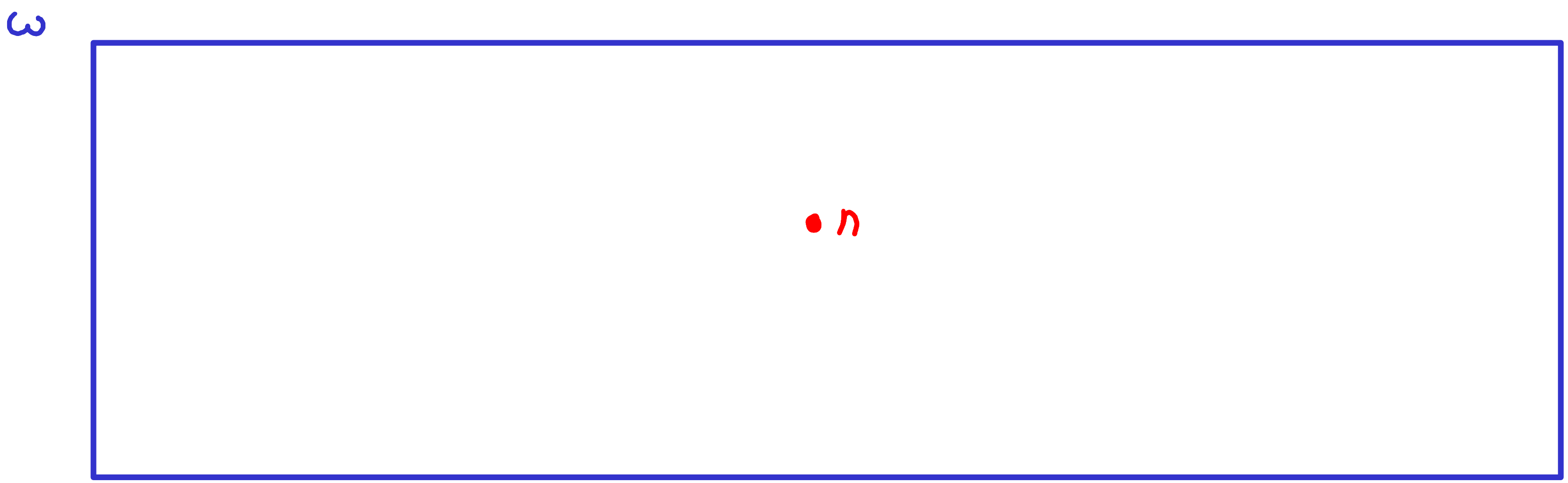
Al final, Manchado comió $\bigcup_{n\in\omega} s_n$ y Alicia comió $\bigcup_{n\in\omega} t_n$.

El *manchado ganará el juego* si logró comer mucho más que Alicia. Es decir, el habrá ganado si $\bigcup_{n\in\omega} s_n \in \mathcal{F}$.

En otro caso, *Alicia gana.* No hay empates.

Lema

Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro principal, entonces el manchado tiene estrategia ganadora en el juego $\mathcal{CH}(\mathcal{U})$.



Tarea

Demostrar que Alicia tiene estrategia ganadora en el juego del chocolate de los filtros duales de los siguientes ideales:

fin(ω), $\mathcal{ED}$, $\mathcal{ED}_{fin}$, fin$\times$fin, $\mathcal{J}_{\frac{1}{n}}$, $\mathcal{Z}$, nwd$(\mathbb{Q})$

Un argumento común cuando queremos probar que un jugador NO tiene estrategia ganadora en un juego, es usar un argumento conocido como "robar la estrategia".

Dejaremos los filtros a un lado por un momento para ver un ejemplo de este tipo de argumentos.

2-Ajedrez

El 2-Ajedrez se juega como el ajedrez normal, excepto por los siguientes cambios:

1) No hay regla de los 50 movimientos ni regla de la triple repetición.

2-Ajedrez

El 2-Ajedrez se juega como el ajedrez normal, excepto por los siguientes cambios:

1) No hay regla de los 50 movimientos ni regla de la triple repetición.

2) Cada jugador realiza dos movimientos por turno.

2-Ajedrez

El 2-Ajedrez se juega como el ajedrez normal, excepto por los siguientes cambios:

1) No hay regla de los 50 movimientos ni regla de la triple repetición.

2) Cada jugador realiza dos movimientos por turno.

3) No hay empates: Si después de ω turnos ningún jugador ganó, la victoria se la de al jugador blanco.

Teorema

El jugador negro no tiene estrategia ganadora en el 2-Ajedrez.

Teorema

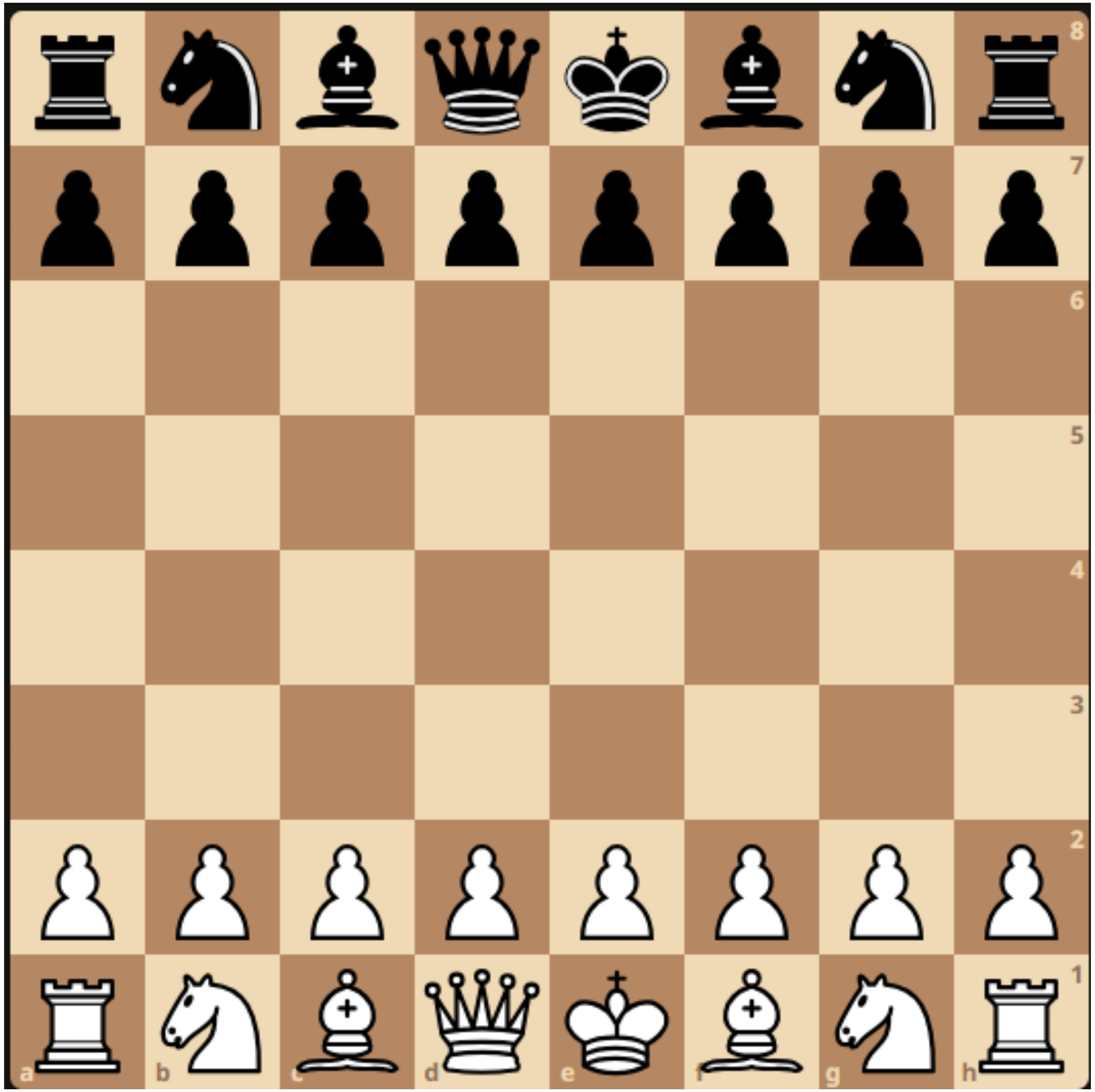
El jugador negro no tiene estrategia ganadora en el 2-Ajedrez.

Demostración

Supongamos que el negro tiene estrategia ganador. Ahora, el blanco juega lo siguiente:

Primero mueve al caballo de esta manera

... y después lo regresa



Realmente, lo que hizo el blanco fue saltar su turno. Apartir de ahora, el usará la estrategia ganadora del negro, la cuál garantiza un jaque mate en una cantidad finita de movimientos.

No es relevante para este mini curso, pero usando el resultado anterior y el Teorema de Gale-Steward se puede demostrar que:

Teorema

El jugador blanco tiene una estrategia ganadora en el 2-Ajedrez.

Teorema

Sea $\mathcal{F}$ un filtro en ω. Son equivalentes:

1. $\mathcal{F}$ tiene un conjunto finito.
2. El manchado tiene estrategia ganadora en el juego del chocolate de $\mathcal{F}$.

Teorema

Sea $\mathcal{F}$ un filtro en ω. Son equivalentes:

1. $\mathcal{F}$ tiene un conjunto finito.
2. El manchado tiene estrategia ganadora en el juego del chocolate de $\mathcal{F}$.

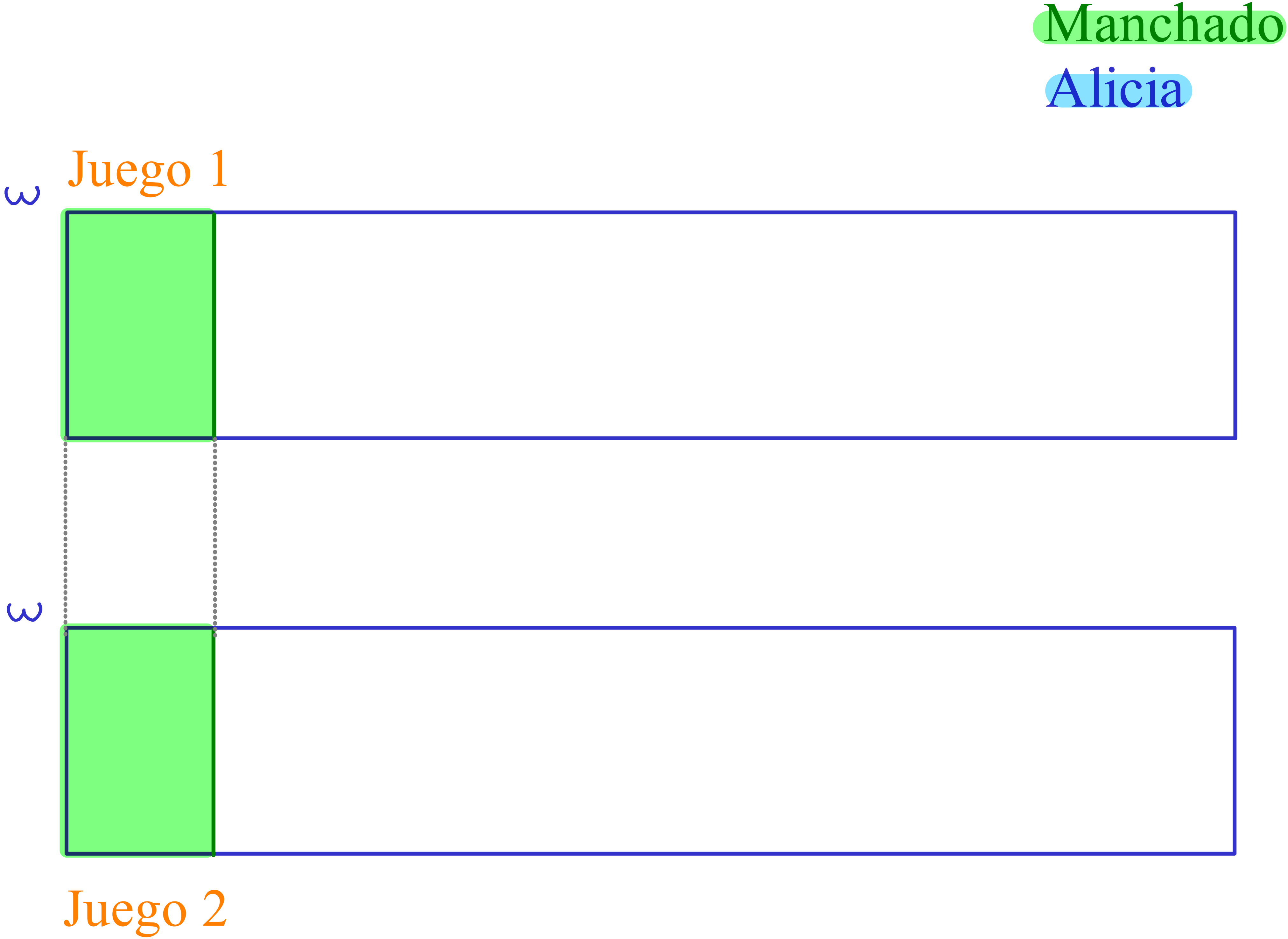
$1 \rightarrow 2$ Tarea

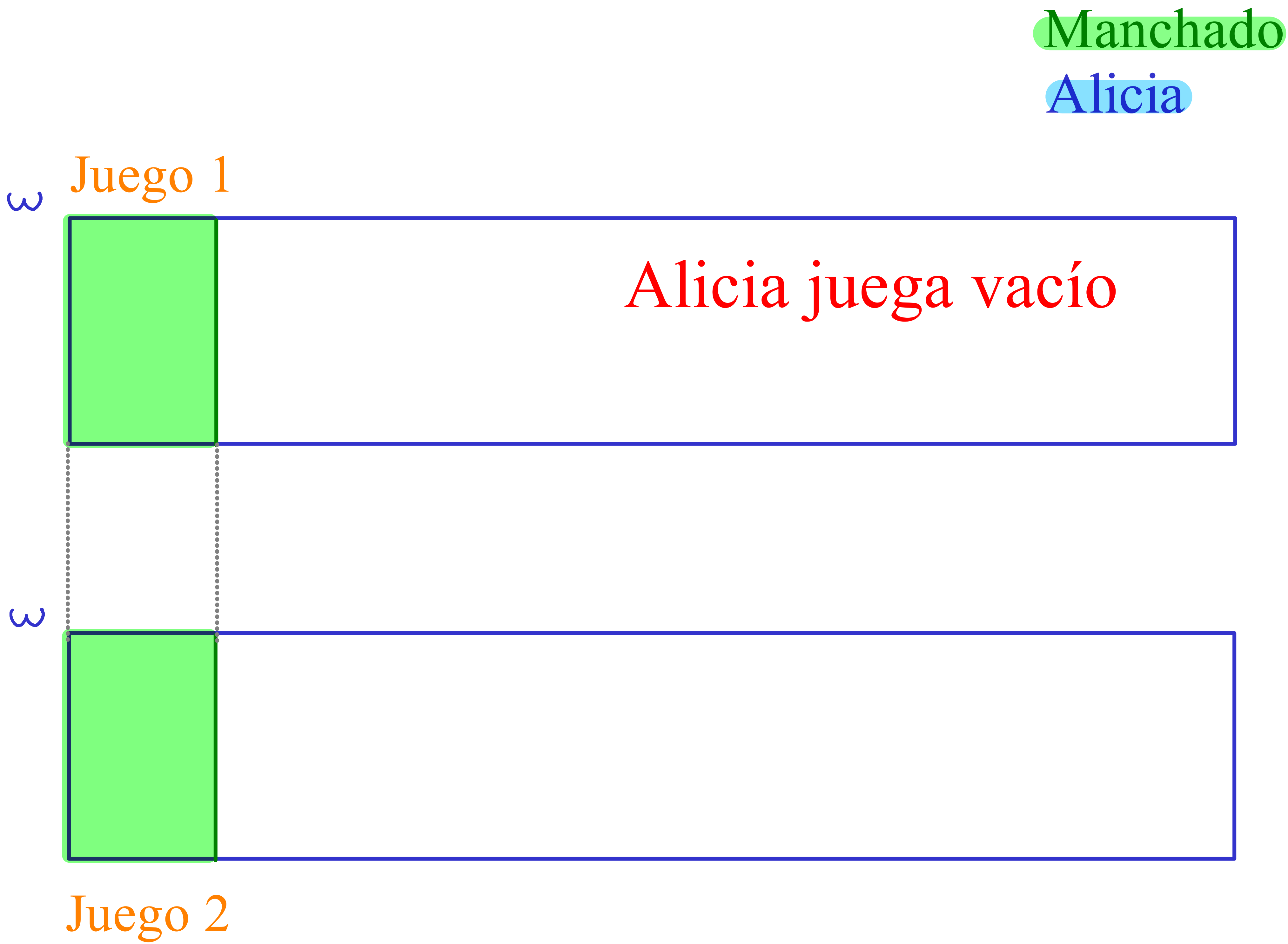
$2 \rightarrow 1$

Supongamos el manchado tiene estrategia ganadora.

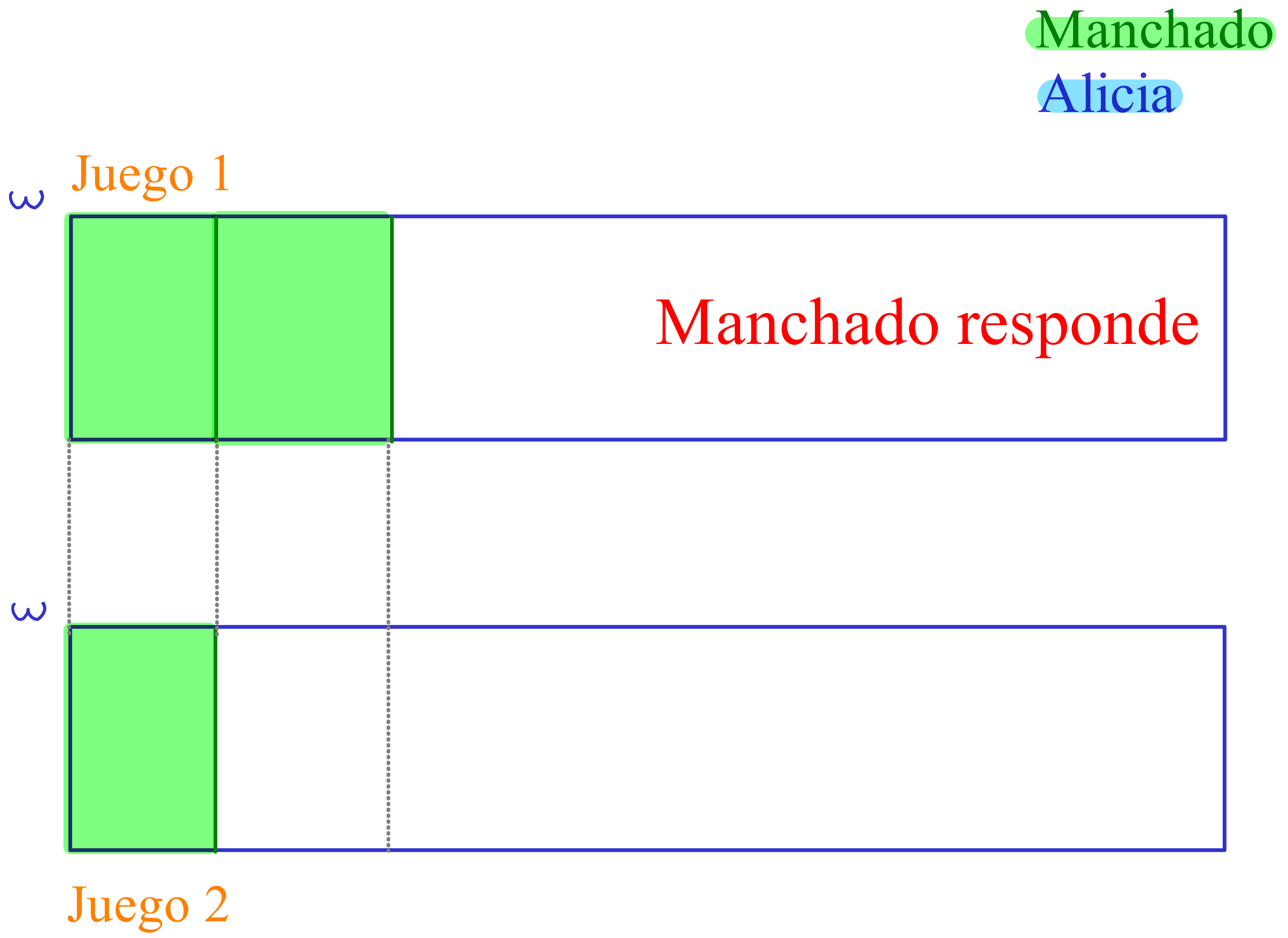
Alicia jugará dos partidas simultaneas. En ambas partidas, el manchado seguirá su estrategia ganadora.

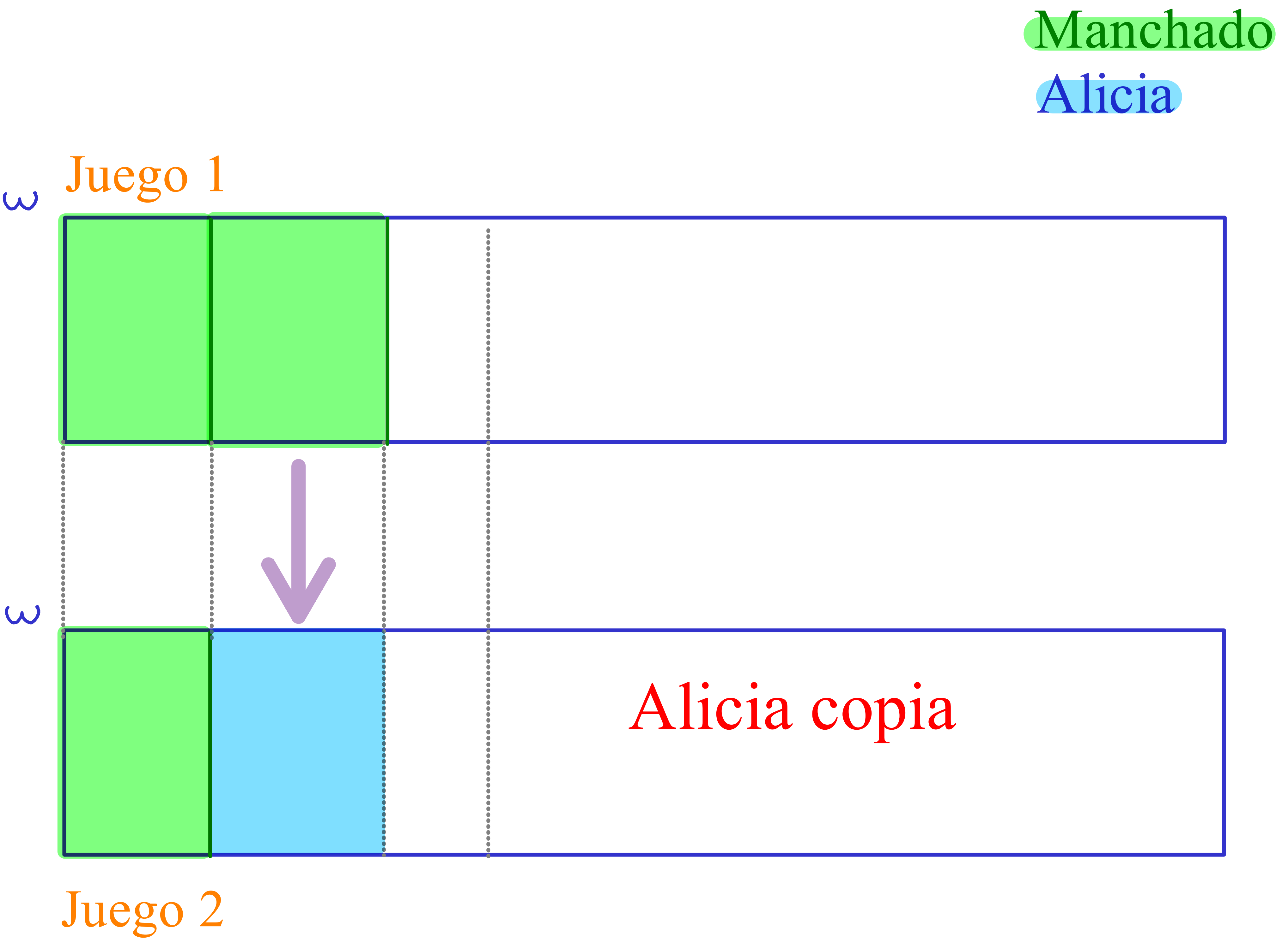
Como el manchado empieza en ambas partidas, su primer jugada es la misma en ambos juegos.

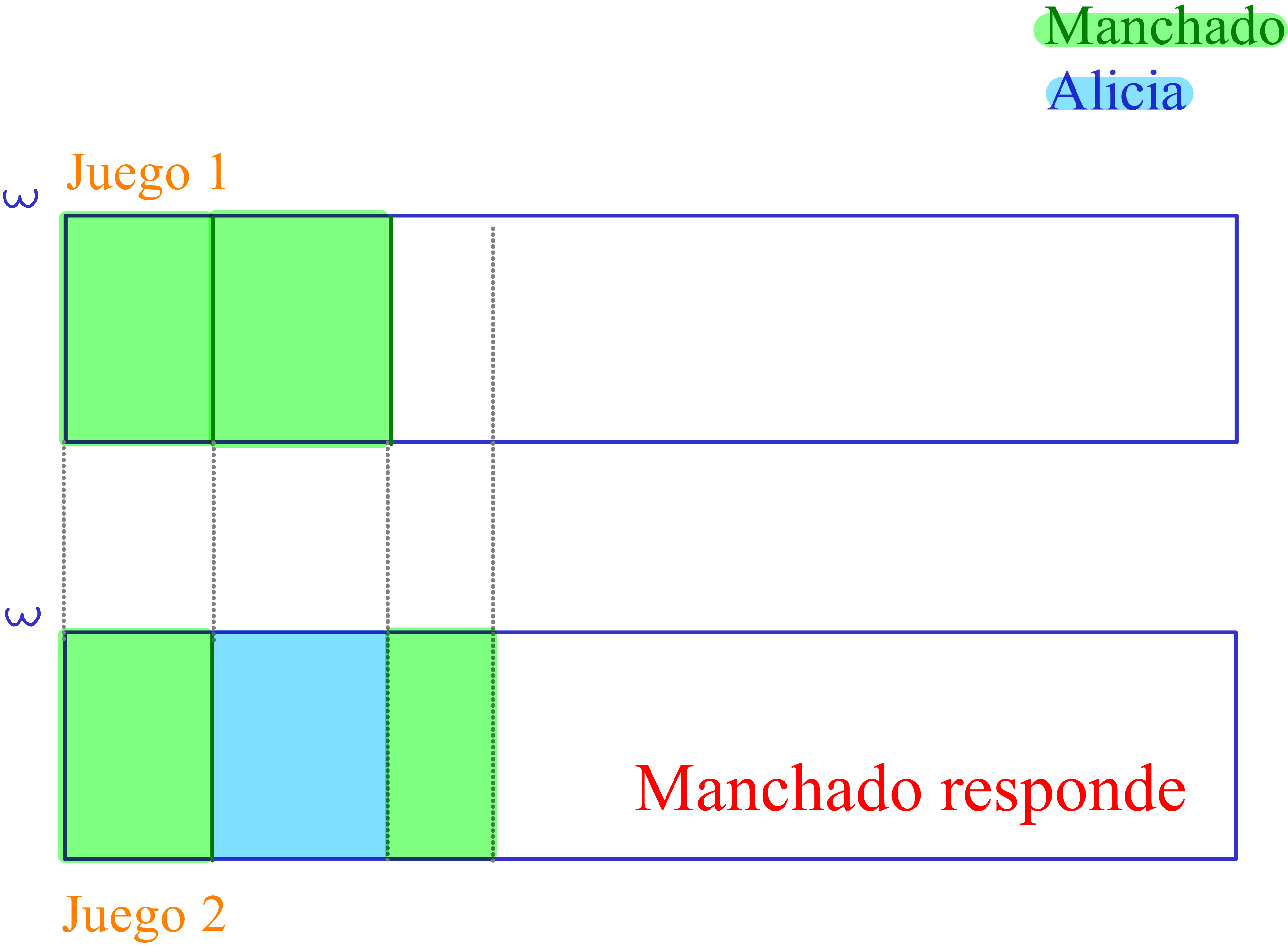

Manchado
Alicia
Juego 1
ω
ω
Juego 2

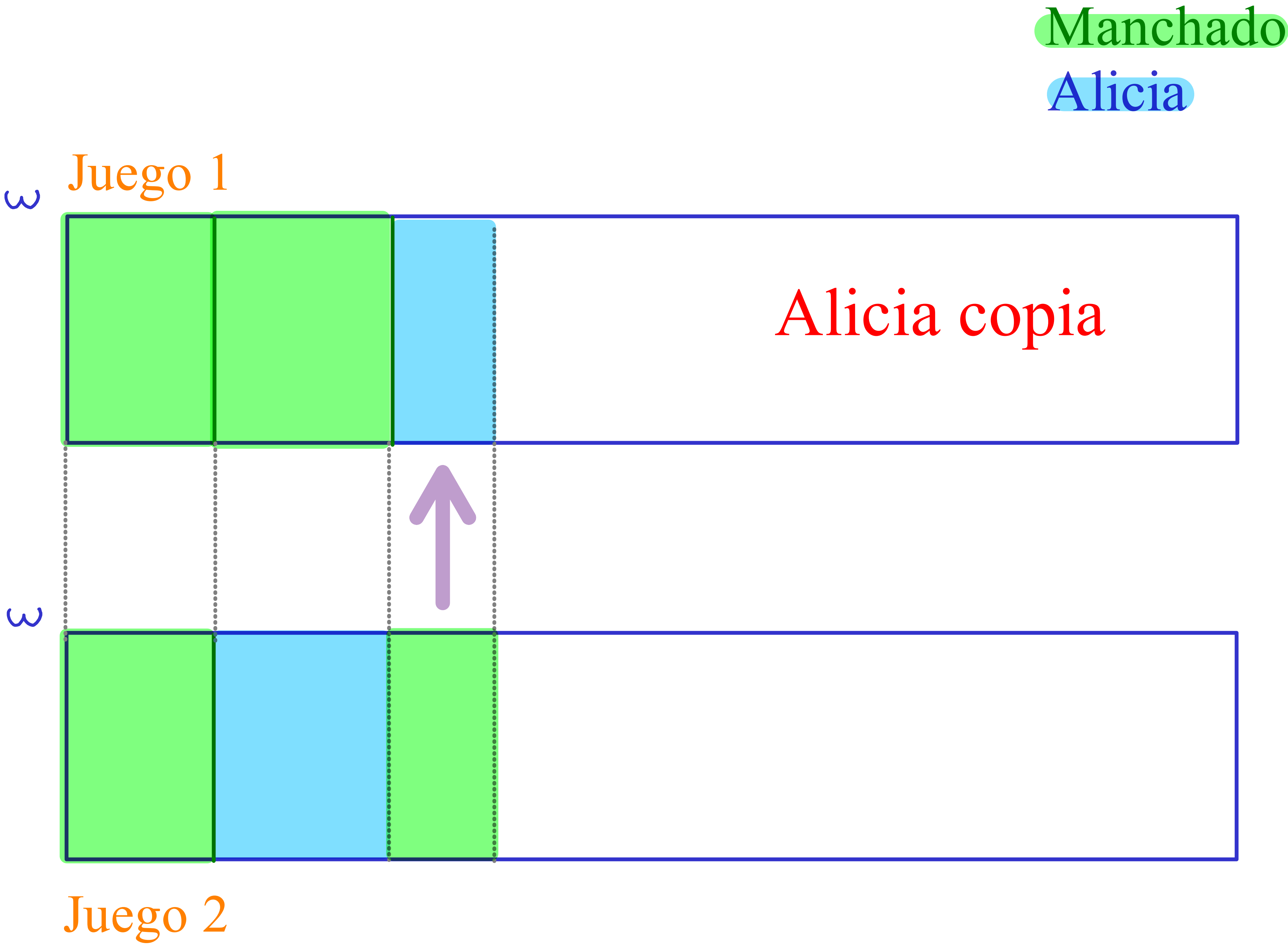


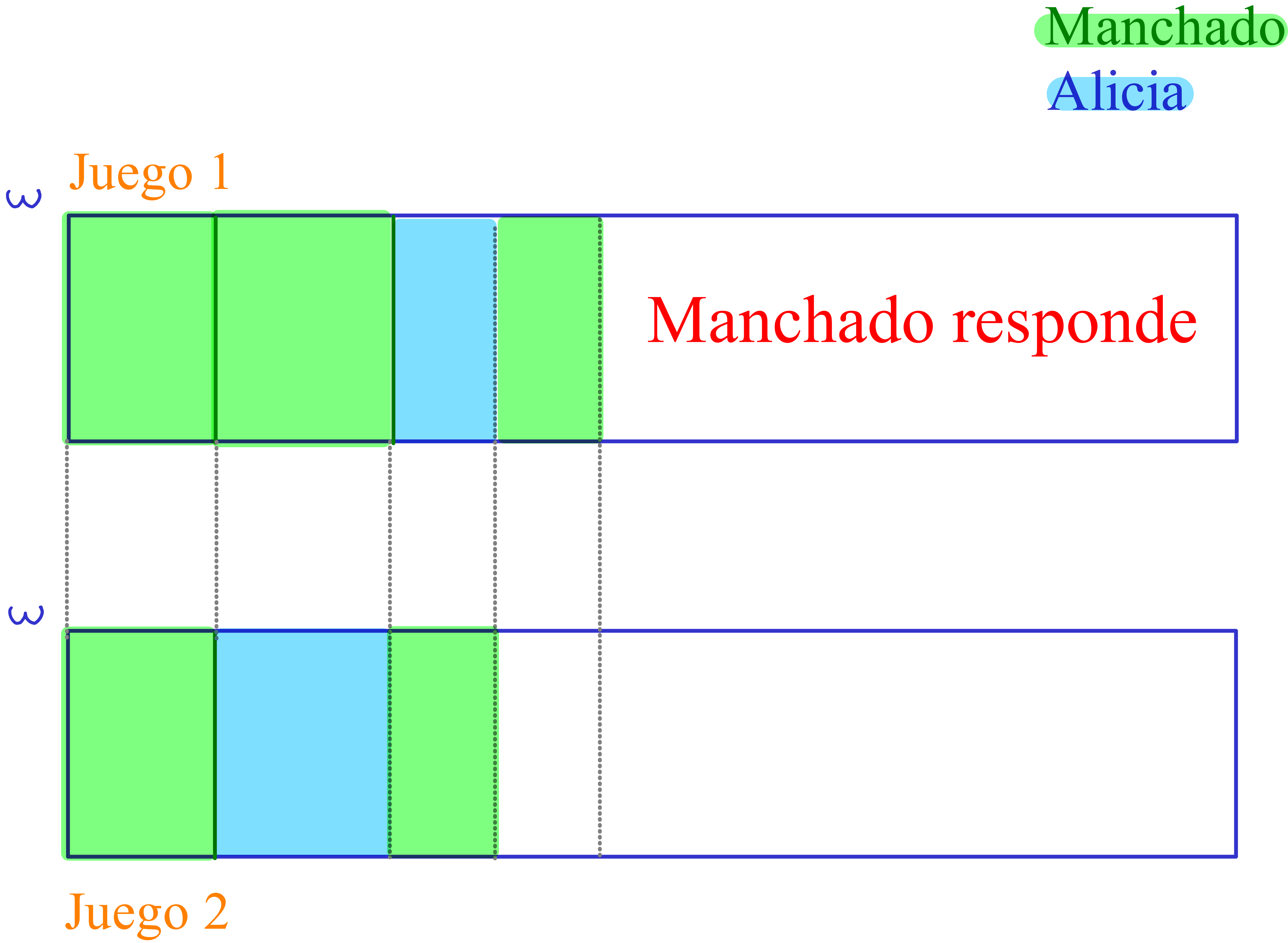
Manchado
Alicia
Juego 1
ω
Alicia juega vacío
ω
Juego 2


Manchado
Alicia
Juego 1
ω
Manchado responde
ω
Juego 2

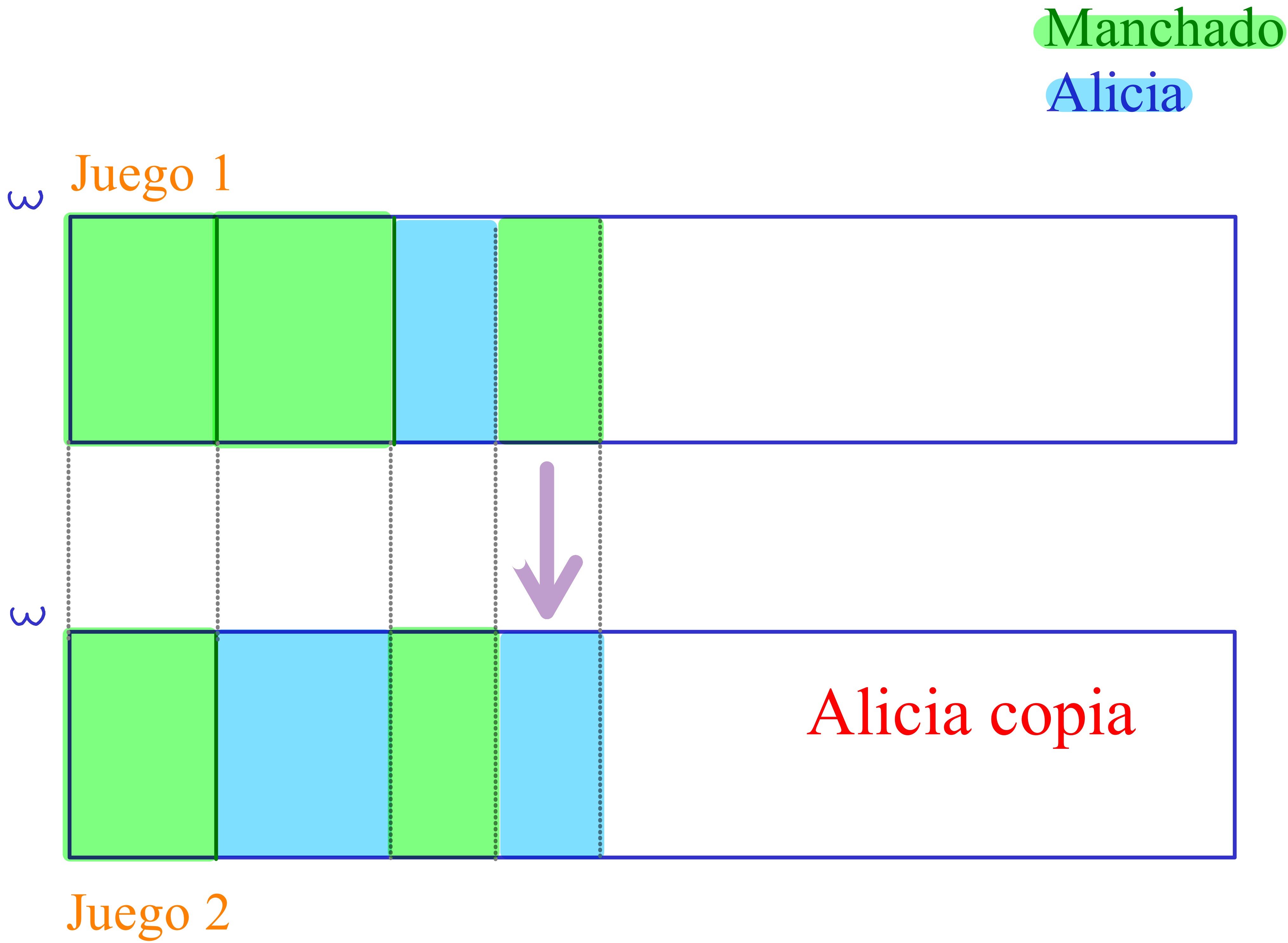

Manchado
Alicia
Juego 1
ω
ω
Alicia copia
Juego 2


Manchado
Alicia
Juego 1
ω
ω
Manchado responde
Juego 2


Manchado
Alicia
Juego 1
ω
Alicia copia
ω
Juego 2

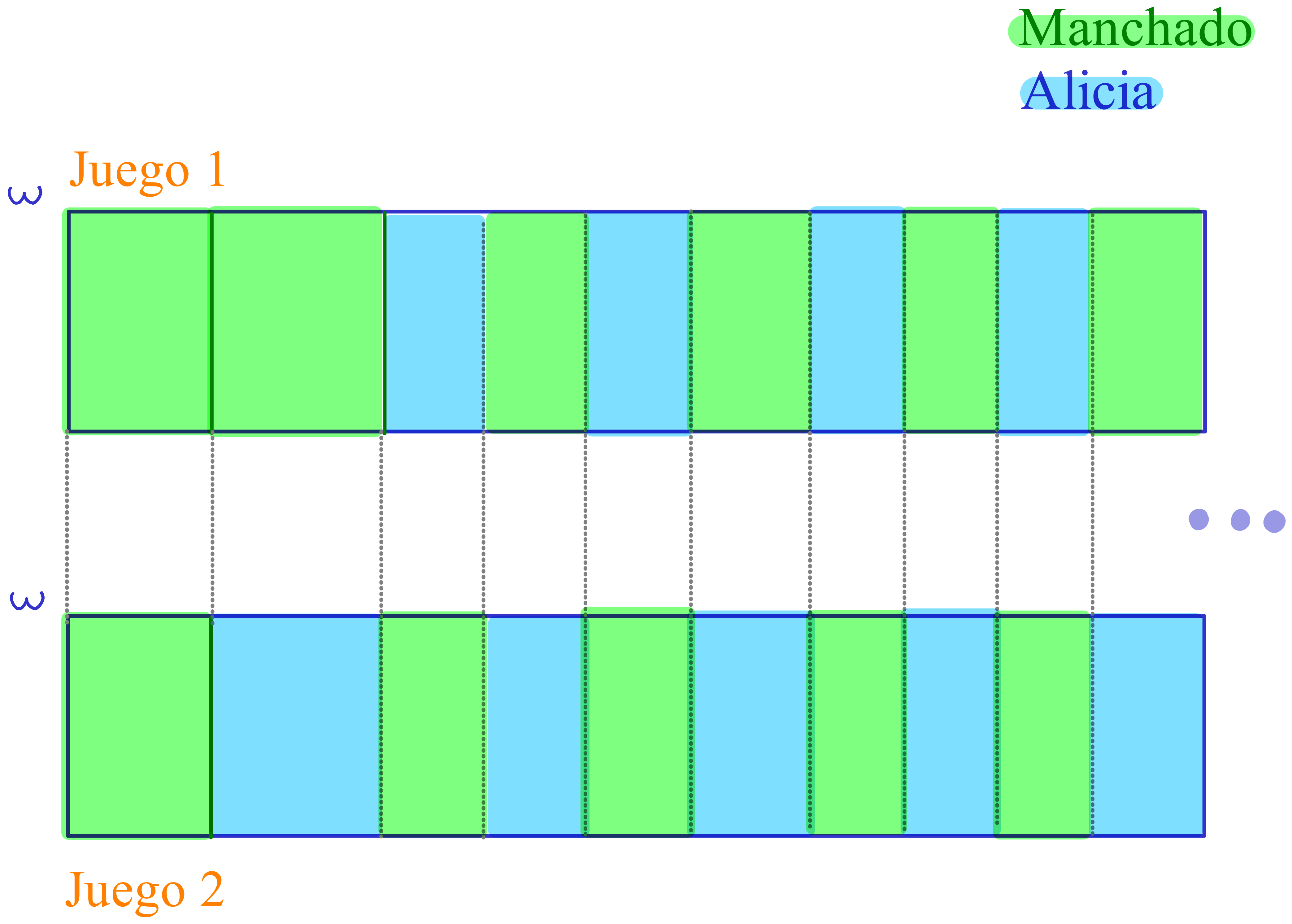


Manchado
Alicia
Juego 1
ω
Manchado responde
ω
Juego 2


Manchado
Alicia
Juego 1
ω
ω
Alicia copia
Juego 2

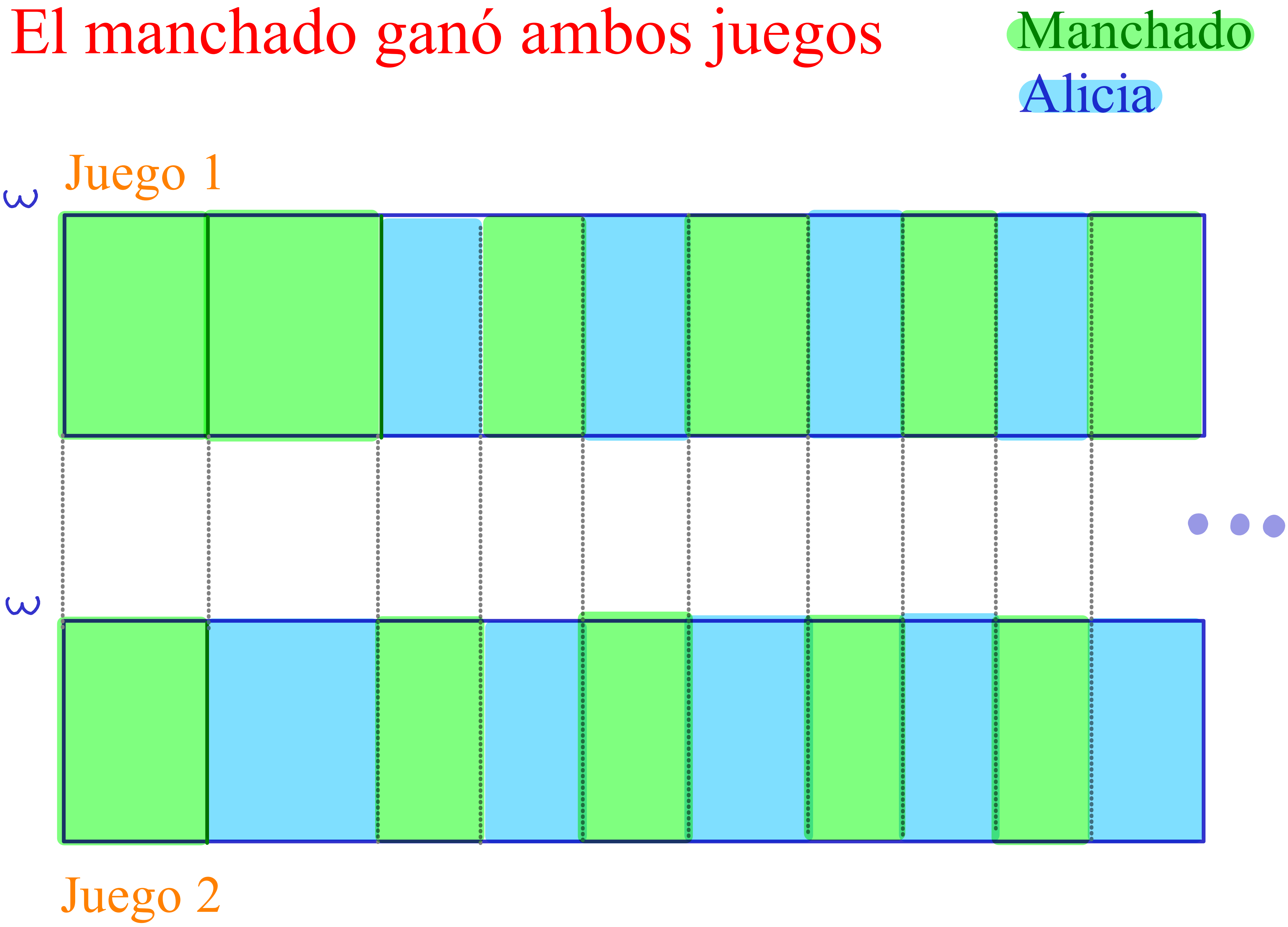
Continuamos de esta manera por una infinidad de pasos.

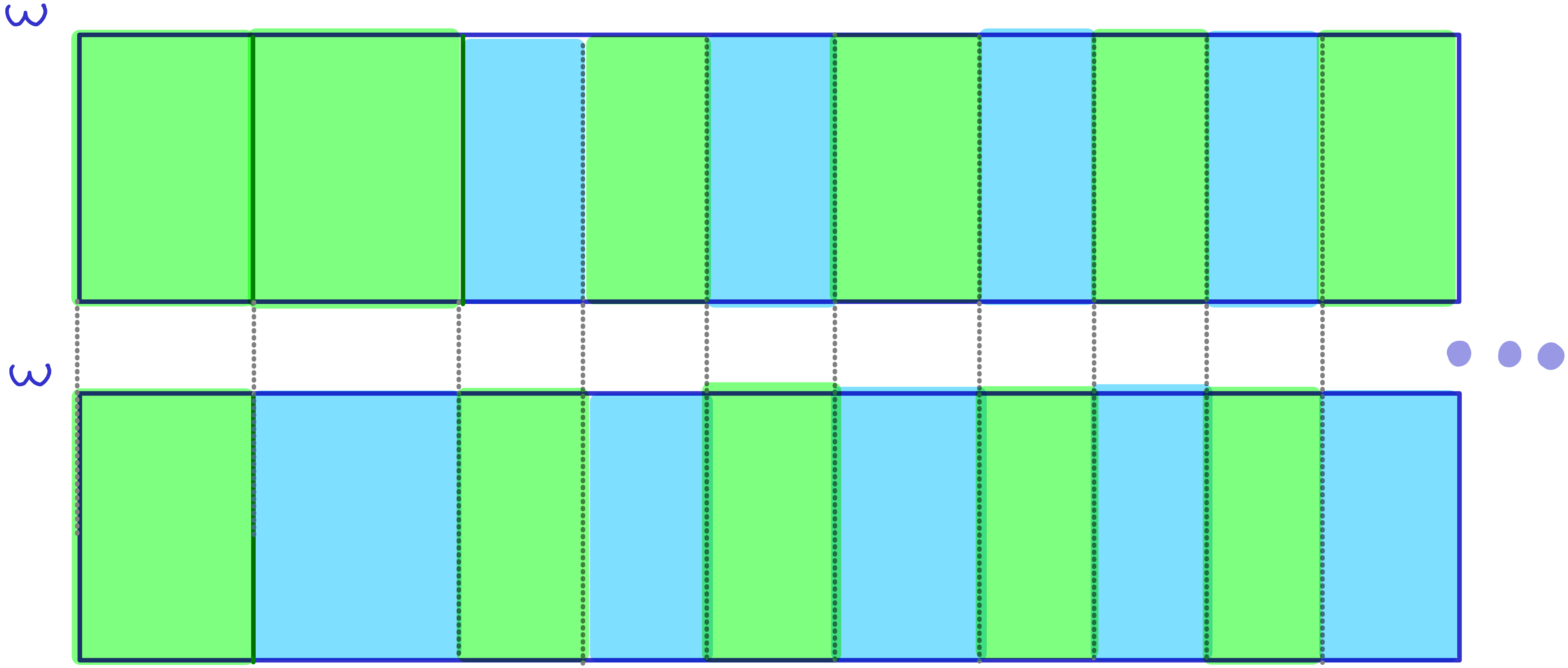
Después de infinitos pasos...



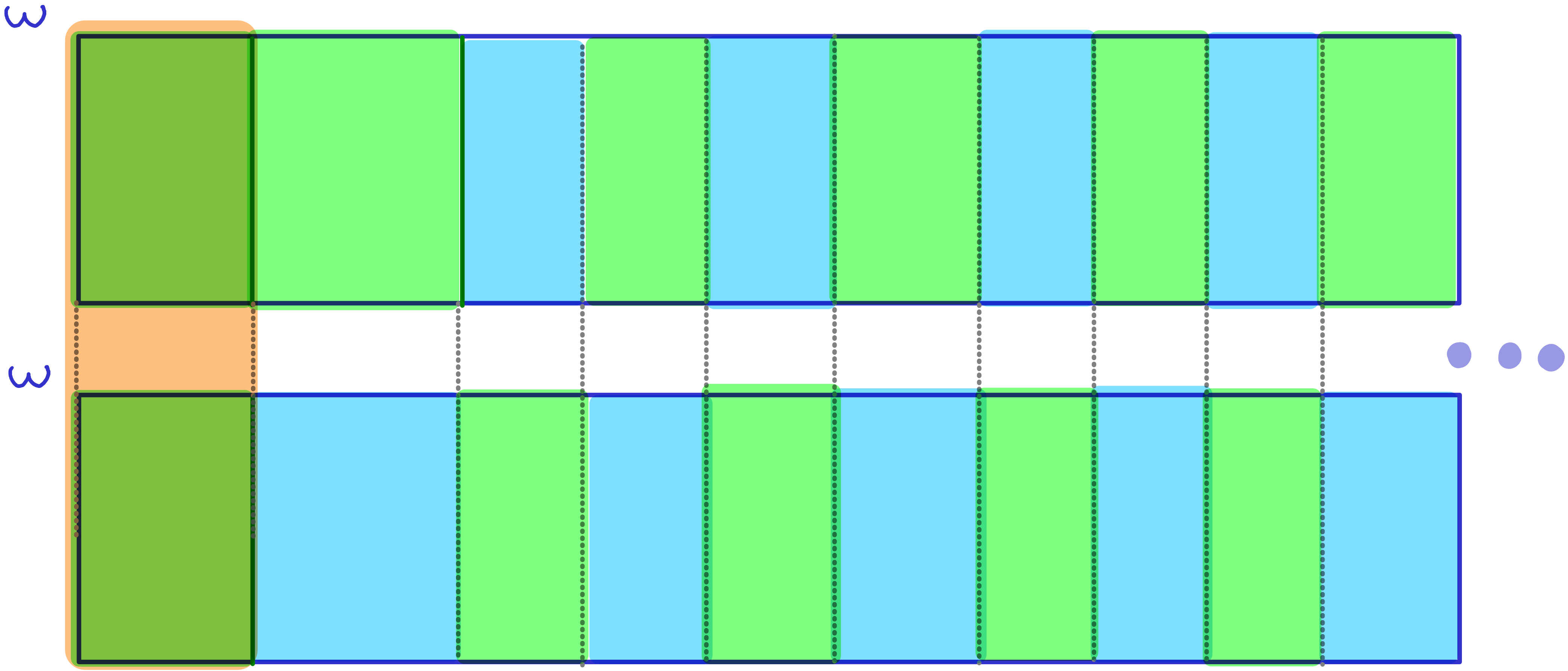
Manchado
Alicia
Juego 1
ω
ω
...
Juego 2

El manchado ganó ambos juegos





De esta manera, en ambos casos el conjunto verde esta en el filtro. Así, la intersección de ambos esta en el filtro.



Pero la intersección es solo la primer barrita, que es finita. Así, el filtro tiene un finito.

Corolario

Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro en ω. Son equivalentes:

1. $\mathcal{U}$ es principal.
2. El manchado tiene estrategia ganadora en el juego del chocolate de $\mathcal{U}$.

Recordemos que si $\mathcal{F}$ es el dual de alguno de los siguientes ideales:

$$\mathrm{fin}(\omega),\ \mathcal{ED},\ \mathcal{ED}_{fin},\ \mathrm{fin}\times\mathrm{fin},\ \mathcal{J}_{\frac{1}{n}},\ \mathcal{Z},\ \mathrm{nwd}(\mathbb{Q})$$

Entonces Alicia tiene estrategia ganadora en el juego del chocolate.

¿Por qué el manchado no puede hacer lo mismo que antes y robarle la estrategia a Alicia?

¿Cuál es la diferencia?

La razón es que (en general) el juego es muy asimétrico.

La razón es que (en general) el juego es muy asimétrico.

El manchado quiere comerse algo en $\mathcal{F}$

La razón es que (en general) el juego es muy asimétrico.

El manchado quiere comerse algo en $\mathcal{F}$

Pero para Alicia, es suficiente comerse algo en $\mathcal{F}^+$

El manchado quiere comerse algo en $\mathcal{F}$

Pero para Alicia, es suficiente comerse algo en $\mathcal{F}^+$

Siempre pasa que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^+$, pero en general $\mathcal{F}^+$ es mucho más grande que $\mathcal{F}$.

De esta manera, el juego es (en general) más sencillo para Alicia. Esta asimetría impide el robo de estrategias.

Sin embargo, si $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{+}$. En este caso el mismo argumento que antes prueba que el manchado podría robarle su estrategia a Alicia.

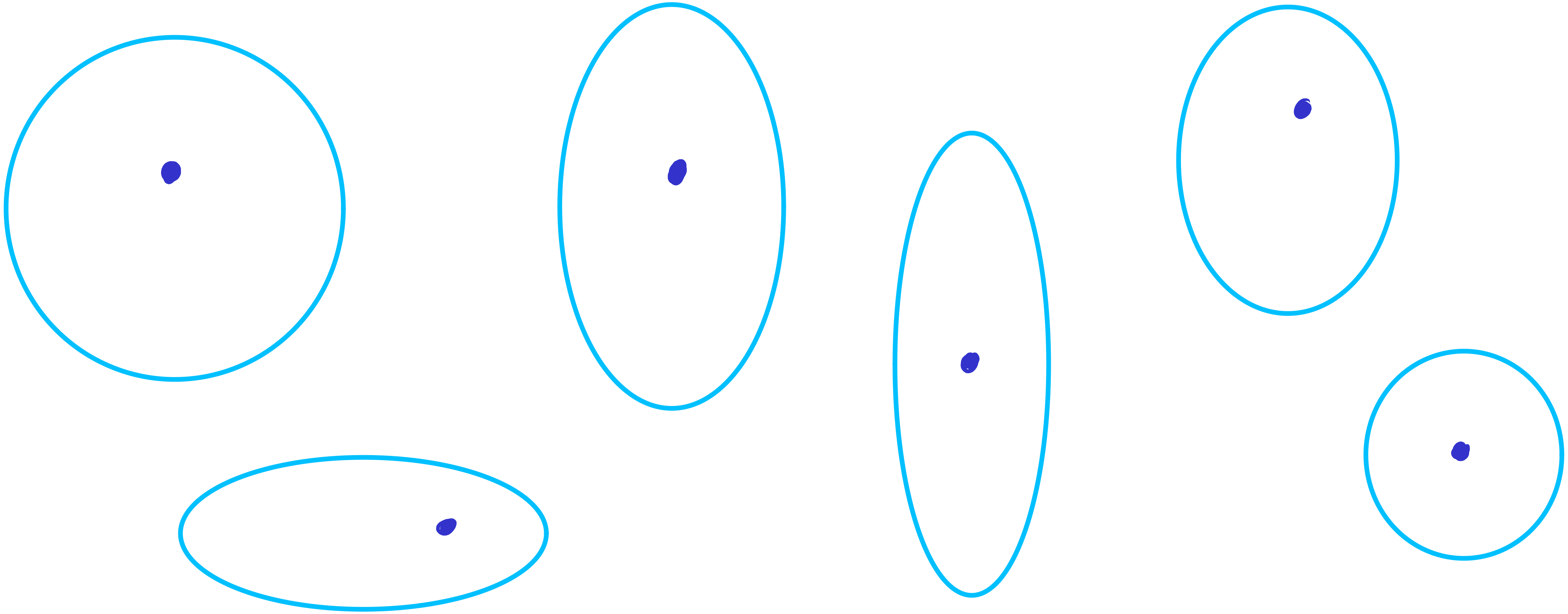
Teorema

Si $\mathcal{U}$ es ultrafiltro no principal, entonces ninguno de los jugadores tiene estrategia ganadora.

Dos eternos rivales legendarios

Axioma de Elección (AC)

Para toda familia de conjuntos no vacíos, podemos escojer un elemento de cada conjunto en la familia



Axioma de Determinación (AD)

Todo juego entre dos jugadores de longitud numerable en donde los jugadores van tirando naturales esta determinado. Es decir, uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora.

En el juego del chocolate los jugadores no tiraban naturales, sino conjuntos finitos. Sin embargo como podemos codificar los finitos con naturales, la conclusión del Axioma de Determinación aplica.

Axioma de Elección $\longrightarrow$ Existen ultrafiltros no principales en ω

Axioma de Determinación $\longrightarrow$ No existen ultrafiltros no principales ω

De esta manera, se necesita algo del Axioma de Elección para construir ultrafiltros no principales. Por lo que, no se pueda dar una definición explicita u obtenerlos de manera constructiva.

Pero la situación es todavia peor (o mejor, dependiendo de sus gustos)...

La clase $L(\mathbb{R})$ es, intuitivamente, la clase que tiene a todos los reales y todo lo que podemos definir con ellos.

Es consistente que el Axioma de Determinación es cierto en $L(\mathbb{R})$, de manera que no podemos definir ultrafiltros ni si quiera ayudandonos con los números reales.