Ultrafiltros en las Matemáticas

Osvaldo Guzmán

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM

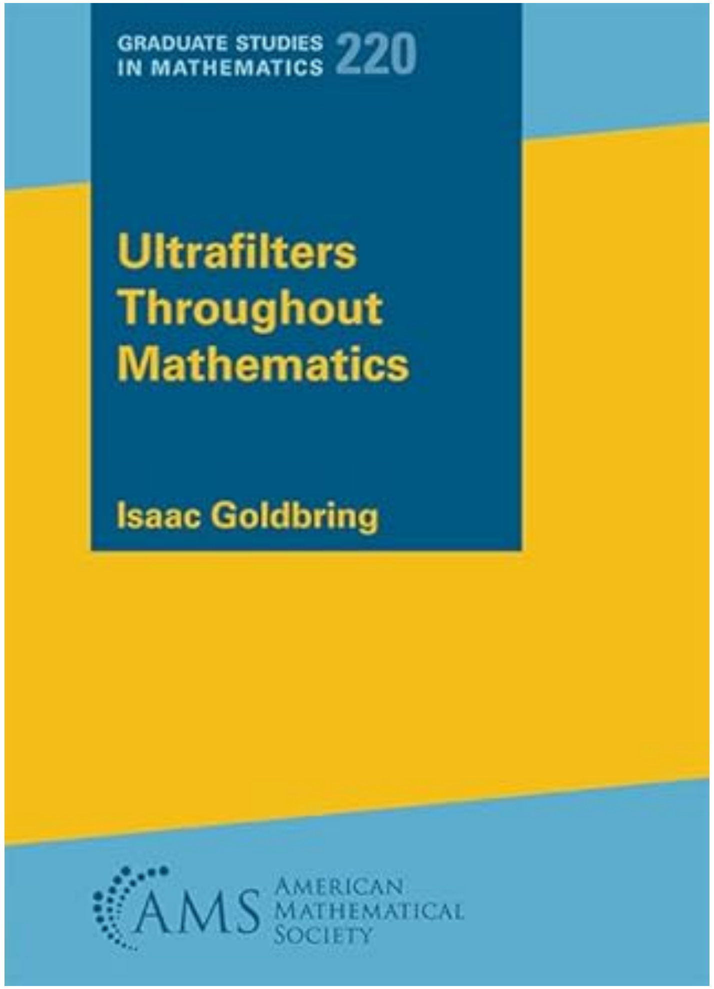
Parte I: Introducción y propiedades principales

XXIII
ESCUELA DE VERANO
EN MATEMÁTICAS

CENTRO DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS

Los filtros, ideales y ultrafiltros son de los conceptos más usados y útiles en la combinatoria infinita. También son fundamentales en la topología general y teoría de modelos.

Si estos temas les interesan, pueden consultar el excelente libro:



Ultrafilters Throughout Mathematics

Isaac Goldbring

Los filtros son dispositivos o mecanismos diseñados para seleccionar, modificar o bloquear el paso de ciertos elementos a través de ellos.

Notación

Sea X un conjunto.
Por $\mathcal{P}(X)$ denotamos el *conjunto potencia de X*.
Es decir, la colección de todos los subconjuntos de X.

Dado $A \subseteq X$, definimos $A^c = X \setminus A$ (el complemento de A en X).

Ahora daremos la definición de filtro en un conjunto X. Intuitivamente un filtro es una "medida" en los subconjuntos de X. Un filtro nos dara una noción de cuando un subconjunto es grande, pequeño o mediano.

Ahora daremos la definición de filtro en un conjunto X. Intuitivamente un filtro induce una "medida" en los subconjuntos de X. Un filtro nos dara una noción de cuando un subconjunto es grande, pequeño o mediano.

Un filtro es una colección de subconjuntos de X. La idea es que piensen al filtro como una colección de subconjuntos "grandotes" de X, según cierta noción de tamaño.

Definición (filtro)

Sea X un conjunto. Decimos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *es un filtro en* X si:

Definición (filtro)

Sea X un conjunto. Decimos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *es un filtro en* X si:

1. $X \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

El total es grande y el vacío es pequeño

Definición (filtro)

Sea X un conjunto. Decimos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *es un filtro en* X si:

1. $X \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Si A es grande y B lo contiene, entonces B también es grande.

Definición (filtro)

Sea X un conjunto. Decimos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *es un filtro en* X si:

1. $X \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.
3. Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Intersección de dos conjuntos grandes es grande

Definición (filtro)

Sea X un conjunto. Decimos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *es un filtro en* X si:

1. $X \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.
3. Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.


Tú no necesitas
FILTROS
#ÁlbumDeNuestrosSelfiesFavoritos
mr. wonderful*

Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Tenemos la siguiente clasificación de los subconjuntos de X :

1. $\mathcal{F}$

   La colección de los subconjuntos grandes.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Tenemos la siguiente clasificación de los subconjuntos de X :

1. $\mathcal{F}$

   La colección de los subconjuntos grandes.

2. $\mathcal{F}^* = \{A^c \mid A \in \mathcal{F}\}$

   La colección de los subconjuntos pequeños.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Tenemos la siguiente clasificación de los subconjuntos de X :

1. $\mathcal{F}$

   La colección de los subconjuntos grandes.

2. $\mathcal{F}^* = \{A^c \mid A \in \mathcal{F}\}$

   La colección de los subconjuntos pequeños.

3. $\mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{F} \cup \mathcal{F}^*$

   La colección de los subconjuntos medianos.

Los ideales son duales a los filtros. Mientras un filtro es una colección de subconjuntos grandes, los ideales son colecciones de conjuntos pequeños.

Definición (Ideal)

Sea X un conjunto. $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *es un ideal sobre* X si:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$ y $X \notin \mathcal{I}$.

El vacío es pequeño y el total no

Definición (Ideal)

Sea X un conjunto. $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *es un ideal sobre* X si:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$ y $X \notin \mathcal{I}$.
2. Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{I}$.

Si A es pequeño y contiene a B, entonces B es pequeño

Definición (Ideal)

Sea X un conjunto. $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *es un ideal sobre* X si:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$ y $X \notin \mathcal{I}$.
2. Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{I}$.
3. Si $A, B \in \mathcal{I}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.

Si A y B son pequeños, su unión también lo es

Definición (Ideal)

Sea X un conjunto. $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *es un ideal sobre* X si:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$ y $X \notin \mathcal{I}$.
2. Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{I}$.
3. Si $A, B \in \mathcal{I}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.

Tarea

Sea $\mathcal{F}$ un filtro e $\mathcal{I}$ un ideal.

1. $\mathcal{F}^* = \{A^c \mid A \in \mathcal{F}\}$ es un ideal.

   Se le conoce como el *ideal dual de* $\mathcal{F}$.

2. $\mathcal{I}^* = \{A^c \mid A \in \mathcal{I}\}$ es un filtro.

   Se le conoce como el *filtro dual de* $\cancel{\mathcal{F}}$. $\mathcal{I}$

3. $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}$ y $\mathcal{I}^{**} = \mathcal{I}$.

Definición (Positivos para un filtro)

Sea $\mathcal{F}$ un filtro. Definimos $\mathcal{F}^+$ como la colección de todos los $A \subseteq X$ tales que $A \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

$$\mathcal{F}^+ = \{A \subseteq X \mid \forall F \in \mathcal{F}(A \cap F \neq \emptyset)\}$$

Definición (Positivos para un ideal)

Sea $\mathcal{I}$ un ideal. Definimos:

$$\mathcal{I}^+ = (\mathcal{I}^*)^+$$

Tarea

Sea $\mathcal{F}$ un filtro e $\mathcal{I}$ un ideal.

1. $\mathcal{F}^{+} = \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{F}^{*}$.

   Es decir, $\mathcal{F}^{+}$ es la colección de los “no pequeños”.

2. $\mathcal{I}^{+} = \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{I}$.

   De nuevo, $\mathcal{I}^{+}$ son los “no pequeños”.

3. $(\mathcal{I}^{*})^{+} = \mathcal{I}^{+}$ y $(\mathcal{F}^{*})^{+} = \mathcal{F}^{+}$.

4. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{+}$.

Notación

Denotamos el conjunto de los números naturales como $\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Ejemplos de filtros e ideales

Sea X un conjunto. Por $\mathrm{fin}(X)$ denotamos los subconjuntos finitos de X. Si X es infinito, entonces $\mathrm{fin}(X)$ es un ideal.

Escribiremos fin en vez de $\mathrm{fin}(\omega)$.

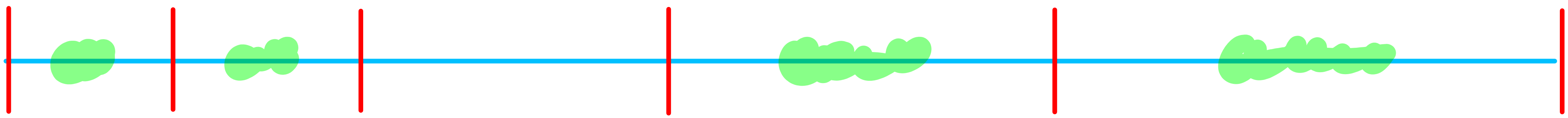
Si X es no numerable, la colección de los subconjuntos a lo más numerables de X es un ideal.

El *ideal sumable* se define como:

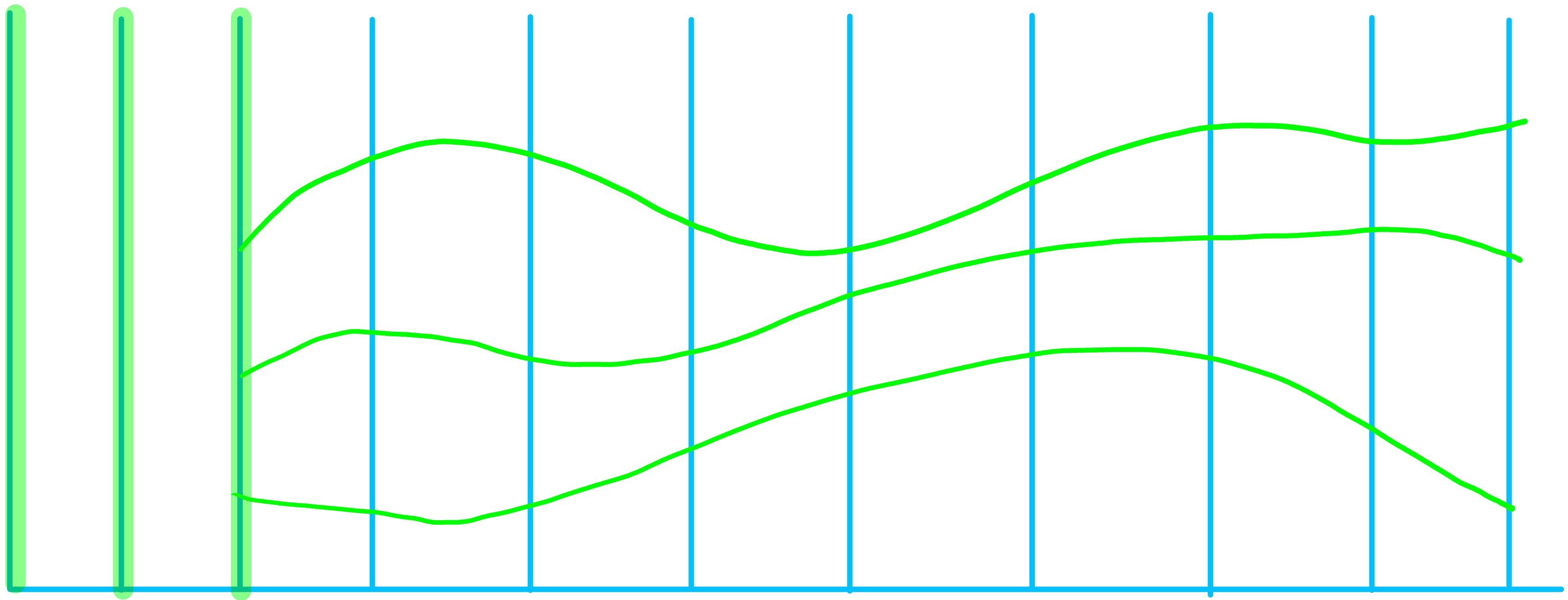
$$\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} = \{A \subseteq \omega \mid \sum_{n \in A} \frac{1}{n+1} < \infty\}$$

Dado $n \in \omega$, definamos $R_n = [2^n, 2^{n+1})$. El *ideal de densidad cero* se define como:

$$\mathcal{Z} = \{A \subseteq \omega \mid \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap R_n|}{2^n} = 0\}$$



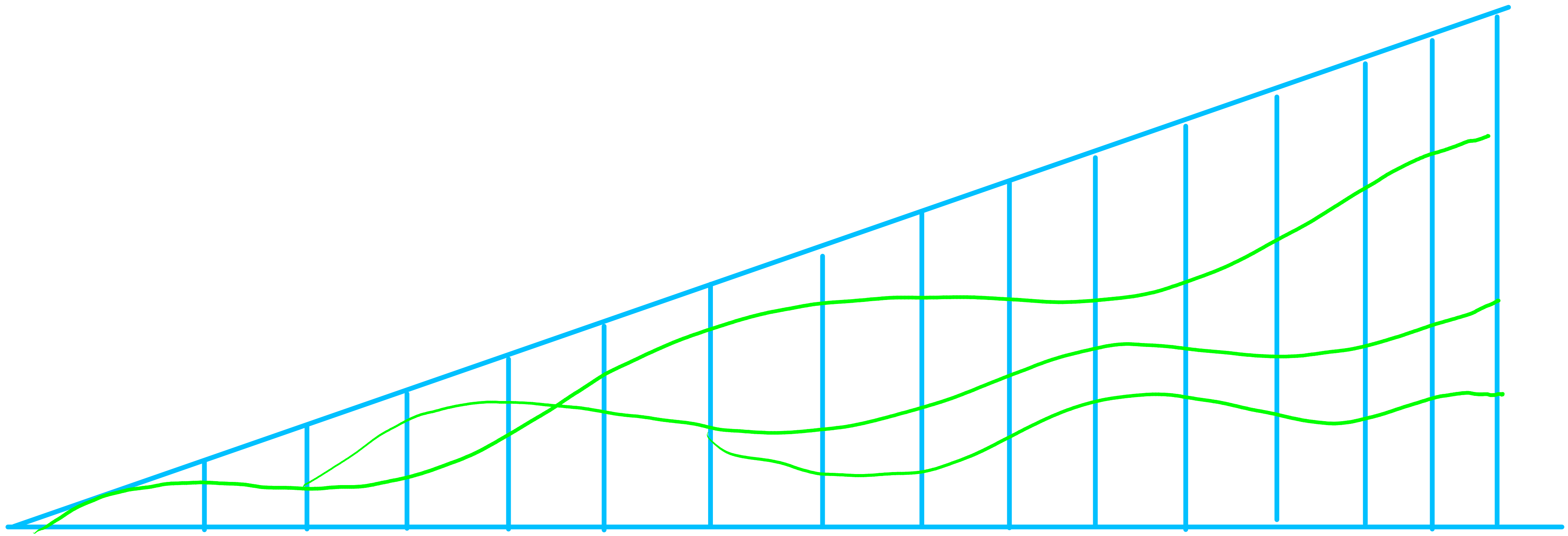
$\mathcal{ED}$ es el ideal en $\omega \times \omega$ que consiste de los $A \subseteq \omega^2$ que pueden cubrirse con una cantidad finita de columnas y gráficas de funciones de ω en ω.



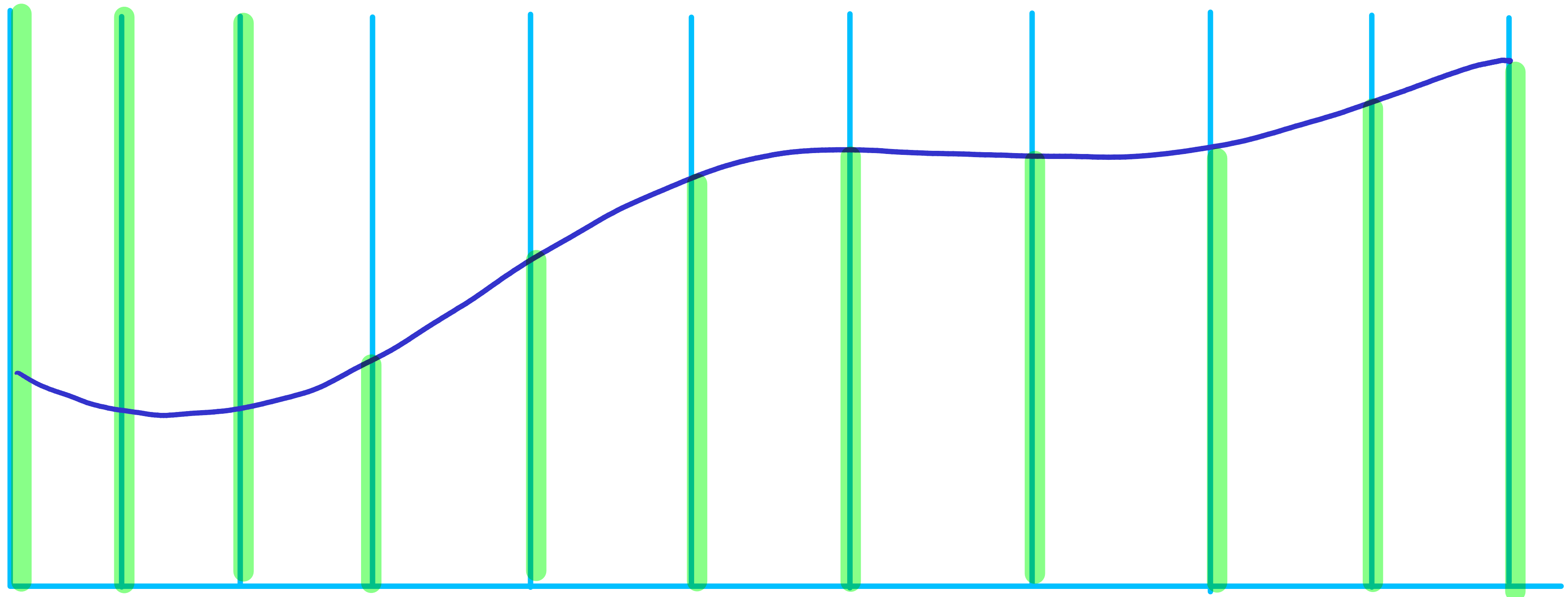
Sea $\triangle = \{(n,m) \mid m \leq n\}$.

El ideal $\mathcal{ED}_{fin}$ es la restricción de $\mathcal{ED}$ a $\triangle$.

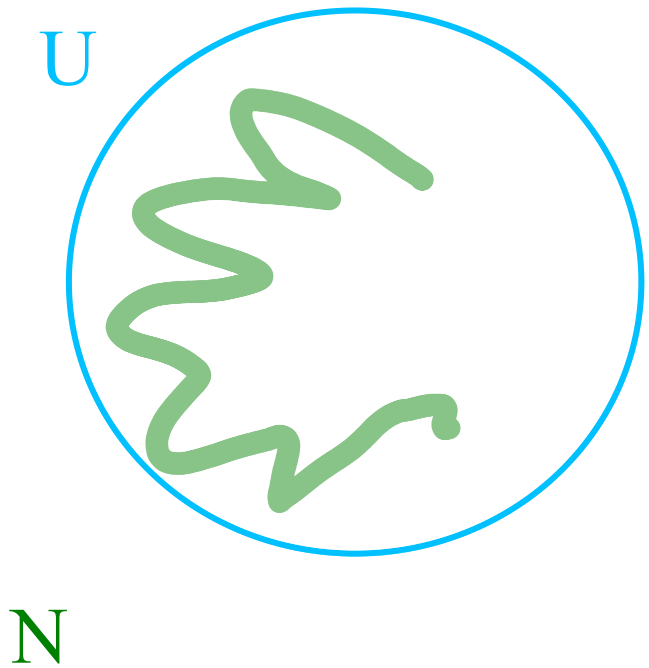
$\mathcal{ED}_{fin} = \{A \subseteq \triangle \mid A \in \mathcal{ED}\}$

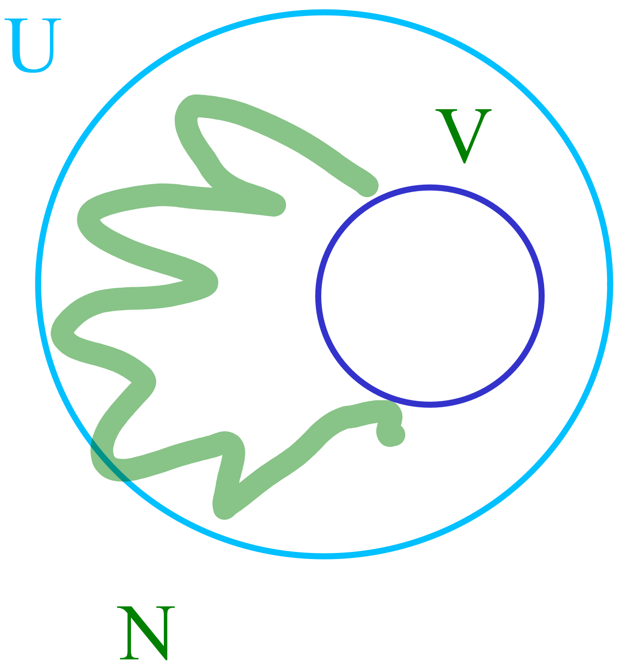


fin$\times$fin es el ideal en $\omega \times \omega$ que consiste de los $A \subseteq \omega^2$ que pueden cubrirse con una cantidad finita de columnas y lo que este por debajo de una función de ω en ω.



Sea X un espacio topológico y $N \subseteq X$. Decimos que N es *nunca denso* si para todo $\emptyset \neq U \subseteq X$ abierto existe $\emptyset \neq V \subseteq U$ tal que $N \cap V = \emptyset$.





Sea X un espacio topológico y $N \subseteq X$. Decimos que N es *nunca denso* si para todo $\emptyset \neq U \subseteq X$ abierto existe $\emptyset \neq V \subseteq U$ tal que $N \cap V = \emptyset$.

Por nwd(X) denotamos los nunca densos de X. Tenemos que nwd(X) es un ideal.

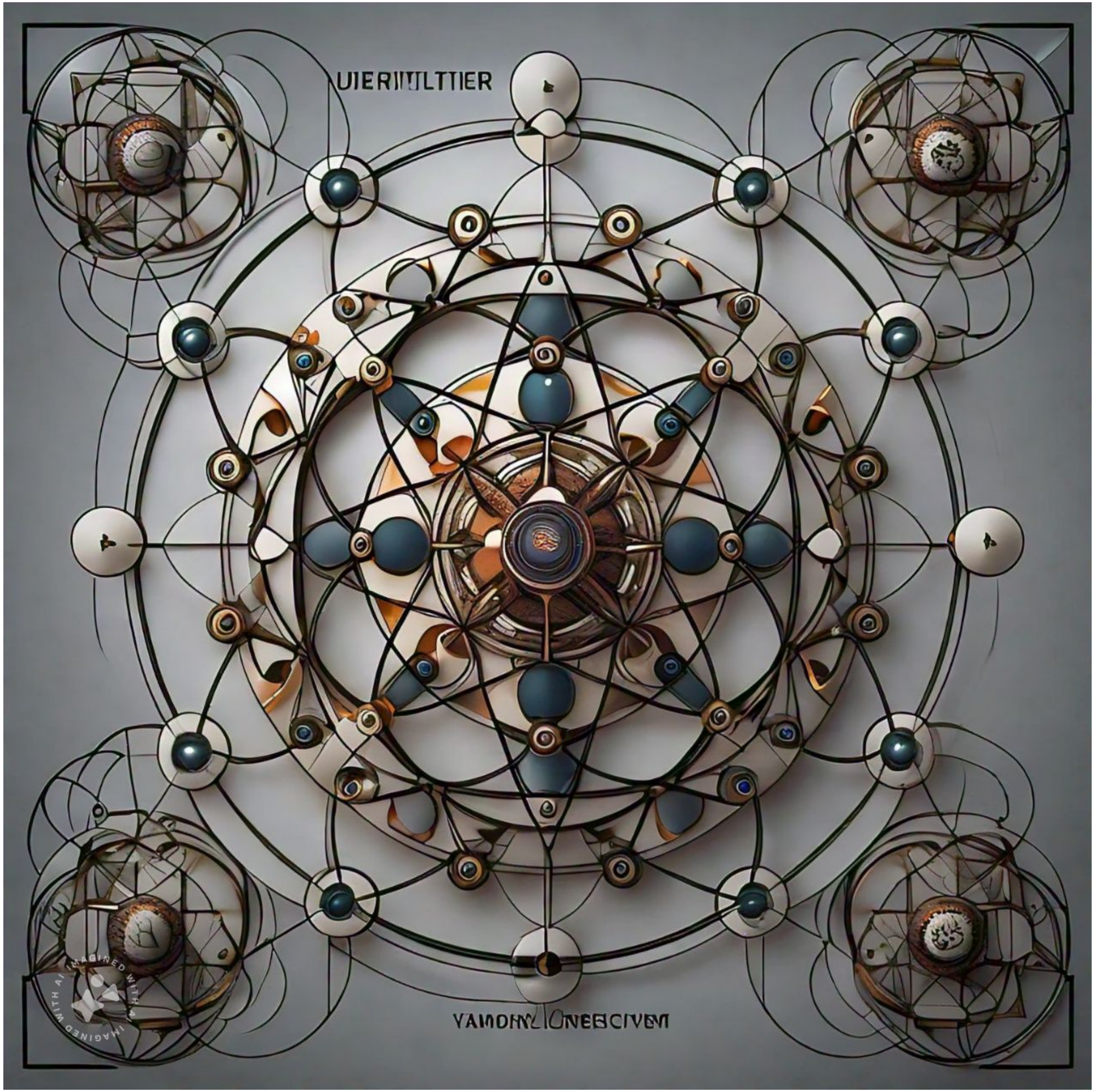
Tarea

1. Demostrar que los ejemplos anteriores son ideales.
2. Para cada ideal $\mathcal{I}$ de los ejemplos anteriores, describir $\mathcal{I}^{+}$ e $\mathcal{I}^{*}$.

Definición (ultrafiltro)

Sea $\mathcal{U}$ un filtro en X. Decimos que $\mathcal{U}$ es *ultrafiltro* si:

Para cada $A \subseteq X$, se tiene que $A \in \mathcal{U}$ o $A^c \in \mathcal{U}$.


IMAGINED WITH AI

Si $\mathcal{F}$ es filtro, no se puede que $A \in \mathcal{F}$ y $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$.
Es decir, a lo más pasa una de las siguientes:

$$A \in \mathcal{F} \qquad\qquad A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$$

Si $\mathcal{F}$ es filtro, no se puede que $A \in \mathcal{F}$ y $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$.
Es decir, a lo más pasa una de las siguientes:

$$A \in \mathcal{F} \qquad\qquad A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$$

En un ultrafiltro, pasa exactamente una
(para cada $A \subseteq X$).

Es decir, en toda partición de X en dos pedazos, el ultrafiltro se escoje uno de los pedazos.

Para un ultrafiltro, si un conjunto no es grande, entonces su complemento es grande.

Tarea

1. Demostrar que los filtros duales de

   fin, $\mathcal{J}_{\frac{1}{n}}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{ED}$, $\mathcal{ED}_{fin}$ y fin×fin

   NO son ultrafiltros.

2. Sea X Hausdorff con más de un punto.

   Demostrar que nwd$(X)^*$ *NO* es ultrafiltro.

3. ¿Existe un conjunto X tal que $\mathrm{fin}(X)^*$ es ultrafiltro?

4. Sea X un conjunto y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con $\emptyset \notin \mathcal{U}$ tal que para todos $A_0, A_1, A_2 \subseteq X$ ajenos con $X = A_0 \cup A_1 \cup A_2$ existe un único $i < 3$ tal que $A_i \in \mathcal{U}$. Demuestra que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro.

5. Si $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{U}^+$.

Teorema (Equivalencias de ultrafiltros)

Sea X un conjunto y $\mathcal{U}$ filtro en X. Son equivalentes:

1. $\mathcal{U}$ es ultrafiltro.
2. Para cada $A \subseteq X$, si $A \in \mathcal{U}$ y $A = B \cup C$, entonces $B \in \mathcal{U}$ o $C \in \mathcal{U}$.
3. $\mathcal{U}$ es un *filtro maximal:* Si $\mathcal{F}$ es filtro en X y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

¿Existen los ultrafiltros?

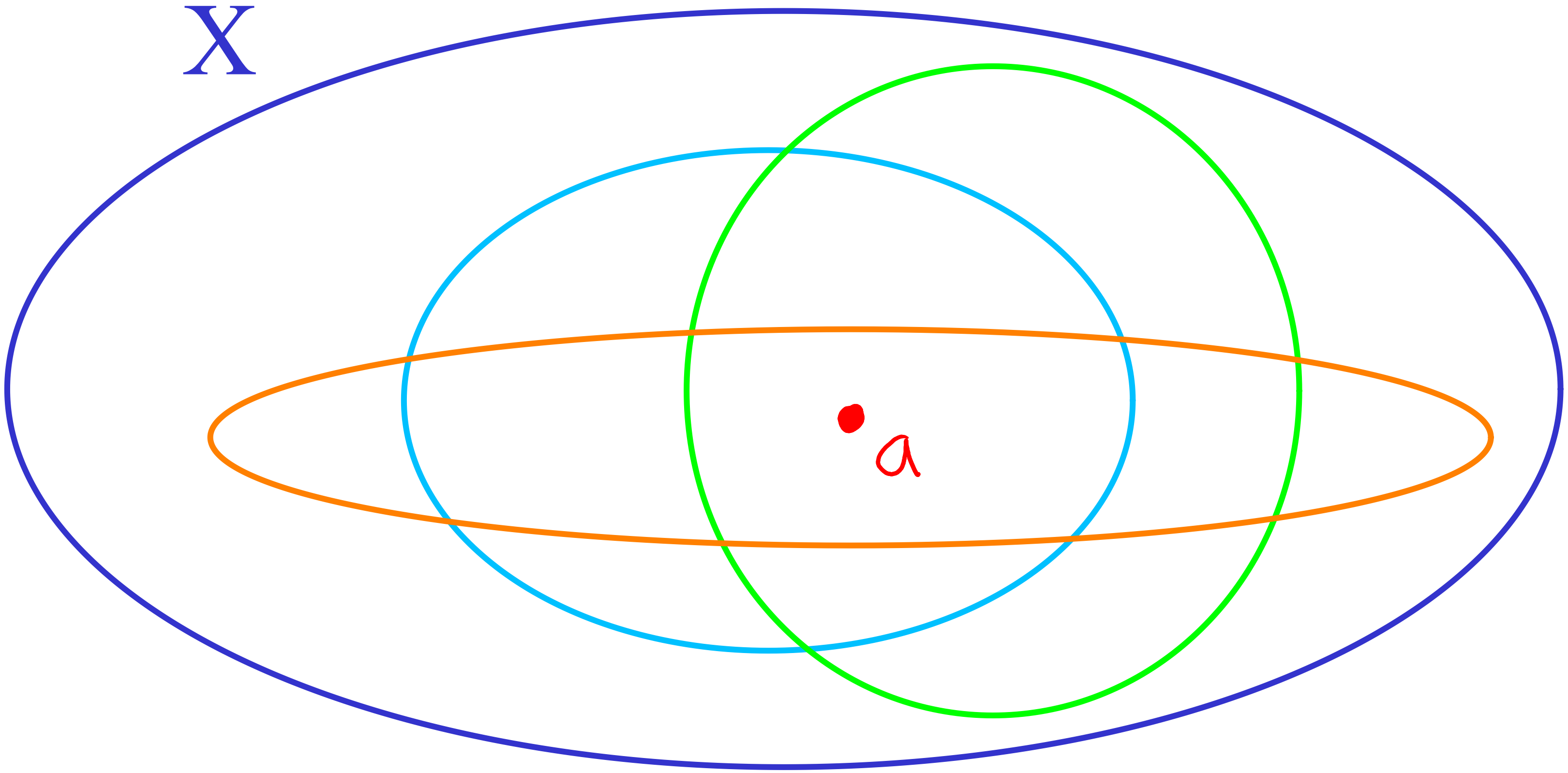
¿Existen los ultrafiltros?

Si, por una razón muy aburrida...

Sea X un conjunto y $a \in X$. Definimos:

$$\mathcal{U}_a = \{S \subseteq X \mid a \in S\}$$

Es fácil ver que este es un ultrafiltro.



Para $\mathcal{U}_a$, un conjunto es grande si y solo si tiene a a.

¡Estos ultrafiltros no tienen nada de chiste!

Definición (ultrafiltro no principal)

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en X. Decimos que $\mathcal{U}$ *es principal* si existe $a \in X$ tal que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_a$.

Estamos interesados en los *ultrafiltros no principales*, es decir, los que no son de la forma $\mathcal{U}_a$.

Tarea

1. Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro. $\mathcal{U}$ es principal si y solo si $\mathcal{U}$ tiene un conjunto finito.
2. Si X es un conjunto finito, entonces todo ultrafiltro en X es principal.

¿Existen los ultrafiltros no principales?

¿Existen los ultrafiltros no principales?

Si... pero de una manera extraña

Teorema del Ideal Primo (Tarski, Ulam)

Todo filtro puede extenderse a un ultrafiltro.

Teorema del Ideal Primo (Tarski, Ulam)

Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro en X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

Idea de la demostración

Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Recordemos que los ultrafiltros son los filtros maximales.

Sea $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. Nos preguntamos:

¿$\mathcal{F}_0$ es maximal?

Si es maximal, ¡ya acabamos!

¿$\mathcal{F}_0$ es maximal?

Si es maximal, ¡ya acabamos!

Supongamos que no lo es. Así existe un filtro $\mathcal{F}_1$ tal que $\mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{F}_1$. Entonces nos preguntamos:

¿$\mathcal{F}_1$ es maximal?

Si es maximal, ¡ya acabamos!

¿$\mathcal{F}_1$ es maximal?

Si es maximal, ¡ya acabamos!

Supongamos que no lo es. Así existe un filtro $\mathcal{F}_2$ tal que $\mathcal{F}_1 \subsetneq \mathcal{F}_2$. Entonces nos preguntamos:

¿$\mathcal{F}_2$ es maximal?

Si es maximal, ¡ya acabamos!

¿$\mathcal{F}_2$ es maximal?

Si es maximal, ¡ya acabamos!

Supongamos que no lo es. Así existe un filtro $\mathcal{F}_2$ tal que $\mathcal{F}_2 \subsetneq \mathcal{F}_3$. Entonces nos preguntamos:

Así continuamos…

Si después de ω pasos no hemos terminado, definimos:

$$\mathcal{F}_\omega = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{F}_n$$

Es fácil ver que $\mathcal{F}_\omega$ es un filtro (¡Tarea!).
Ahora, nos preguntamos:

¿$\mathcal{F}_\omega$ es maximal?

Si es maximal, ¡ya acabamos!

¿$\mathcal{F}_\omega$ es maximal?

Si es maximal, ¡ya acabamos!

De ser necesario, seguimos definiendo

$\mathcal{F}_{\omega+1}, \mathcal{F}_{\omega+2}, \mathcal{F}_{\omega+3} \ldots$

Si en otros ω pasos no hemos terminado, definimos $\mathcal{F}_{\omega 2} = \bigcup_{\alpha<\omega 2} \mathcal{F}_\alpha$.

Si aún no hemos terminado, definimos

$\mathcal{F}_{\omega 2+1}$, ... $\mathcal{F}_{\omega 3}$, ... $\mathcal{F}_{\omega^2}$, ... $\mathcal{F}_{\omega^{\omega^{\omega}}}$ ...

Sin embargo, como los filtros van creciendo en cada paso, este proceso no puede durar toda la "eternidad", por lo que debe terminar en algún momento (sin embargo, podría necesitar una cantidad no numerable de pasos).

La demostración anterior necesita del Axioma de Elección (AC). Hablaremos de esto más adelante.

Corolario

Sea X un conjunto infinito. Existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro no principal sobre X.

Demostración

Sea $\mathcal{F}$ el filtro dual de $\text{fin}(X)^*$, es decir, el filtro de los cofinitos. Usando el Teorema anterior, encontramos $\mathcal{U}$ ultrafiltro tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. De esta forma, $\mathcal{U}$ no puede tener conjuntos finitos, por lo que es no principal.

$\square$

Corolario

1) Los conjuntos finitos no tienen ultrafiltros no principales.

2) Los conjuntos infinitos tienen ultrafiltros principales.

La demostración anterior es extremadamente no constructiva.

¿Podemos ver un ejemplo concreto de un ultrafiltro no principal?

La demostración anterior es extremadamente no constructiva.

¿Podemos ver un ejemplo concreto de un ultrafiltro no principal?

No

Definición (Pif)

Sea X un conjunto y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Decimos que $\mathcal{S}$ tiene la *Propiedad de la Intersección Finita* (*pif*) si para todo $n \in \omega$ y $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$, se tiene que $A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$.

Lema

Sea X un conjunto y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con pif. Existe $\mathcal{F}$ filtro en X tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$.

Lema

Sea X un conjunto y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con pif. Existe $\mathcal{F}$ filtro en X tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$.

Demostración

Primero cerramos a $\mathcal{S}$ bajo intersecciones finitas. Después cerramos bajo superconjuntos. Se verifica que esto es un filtro (¡Tarea!).

$\square$

Corolario

Sea X un conjunto y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con pif. Existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro en X tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$.

Tarea

¿Que debe cumplir una familia para poderse extender a un ultrafiltro no principal?