"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

# UNIVERSIDAD DE SONORA


DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

**Departamento de Matemáticas**


## Gráficas asociadas a 1-formas sobre la esfera de Riemann

# T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:


Sergio Zamora Erazo

Director de Tesis: Dr. Martín Eduardo Frías Armenta

Asesor de Tesis: Dr. Jesús Ruperto Muciño Raymundo



Hermosillo, Sonora, México, 2010

*A mis padres*

*Dagoberto Zamora Orozco*
*y*
*Jesús Mireya Erazo Acuña*

*Que mi logro sea su orgullo*

# Agradecimientos

A mi papá, el Sr. Dagoberto Zamora, y mi mamá, la Sra. Mireya Erazo, por el apoyo que siempre me han brindado en cada proyecto que emprendo en mi vida y por el incansable esfuerzo que hacen día a día para darme una vida satisfactoria y así no tener pretextos para segir cosechando logros. Por eso y por mucho más, gracias papito, gracias mamita. Los quiero mucho.

A mis hermanos, el Ing. Dagoberto Zamora y Jesús Arturo Zamora, por ese apoyo incondicional de hermanos con el que puedo contar siempre y por ser pacientes y comprensibles por las cosas que hago o dejo de hacer.

A mi novia, Silvia Anahí Valdés, por estar conmigo alentandome para seguir adelante y no dejarme caer ante la presión que originó esta tesis y por haberme acompañado en este proceso culminante de mi licenciatura.

A mi asesor de tesis, Dr. Jesús Muciño Raymundo, por la paciencia y tiempo que me dedicó para que preparara mejor este trabajo y por las observaciones, correcciones y sugerencias que hizo al mismo.

A mis maestros y sinodales, Dr. Martín Eduardo Frías Armenta, Dr. Martín Gildardo García Alvarado, Dr. Fernando Verduzco González, por las observaciones y sugerencias hechas a la tesis. Además, gracias por todo el apoyo que me brindaron durante la licenciatura y por haber hecho de las matemáticas mi pasión y mi forma de vida.

A mis amigos Humberto, Adriana, Manuela, Carol y Dante, por estar ahí en los momentos de pena y gloria y por saber que siempre puedo contar con ustedes. Fue un honor compartir el aula con ustedes, amigos míos.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por haberme apoyado para la realización de esta tesis como becario (Ref. no. 79073).

# Introducción

Las superficies de Riemann se estudian en distintas áreas de las matemáticas. De ellas se obtienen resultados en los que se miran con distintas estructuras matemáticas: como espacios topológicos, son variedades diferenciables, tienen espacios de funciones meromorfas, armónicas y diferenciables. Además de que en ellas se describen de manera nítida propiedades topologico-algebraicas como el grupo fundamental y varios tipos de homología y cohomología. En este trabajo nos interesaremos en una superficie de Riemann, conocida como *esfera de Riemann* y denotada por $\widehat{\mathbb{C}}$.

En este trabajo de tesis tratamos de describir el comportamiento de las 1-formas meromorfas no exactas (aquellas que no son diferenciales de funciones racionales) con polos y ceros simples, mediante la construcción de otros objetos matemáticos que están canónicamente asociados. De esta manera, para cada 1-forma meromorfa $\omega$ con polos y ceros simples se asigna una función localmente holomorfa representada por la integral compleja, una figura geométreica que conserva isometrías entre abiertos en $\mathbb{C}$ y en $\widehat{\mathbb{C}}$, y una gráfica invariante que encierra su información.

La integración de 1-formas meromorfas en la esfera de Riemann y en superficies Riemann compactas, tiene sus raíces desde los primeros días del cálculo. Señalamos a continuación algunos puntos en su desarrollo.

- Al buscar la longitud de la elipse y la lemniscata, uno de los Bernoulli y el Conde Fagnano llegaron a integrales de la forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Euler consideró el problema en mayor generalidad para denominadores en el integrando:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+mx^2+nx^4}}.$$

• Abel y Jacobi crearon técnicas nuevas que permiten tratar la ambigüedad en el signo de la raíz e introducen lo que hoy llamamos superficies de Riemann. Entre sus contribuciones ellos mostraron que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\tau)}}$$

para $\tau \neq 0, 1$ puede re-interpretarse como la integral de la 1-forma holomorfa $d\varsigma$ sobre un toro, es decir

$$\int d\varsigma : \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z} \oplus \sigma\Delta\mathbb{Z}}$$

donde el dominio es un toro y la imágen bajo la integral (introduciendo dos cortes, como los que hacemos en este trabajo, $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ en el toro orígen) es exactamente un rectángulo de lados 1 y $\sigma$ con $Im(\sigma) > 0$, a partir del cual se recupera el toro original (Ver [3], pags. 656-657).

• Teichmuller y Schiffer (entre otros) alrededor de los años 30's estudiaron las diferenciales cuadráticas, ellas son integrales de la forma

$$\int \sqrt{\phi(z)}dz$$

para $\phi$ función meromorfa (Ver [14], pags. VII,17,20). Ellos introdujeron la idea de la métrica plana. La motivación de dichas integrales proviene de problemas de variacionales de análisis complejo.

La descripción de las métricas planas que aparecen en la integración de 1-formas meromorfas multivaluadas, como es el caso de la raíz, se desarrolló a partir de Teichmuller. Pero ya era implícita en muchos trabajos previos, citemos algunos ejemplos.

• Riemann distinguió el comportamiento de las 1-formas en que tienen polos, resíduos cero y no cero y las llamó de la 1ª, 2ª y 3ª especie respectivamente (Ver [11], pags. 96-97 y [3], pags. 628-629).
• Klein describió cualitativamente el comportamiento de trayectorias de campos vectoriales que provienen de la integración de 1-formas (Ver [7]).
• Ahlfors describió las trayectorias de diferenciales cuadráticas (y por ello, de campos vectoriales meromorfos) cerca de sus singularidades (Ver [1], pag. 111).
• Strebel resumió toda la teoría conocida para métricas y geodésicas de

diferenciales cuadráticas en [14].

Las correspondencias

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\text{1-formas meromorfas} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, shift left] & & \begin{array}{c}\text{campos vectoriales}\\ \text{meromorfos}\end{array} \arrow[dl, shift left] \\
& \text{diferenciales cuadráticas meromorfas} \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

exhiben la coherencia a las ideas anteriores. Ello muestra que los tres tipos de objetos son caras de una misma cosa. Dicha correspondencia es implícita en muchos de los trabajos mencionados. J. Muciño la enuncia explícitamente en [9]. En este trabajo nosotros usamos la correspondencia en la línea superior.

Es curioso notar que la técnica de expresar las integrales de las 1-formas meromorfas mediante sus campos vectoriales y métricas asociadas, no ha sido completamente desarrollada sobre la esfera de Riemann. Si bien en el caso de superficies de género $g \geq 1$ la integración de 1-formas holomorfas sí lo ha sido. Pero recordemos que la esfera de Riemann no posee 1-formas holomorfas (pues la diferencia de polos menos ceros es dos en esta superficie).

E. Frías, J. Muciño y L. Hernández están trabajando en el problema sobre la esfera (Ver [4]). Nuestra contribución es la introducción de una gráfica con pesos para describir los objetos.

En el capítulo 1 se describirá la construcción de la esfera de Riemann bajo la definición de superficie de Riemann. Además, se describirá sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ sus funciones meromorfas, 1-formas meromorfas y campos vectoriales meromorfos y se probará que cada objeto es holomorfo y racional. También se probará que existe una relación entre 1-formas y campo vectoriales y entre 1-formas y funciones meromorfas; esta última está condicionada para 1-formas exactas.

En el capítulo 2 se describirá un dominio para la función $\Psi = \int \omega$ con $\omega$ 1-forma meromorfa con polos y ceros simples, tal que exista una correspondencia entre la familia de 1-formas meromorfas de polos y ceros simples y la familia de funciones definidas como $\Psi$. Este es el resultado principal del trabajo. Además, se hará la construcción de la representación de la imágen de $\omega$ bajo $\Psi$, que llamamos por simplicidad *tofico* y de la gráfica con pesos asociada a $\omega$. De esta manera tenemos una relación entre el área del análisis complejo y el área de la combinatoria.

En el capítulo 3 se mostrarán ejemplos de lo descrito en el capítulo anterior; es decir, a partir de una 1-forma $\omega$ dada

- graficaremos su campo vectorial en $\widehat{\mathbb{C}}$,
- construiremos su tofico y
- construiremos su gráfica asociada.

El objetivo primordial de este capítulo es mostrar de manera visual que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\omega \text{ 1-forma meromorfa} \\ \text{con polos y ceros simples}\end{array} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \begin{array}{c}\text{gráfica (árbol finito)} \\ \text{con pesos complejos}\end{array} \\
& \text{tofico} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

efectivamente funciona para 1-formas meromorfas de polos y ceros simples.

Se anexan dos apéndices: el apéndice A muestra un camino para demostrar que el plano complejo extendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es un espacio topológico. Este hecho es básico para probar que la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es una superficie de Riemann.

El apéndice B muestra un algoritmo, de uso en el programa *Mathematica 7*, para construir un controlador que manipula rotaciones aplicadas al campo vectorial meromorfo $X$. Esta fue una herramienta importante para determinar asociaciones entre polos y ceros de $\omega$ en nuestro trabajo.

# Índice general