Carta Informativa
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Número 16

Marzo 1997

Sistemas dinámicos a la salida del cine

Jorge Luis López y Jesús Muciño

Parte I: un cuento, versión Shakespeare et al.

Romeo asiste solitario a una función de cine. Justo antes de apagarse las luces, ve por primera vez en su vida a Julieta, varias filas frente a él.

Inevitablemente, Romeo ocupa su mente buscando cómo hablar con Julieta. Le atormenta pensar que al terminar la proyección los espectadores a su lado no le permitan salir de manera expedita para hablar con Julieta, ¡nunca se perdonaría que ella se perdiera en el anonimato de la multitud! Por otra parte, encuentra poco caballeroso interpelarla en la oscuridad de la sala a mitad de la función de cine.

¿Cómo podrá llegar Romeo a la cita que con Julieta le señala el destino?
Romeo, anheloso, observa que el problema de alcanzar a Julieta depende básicamente del tipo de cine en que se encuentran.

Hay dos tipos de salas de cine:
Aquellas como las que conocieron nuestros abuelos, donde la función es a cielo abierto en una plaza y al finalizar la función todos los espectadores de dirigen a sus casas, en todas las direcciones posibles.

Hay, por otra parte, salas de cine más modernas, donde el número de puertas de salida es pequeño. Los espectadores, cuando salen del cine, se apretujan unos con otros a través de esas puertas.

Si Romeo está en un cine a cielo abierto sus esperanzas de hablar con Julieta son remotas, le resultará muy difícil adivinar en que dirección saldrá Julieta. En este caso deberá confiar en su destino.

En cambio, si se encuentra en un cine moderno, le bastará colocarse cerca de las salidas, poco antes del final de la proyección, anticipándose hacia la puerta que elija Julieta.

Actualmente, casi todos los cines son del segundo tipo. Así que si Romeo se encuentra en uno de ellos, tiene elevadas expectativas de desencadenar su destino encontrando a Julieta a la salida del cine.

El resto es historia.

Parte II: partículas que escapan a infinito, en tiempo finito.

Imaginemos el espacio euclideano $\mathbf{R}^n$ lleno de partículas (que corresponden a los puntos del espacio), cuyo movimiento está gobernado por una ecuación diferencial (ordinaria o parcial).

El movimiento de todas las partículas es lo que se llama un sistema dinámico.

Un problema interesante y natural es:
Determinar si todas las soluciones de la ecuación diferencial están definidas para todo tiempo en $\mathbf{R}$.

En otras palabras:

¿Pueden algunas partículas escapar de $\mathbf{R}^n$ en un tiempo finito?

Describamos sucintamente un ejemplo en el que esto ocurre.

A principios de la década de los noventa, Zhihong Xia mostró que puede construirse un ejemplo del movimiento de cinco planetas en el espacio euclideano, gobernados por la ley de la gravitación universal de Newton, de tal forma que uno de los cinco planetas escapa a infinito en un tiempo finito.

¡El planeta desaparece a partir de cierto tiempo!

Situación que es evidentemente muy incómoda. De hecho el problema de hallar tal ejemplo fue propuesto por Paul Painlevé a fines de siglo pasado.

Actualmente, para muchos problemas matemáticos, físicos y tecnológicos modelados en el espacio euclideano por ecuaciones diferenciales, el decidir si todas las soluciones están bien definidas para todo tiempo es pregunta abierta.

¿Dónde está la dificultad del problema? →

Contenido

Carta informativa

Bueno, el primer intento para atacar el problema es resolver la ecuación diferencial explícitamente y decidir a partir de la forma de sus soluciones.

Por ejemplo, la ecuación diferencial $x' = x^2$ en la línea real, tiene soluciones de la forma

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0} \quad ,$$

por lo que la partícula que está en $x_0 \neq 0$ al tiempo $t = 0$, es expelida a infinito en tiempo finito $t = 1/x_0$.

La imposibilidad de aplicar el anterior método de ataque al problema, radica en que prácticamente muy pocas ecuaciones diferenciales pueden resolverse explícitamente (un hecho evidente desde los primeros días del cálculo diferencial). Esto significa que no existen expresiones de sus soluciones en términos de funciones elementales; polinomios, funciones trigonométricas, exponenciales, etc.

¡Ello no depende de la habilidad de quién lo intenta! No es que quién lo intenta no sea lo suficientemente listo para hallar un truco que las resuelva. Es simplemente que no existen dichas expresiones sencillas. ¡Aunque las ecuaciones si estén dadas por funciones elementales!

Parte III: el mismo cuento, versión Poincaré et al.

Consideremos la ecuación diferencial $x' = P(x)$, para x en el plano euclideano, donde $P = (R, S)$: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ es una función polinomial, y el grado de P es el máximo de los grados de R y S.

¿Cómo averiguar si todas sus soluciones están bien definidas para todo tiempo real?

Sus soluciones son trayectorias en el plano. Podemos interpretarlas como las trayectorias de las distintas Julietas en el cine.

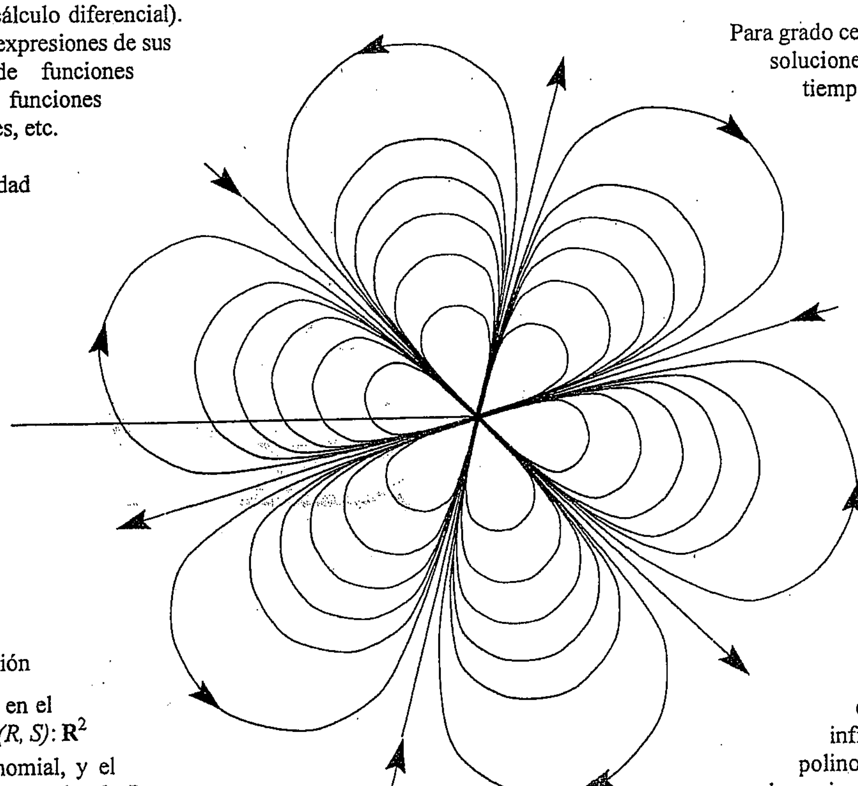
Como no podemos hallar las soluciones explícitas (lo que corresponde a describir el movimiento de todas las posibles Julietas), intentemos mejor el "método Romeo y Julieta", como en la parte I.

Es bien conocido que el plano tiene de manera natural una frontera dada por la línea de puntos al infinito (como en geometría proyectiva elemental). Estos puntos al infinito forman las posibles paredes del cine y son como un círculo.

La idea de extender la ecuación diferencial a los puntos al infinito se debe a Henri Poincaré.

Es muy fácil decidir cuándo estamos en un cine a cielo abierto o en un cine con un número finito de puertas.

El primer caso se da cuando los términos de grado más alto en R, S forman un múltiplo del campo radial, lo que puede determinarse por simple inspección.



Si el cine es a cielo abierto y el grado de P es al menos dos, siempre hay soluciones que no están definidas para todo tiempo (esto es, llegan a los puntos al infinito en tiempo finito). Hay Julietas que escapan a tiempo finito del cine.

Afortunadamente:

Casi todas las P determinan cines con un número finito de puertas.

Se puede determinar la posición y número de las puertas en la línea de puntos al infinito mediante los ceros de cierto polinomio asociado.

Así que para averiguar si las Julietas salen a tiempo finito del cine, basta estudiar la ecuación diferencial cerca de esos puntos.

Podemos concluir que la ventaja de este método es la reducción del problema original al estudio de la ecuación diferencial alrededor de un número finito de puntos en la línea al infinito.

Como resultado:

Para grado mayor o igual a dos casi toda ecuación diferencial como antes, posee soluciones que escapan a infinito en tiempo finito.

Es decir, al menos una Julieta sale del cine a tiempo finito, por una de las puertas.

Para grado cero o uno, es elemental que todas las soluciones permanecen en el plano para todo tiempo.

Un nuevo fenómeno ocurre en las puertas del cine. Por uno de dichos puntos puede suceder que salgan dos o más soluciones, simultáneamente y con velocidad no cero. Como en la vida real; dos o más Julietas pueden salir apretujándose entre sí, por la misma puerta del cine simultáneamente.

Para ecuaciones diferenciales C^∞ de primer orden, ello nunca ocurre.

En nuestro caso, la ecuación diferencial extendida a los puntos al infinito está descrita por cocientes de polinomios, cuyo numerador y denominador se anula en las puertas simultáneamente. En geometría algebraica se conoce a esos puntos como locus de indeterminación.

Conclusión.

Todo lo anterior se generaliza al espacio euclideano de cualquier dimensión. Será interesante aplicar la filosofía del "método Romeo y Julieta" a sistemas dinámicos más generales que los polinomiales aquí descritos. Introduciendo los puntos al infinito y estudiando la ecuación diferencial extendida a esos nuevos puntos, ¿podrá así resolverse siempre el problema?

Ilustración de E. Rosales