Dinámica de Separatrices en Campos Vectoriales Holomorfos

JORGE LUIS LÓPEZ LÓPEZ

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas
Escuela de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Director de tesis: Jesús R. Muciño Raymundo

El problema a considerar.

Imaginemos el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ lleno de partículas (que corresponden a los puntos del espacio), cuyo movimiento está gobernado por una ecuación diferencial ordinaria. Cada solución de la ecuación diferencial modela el movimiento de una partícula y el movimiento de todas éstas es lo que se llama un sistema dinámico.

Un problema interesante y natural es: Determinar si todas las soluciones de la ecuación diferencial están definidas para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$. En otras palabras: ¿Pueden algunas partículas escapar de $\mathbb{R}^n$ en un tiempo finito?

Describamos dos ejemplos en los que esto ocurre.

Ejemplo 1. La ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = x^2$ en la línea real $\mathbb{R}$ tiene soluciones de la forma $x(t) = \frac{x_0}{1-tx_0}$, por lo que la partícula que está en $x_0 \neq 0$ al tiempo $t = 0$ escapa a infinito en el tiempo finito $t = \frac{1}{x_0}$.

Ejemplo 2. A principios de la década de los noventa, Zhihong Xia mostró que puede construirse un ejemplo del movimiento de cinco planetas en el espacio euclideano, gobernados por la ley de la gravitación de Newton, de tal forma que uno de los cinco planetas escapa a infinito en un tiempo finito (ver [Saari, Xia]). ¡El planeta desaparece a partir de cierto tiempo! Situación que es evidentemente muy incómoda. De hecho el problema de hallar tal ejemplo fué propuesto por Paul Painlevé a fines del siglo pasado.

Actualmente, para muchos problemas matemáticos, físicos y tecnológicos modelados en el espacio euclideano por ecuaciones diferenciales, el decidir si todas las soluciones están bien definidas para todo tiempo es pregunta abierta. Esto es porque prácticamente muy pocas ecuaciones diferenciales pueden resolverse explícitamente (un hecho evidente desde los primeros días del cálculo diferencial e integral); lo cual nos impide decidir a partir de la expresión de sus soluciones. Por ejemplo, un problema difícil y no resuelto es saber si las ecuaciones de Navier-Stokes (que se usan para modelar fluidos) en dimensión tres tienen una única solución definida para todo tiempo (ver [Smale]).

La dificultad del problema y las técnicas que usamos.

Cuando se dice que prácticamente muy pocas ecuaciones diferenciales pueden resolverse explícitamente, no debe entenderse que no somos lo suficientemente listos para hallar un truco que las resuelva. ¡Es simplemente que tal truco no existe! Por eso es necesario crear técnicas geométricas que sirvan para decidir si todas las soluciones están bien definidas para todo tiempo. Esto es precisamente lo que se hace en esta tesis, aunque imponemos fuertes hipótesis a nuestras ecuaciones diferenciales: Estas son del tipo

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

donde $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es una función holomorfa. Es decir, nuestras ecuaciones son complejas y, naturalmente, sus soluciones $x(t) : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ también son funciones complejas. ¿Por qué trabajamos con complejos y no con reales? ¿Es más fácil el problema en estos términos o es más difícil? La respuesta está en que conocemos muy bien a todas las soluciones de una ecuación diferencial compleja que tienen como dominio a todo $\mathbb{C}$; nada más hay seis posibilidades salvo cambio holomorfo de coordenadas. En contraste, no existe una clasificación análoga para el caso real (más precisamente, en el caso complejo las soluciones que tienen como dominio a todo $\mathbb{C}$ se pueden clasificar porque tienen a lo más dos ceros simples de F o un cero de orden dos de F, mientras que en caso real no hay restricción para el número o el orden de los ceros). En resumen, el problema es más fácil en $\mathbb{C}$.

Contenido de la tesis.

El capítulo 1 está dedicado a repasar los conceptos de variedad holomorfa y campo vectorial holomorfo.

En el capítulo 2 se prueba (de una forma bastante elemental, que incluso nos parece que no está escrita en algún artículo o libro) que la lista de las seis posibilidades para soluciones definidas en todo $\mathbb{C}$ es completa, y también se dan los argumentos necesarios para convencer al lector de que esta clasificación no puede copiarse para el caso real.

En el capítulo 3 probamos la *obstrucción de Rebelo* (ver [Rebelo]) que se puede enunciar vagamente así: Sea M una variedad compleja, sea F un campo vectorial holomorfo en M no idénticamente cero tal que todas sus soluciones están bien definidas para todo $t \in \mathbb{C}$ y sea $p \in M$ un cero de F. Supongamos que $\mathfrak{L} \subset M$ es una solución lisa de F que *pasa* por p. Entonces

(i) el orden del campo F en el cero p es 1 o 2;

(ii) el orden del campo F retringido a $\mathfrak{L}$ en p es 1 o 2.

Para enunciar la obstrucción de Rebelo con toda precisión sólo debemos decir exactamente qué entendemos por $\mathfrak{L} \subset M$ *es una solución lisa de F que pasa por p*. Éste es precisamente el concepto de *separatriz lisa del campo F*, que es clásico e importantísimo en el estudio de campos vectoriales. De hecho el problema de determinar si un campo vectorial holomorfo tiene una separatriz es famoso y muy difícil. Éste fué propuesto por C. A. Briot y J. C. Bouquet en 1854 aproximadamente. En 1982 C. Camacho y P. Sad dieron una respuesta afirmativa para campos en dimensión compleja dos con ceros aislados. En 1992 X. Gómez-Mont e I. Luengo encontraron ejemplos en dimensión tres de campos holomorfos con ceros aislados y sin separatriz. En 1997 J. Olivares dio ejemplos en dimensiones mayores (ver [Olivares]).

La prueba que damos de la obstrucción de Rebelo es, en algunos aspectos, nueva y más sencilla de la original dada por J. C. Rebelo. Es así porque usamos la lista de las seis posibles soluciones, lo que nos trae dos ventajas:

(i) Damos algunos corolarios que no serían tan fáciles de deducir de la demostración de J. C. Rebelo.

(ii) Obtenemos una prueba más natural que J. C. Rebelo, quien requiere algunos conceptos poco familiares referentes al flujo local.

En el capítulo 4 se dan criterios elementales para decidir si un campo vectorial polinomial en $\mathbb{C}^2$ es tal que todas sus soluciones están definidas para todo $t \in \mathbb{C}$. Tales criterios se basan en el comportamiento del campo en la línea al infinito, pensando que $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$ = plano proyectivo complejo. Posiblemente estos resultados sean conocidos por los especialistas, pero hasta donde sabemos no están dichos explícitamente en algún artículo. En la tesis aparecen explícitos y se muestra que son resultado del estudio de *polos* y *puntos de indeterminación* de campos vectoriales, estudio que creemos es original. La mejor manera de dar una idea de lo que se hace en este capítulo es mediante un cuento, del que se dan dos versiones, la de Shakespeare y la de Poincaré. La idea es que el lector las compare.

El cuento, versión Shakespeare (cuando no estaba tan inspirado).

Romeo asiste solitario a una función de cine. Justo antes de apagarse las luces, ve por primera vez en su vida a Julieta, varias filas frente a él.

Inevitablemente, Romeo ocupa su mente buscando cómo hablar con Julieta. Le atormenta pensar que al terminar la proyección los espectadores a su lado no le permitan salir de manera expedita para hablar con Julieta, ¡nunca se perdonaría que ella se perdiera en el anonimato de la multitud! Por otra parte, encuentra poco caballeroso interpelarla en la oscuridad de la función de cine.

¿Cómo podrá llegar Romeo a la cita que con Julieta le señala su destino? Romeo, anheloso, observa que el problema de alcanzar a Julieta depende básicamente del tipo de cine en que se encuentran.

Hay dos tipos de salas de cine: Aquellas como las que conocieron nuestros abuelos, donde la función es a cielo abierto en una plaza y al finalizar la función todos los espectadores se dirigen a sus casas, en todas las direcciones posibles. Hay, por otra parte, salas de cine más modernas, donde el número de puertas es pequeño. Los espectadores, cuando salen del cine, se apretujan unos con otros a través de esas puertas..

Si Romeo está en un cine a cielo abierto sus esperanzas de hablar con Julieta son remotas, le resultará muy difícil adivinar en que dirección saldrá Julieta. En este caso deberá confiar en su destino. En cambio, si se encuentra en un cine moderno, le bastará colocarse cerca de las salidas, poco antes del final de la proyección, anticipándose hacia la puerta que elija Julieta.

Actualmente, casi todos los cines son del segundo tipo. Así que si Romeo se encuentra en uno de ellos, tiene elevadas espectativas de desencadenar su destino encontrando a Julieta a la salida del cine.

El resto es historia.

El cuento, versión Poincaré.

Consideremos la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = P(x)$ para $x \in \mathbb{C}^2$, donde $P = (R, S) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ es una función polinomial, y el grado de P es el máximo de los grados de R y S. ¿Cómo averiguar si todas sus soluciones están bien definidas para todo tiempo complejo? Usemos el método que Romeo usó para que Julieta no se le perdiera.

Las soluciones de P son trayectorias en el plano $\mathbb{C}^2$. Podemos interpretarlas como las trayectorias de las distintas Julietas en el cine. En este caso, nosotros somos Romeo y estamos al pendiente para ver si una Julieta (es decir, una trayectoria $x(t)$) se sale del cine (que es $\mathbb{C}^2$ en nuestra analogía).

Veamos al plano proyectivo complejo como la unión del plano complejo $\mathbb{C}^2$ y la línea al infinito $\mathbb{CP}^1_\infty$, $\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{CP}^1_\infty$. Luego $\mathbb{C}^2$ tiene como frontera natural a la línea al infinito (así podemos pensar que las posibles paredes del cine están formadas por pedazos de la línea al infinito).

Podemos extender la ecuación diferencial a todo el plano proyectivo y fácilmente decidir si estamos en un cine a cielo abierto o en un cine con un número finito de puertas (dependiendo de si las Julietas se dirigen hacia la pared $\mathbb{CP}^1_\infty$ en todas las direcciones posibles o si se dirigen sólo hacia puertas bien determinadas). El primer caso se da cuando los términos de grado más alto en R y S forman un múltiplo del campo radial, lo que puede determinarse por simple inspección. Si el cine es a cielo abierto y el grado de P es al menos dos, siempre hay soluciones que no están definidas para todo tiempo (esto es, llegan a la línea al infinito en tiempo finito). En otras palabras, hay Julietas que escapan a tiempo finito del cine.

Afortunadamente: Casi todas las P determinan cines con un número finito de puertas. Se puede determinar la posición y número de las puertas al infinito mediante los ceros de cierto polinomio asociado. Así que para hallar condiciones necesarias para que las Julietas salgan a tiempo finito del cine basta estudiar la ecuación diferencial cerca de esas puertas.

Podemos concluir que la ventaja de este método es una reducción del problema original al estudio de la ecuación diferencial alrededor de un número finito de puntos en la línea al infinito.

Como resultado: Para grado mayor o igual a dos casi toda ecuación diferencial como antes (con puertas al infinito), posee soluciones que escapan a infinito en tiempo finito. Es decir, al menos una Julieta sale del cine a tiempo finito por una de las puertas. Para grado cero o uno, es elemental que todas las soluciones permanecen en el plano para todo tiempo.

Aplicaciones.

Para ver algunas aplicaciones de estas ideas a campos vectoriales hamiltonianos en $\mathbb{C}^2$ puede consultarse [López, Muciño-Raymundo].

Bibliografía

[López, Muciño-Raymundo] J.L. López and J. Muciño-Raymundo, *On the decidibility of whether a holomorphic vector field is complete.* Publicación preliminar. IMATE-UNAM. 1997.

[Olivares] J. Olivares, *On the Problem of Existence of Germs of Holomorphic Vector Fields in $\mathbb{C}^m$, without a Separatrix, $(m \geq 3)$,* Ecuaciones Diferenciales, Singularidades. Secretariado de Publicaciones e Intercambio Científico, Universidad de Valladolid. 1997.

[Rebelo] J. C. Rebelo, *Singularités des flots holomorphes,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 46 (2) (1996), 411–428.

[Saari,Xia] D. Saari and Z. Xia, *Off to infinity in finite time,* Notices of the AMS. 42 (5) (1995), 538–546.

[Smale] S. Smale, *Mathematical problems for the next century,* Mathematical Intelligencer. 20 (2) (1998), 7–15.