Realización de estructuras planas singulares

Homero G. Díaz Marín

Matemático

Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo

Directores de tesis: Dr. Jesús Muciño

Consideremos una superficie M, compacta, orientable, sin frontera, de género $g \geq 0$, y provista de una métrica riemanniana plana. Si exigimos que dicha estructura plana esté definida en *toda* M, entonces, por el teorema de Gauß-Bonnet, necesariamente $g = 1$. Para poder considerar géneros arbitrarios, supondremos que la estructura plana está dada *sólo en* $M - \Sigma$, pudiendo ser geodésicamente incompleta o no estar definida en $\Sigma = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset M$. Además supondremos que $M - \Sigma$ se descompone en unión de geodésicas ajenas, es decir, admite una *foliación* por geodésicas $\mathcal{F}$. Con estos ingredientes diremos que tenemos una *estructura plana singular.*

$\mathcal{F}$ será *orientable* si es posible definir un campo vectorial en $M - \Sigma$ tangente a las geodésicas de $\mathcal{F}$, será *no orientable* en otro caso; escribiremos $\epsilon(\mathcal{F}) = +1$ ó $\epsilon(\mathcal{F}) = -1$ respectivamente. Para cada $p_i \in \Sigma$, existe un índice de Poincaré-Hopf de $\mathcal{F}$, $-k_i/2$, donde $k_i \in \mathbb{Z}$. Si $\mathcal{F}$ es orientable *en un vecindad de* p_i, entonces k_i es par, si no entonces k_i es impar. De esta manera obtenemos una colección de números, $k = (k_1, \ldots, k_n; \epsilon(\mathcal{F})), k_i \in \mathbb{Z} - \{0\}, \epsilon(\mathcal{F}) \in \{+1, -1\}$, asociados a la estructura plana singular.

Ejemplos. Consideramos $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ con su métrica euclidiana usual, las rectas paralelas al eje de las abscisas forman una foliación orientable por geodésicas. En la esfera de Riemann $M = \mathbb{C} \cup \{p_1\}$, tenemos una métrica plana y una foliación por geodésicas $\mathcal{F}$, salvo en $\Sigma = \{p_1\}$. El índice de Poincaré-Hopf de $\mathcal{F}$ en p_1 es 2, entonces $k_1 = -4$, y $k = (-4; +1)$.

Una familia rica de ejemplos son los campos vectoriales meromorfos $X = \Re(X) + \sqrt{-1}\Im(X)$, en superficies de Riemann compactas. En coordenadas locales $z = x + \sqrt{-1}y$, un tal campo tiene la forma $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$, con planas singulares y *diferenciales cuadráticas meromorfas*, que son tensores en superficies de Riemann con expresiones locales $\phi(z)dz \otimes dz$, con ϕ meromorfa.

Dada una colección de datos topológicos k como arriba, nos interesa saber cuándo es posible encontrar una estructura plana singular cuya foliación por geodésicas $\mathcal{F}$ tenga la topología preescrita por k.

Teorema. *Sea $k = (k_1, \ldots, k_n; \epsilon)$ donde $k_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$, y $\epsilon \in \{+1, -1\}$. Existe una estructura plana singular en una superficie M de género $g \geq 0$, que realiza k si y sólo si*

1) $\sum_{i=1}^{n} k_i = 4g - 4$;

2) $\epsilon = -1$, *cuando alguna k_i sea impar;*

3) $\epsilon = +1$, *cuando $g = 0$, $k_i \in 2\mathbb{Z}$ para toda i;*

4) $\epsilon = -1$, *cuando $k = (-2, k_2, \ldots, k_n; \epsilon)$, con $k_i \in 2\mathbb{Z}^+$ para $2 \leq i \leq n$;*

5) $k \neq (4; -1), (1, 3; -1), (-1, 1; -1), (; -1)$.

1) es el teorema de Poincaré-Hopf. 2) es el hecho de que no orientabilidad local implica no orientabilidad global. 3) es un hecho general para foliaciones en la esfera. 4) es una versión geométrica del Teorema del Residuo. 5) se deduce del Teorema de Riemann-Roch. El resultado generaliza un teorema de [Masur,Smillie] y otro de [Muciño-Raymundo], éste último sobre la realización de campos vectoriales meromorfos.

Referencias

[Díaz-Marín] *Meromorphic quadratic differentials with prescribed singularities*, Bol. Soc. Bras. Mat. **31** (2), (2000) 189–204.

[Masur,Smillie] *Quadratic differentials with prescribed singularities and pseudo-Anosov diffeomorphisms*, Comment. Math. Helv. **68**, (1993) 289-307.

[Muciño-Raymundo] *Complex structures adapted to smoth vector fields*, Math. Ann. por aparecer.