

\* El trabajo siguiente fue presentado en la modalidad de cartel en el *XLI* Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, celebrado del 20 al 24 de octubre de 2008 en Valle de Bravo, Estado de México.

---

## MÉTODO DE NEWTON Y MOSAICOS EN LA ESFERA DE RIEMANN.

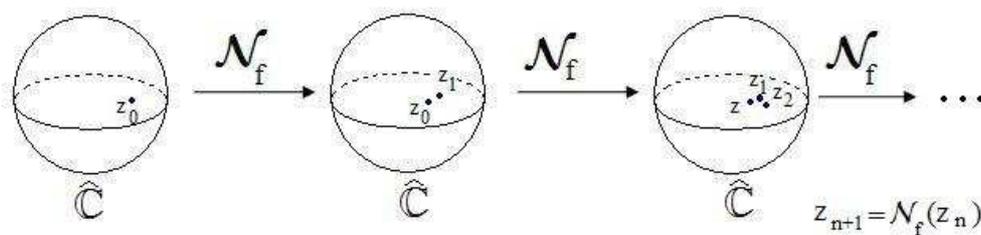
Clío Hurí Rodríguez Basulto.  
hurimath@gmail.com  
Facultad de Matemáticas.  
Universidad Veracruzana, Xalapa Ver.  
Octubre 2008



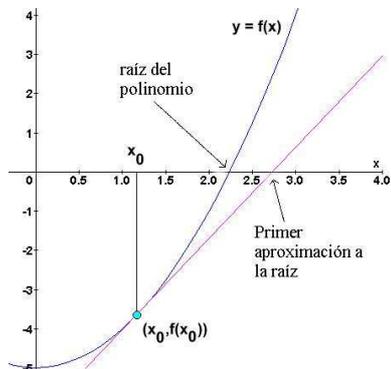
Un método para encontrar las raíces de un polinomio  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , donde  $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , es el sistema dinámico dado por la *función de Newton*:

$$N_f(z) := z - \frac{f(z)}{f'(z)}. \tag{1}$$

Se toma un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  y aplicándole la función  $N_f$  un número grande de veces, el método espera que  $\lim_{n \rightarrow \infty} N_f^{(n)}(z_0)$  sea una raíz de  $f$ .

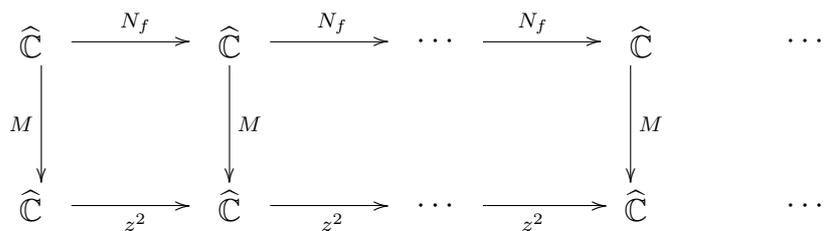


Una interpretación geométrica sencilla es como en la siguiente figura:

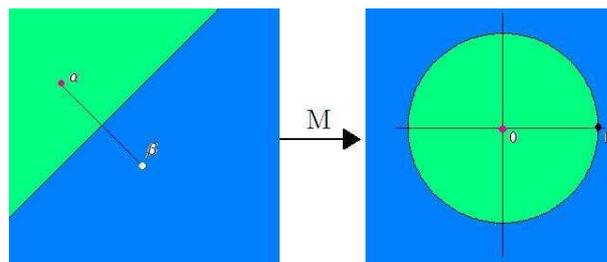


**Teorema 1. (Cayley)** Dado un polinomio  $f$  de grado 2, con raíces distintas,  $N_f$  es conjugado por una transformación de Möbius  $M$  a  $z \mapsto z^2$ .

Lo anterior se puede ilustrar con el diagrama siguiente:



Luego, si  $f$  es un polinomio con raíces distintas  $\alpha$  y  $\beta$ , la imagen bajo  $M$  de la bisectriz entre  $\alpha$  y  $\beta$  es el círculo unitario, por lo que a lo largo de esta línea,  $N_f$  tiene la dinámica de la función dobles, la cual es caótica en  $\mathbb{S}^1$ .



Dicho en otras palabras, Cayley demostró que hay esencialmente un comportamiento dinámico de  $N_f$  para todos los polinomios  $\{f\}$  de grado 2.

¿Qué ocurre con los polinomios de grado mayor que 2?

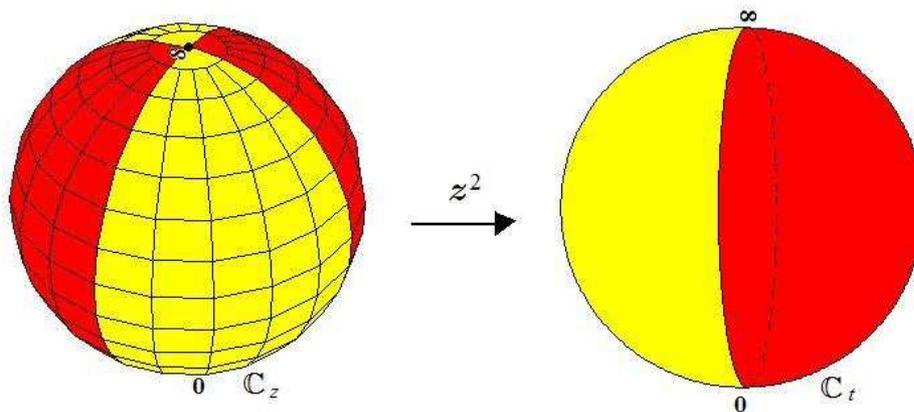
Con gran asombro se observa que el análisis del método de Newton se torna más complicado tan sólo al considerar el grado del polinomio igual (o mayor) a 3.

El algoritmo siguiente describirá cómo se comporta un polinomio en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Dado un polinomio  $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_t$  de grado  $d$ ,

1. Se localizan los puntos críticos de  $f$ , es decir, los puntos donde la derivada se anula, denotados por  $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$  e  $\{\infty\}$ .
2. Se calcula la imagen de los puntos críticos,  $\{f(z_1), \dots, f(z_{n-1})\}$  e  $\{\infty\}$ .
3. Se traza una curva lisa  $\Gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_t$  que pase por la imagen de los puntos críticos y que divida a  $\widehat{\mathbb{C}}_t$  en dos regiones, a una se le asigna el color rojo y a la otra, amarillo.
4. Se colorea  $\widehat{\mathbb{C}}_z$  con la siguiente regla:
  - a)  $z \in \widehat{\mathbb{C}}_z$  es rojo si  $f(z) \in \widehat{\mathbb{C}}_t$  es rojo.
  - b)  $z \in \widehat{\mathbb{C}}_z$  es amarillo si  $f(z) \in \widehat{\mathbb{C}}_t$  es amarillo.

Para  $f$  un polinomio de grado 2, el mosaico que se obtiene es como el siguiente:



**Teorema 2.** Cada polinomio  $f$  da lugar a un mosaico en  $\widehat{\mathbb{C}}$  con las siguientes características:

1. Si el grado de  $f$  es  $d$ , hay  $d$  regiones de color rojo y  $d$  regiones de color amarillo.
2. Las esquinas de las regiones son los puntos críticos de  $f$ .

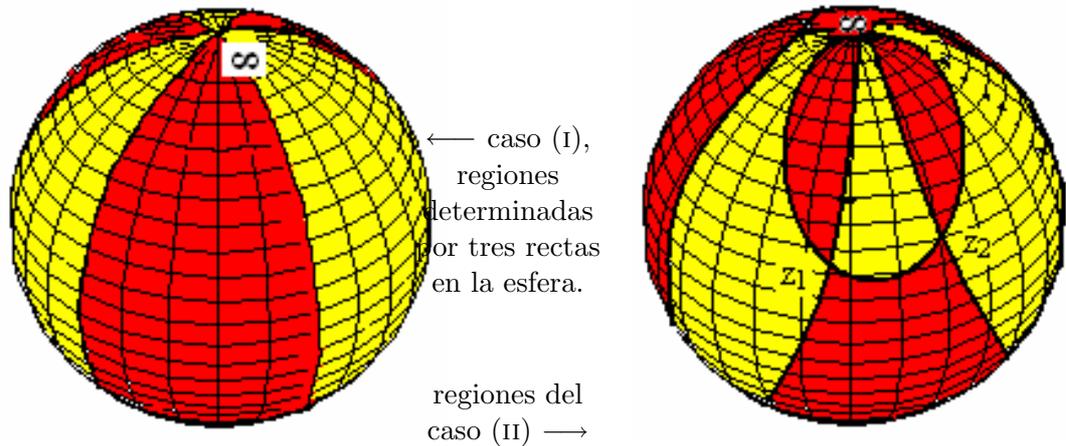
En general, dado un polinomio de grado  $d$ , el número de mosaicos distintos al que da lugar está en correspondencia con las particiones del número  $d - 1$ .

Para el caso de un polinomio  $f$  de grado tres, por medio de una transformación de Möbius, se puede lograr que sus puntos críticos estén sobre el eje real; de manera que  $\Gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_t$  sea el meridiano correspondiente a dicho eje.

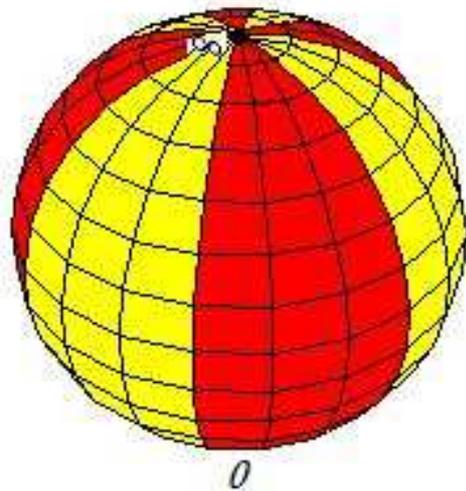
**Lema.** Sea  $f(z) : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_t$  un polinomio de grado tres. Entonces la preimagen del eje real está constituida por:

- (I) Tres rectas, (cuando  $f(z) = \lambda(z - z_0)^3$  o  $f(z) = z^3 \pm a_0^3$ ), las cuales se intersecan en el cero de  $f'(z)$ .
- (II) Una recta y una hipérbola, (cuando  $f(z)$  tiene un cero doble o  $f(z)$  tiene tres ceros simples), cuyos puntos de intersección finitos son las raíces de  $f'(z)$ .

Por lo tanto los mosaicos en  $\widehat{\mathbb{C}}_z$  se ven como:

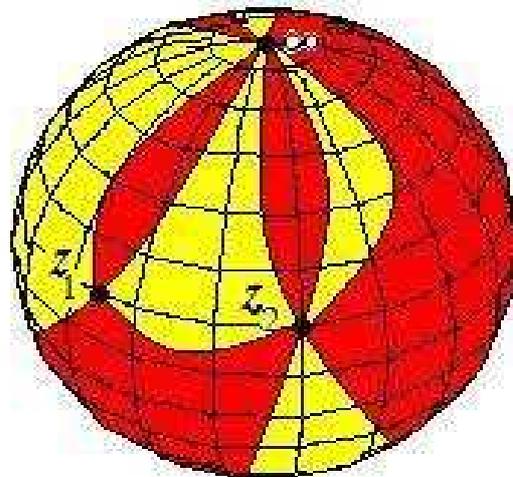


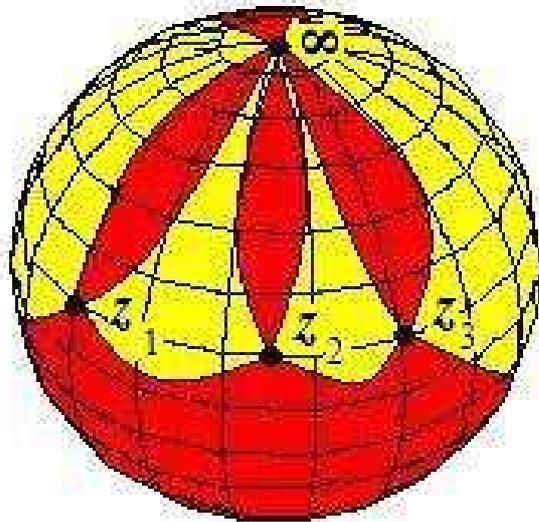
En el caso de un polinomio de grado 4, los mosaicos que se obtienen son:



← Este mosaico se obtiene en el caso que  $f$  tenga un cero de multiplicidad 4 o cuando  $f'$  tiene un único cero.

Este mosaico → corresponde al caso en que  $f'$  tiene dos ceros, uno de ellos de multiplicidad 2.





— Este mosaico se da cuando  $f'$  tiene 3 ceros simples.

Los mosaicos descritos son un reflejo discreto del objeto analítico  $f$ .

Sorprendentemente, Felix Klein utilizó estos mosaicos, como puede observarse en sus notas personales, ahora conocidas como “Los protocolos de Klein”. En la siguiente página se muestra una imagen de dichas notas.

Un reto para los que gusten de “pintar mosaicos” sería construir los correspondientes para funciones como  $e^z$ , por ejemplo; o funciones racionales, trigonométricas, etc.

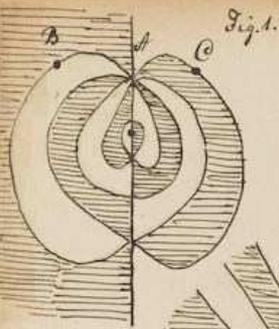
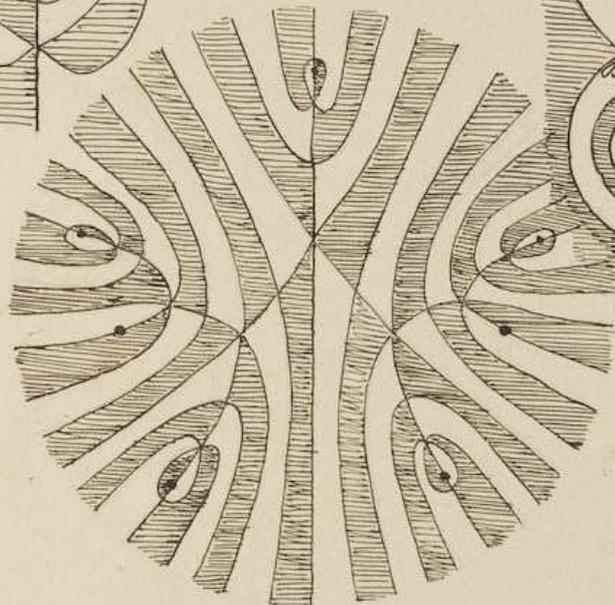
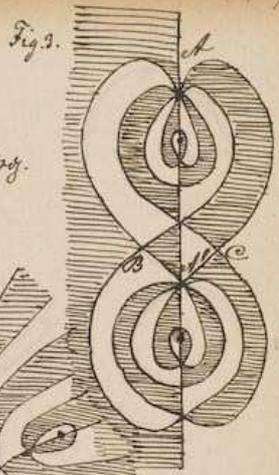


Fig. 2.  
Riemannsche Fläche  
für Transformation 25. Ordg.



$t_{25}$  dargestellt lautet:  $\sqrt[5]{\frac{-11+2t_5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{t_5}{5} - (11+2t_5)\right) \left(t_5 - (11-2t_5)\right)}}$ , wobei diese die Verzweigung in  $\delta$  dem Werte  $t_5 = \infty$  entspricht. Man bildet nun dieser 5wertigen Function eine nur  $\delta$ -wertige, wenn wir eine symmetrische Function dieser Wurzel, <sup>selbst</sup> geschrieben in den beiden Vorzeichen der Quadraturwurzel  $P(\sqrt{V_+}, \sqrt{V_-})$ . fragt man nun, hinaus, dass umgekehrt  $t_5$  sich durch  $t_{25}$  rational ausdrücken soll

## Referencias

- [1] Ahlfors L., *Complex Analysis*. McGraw-Gill, U.S.A. (1966).
- [2] Devaney Robert L., *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. Addison Wesley, U.S.A. (1992).
- [3] Kosen Dexter & Stefánsson Kjartan, *Computing the Newtonian graph*. J. Symbolic Computation Vol. 24, (1997), 125 – 136.
- [4] Neuberger J.W., *Continuous Newton's Method for Polynomials*. The Mathematical Intelligencer Vol. 21(3), (1999), 18 – 23.
- [5] Remmert, Reinhold. *Theory of Complex Functions*. Springer-Verlag, U.S.A. (1991).
- [6] Libraries without walls, a project of the Bladyslaw Poniecki Charitable Foundation, Inc., "*Felix Klein Protocols*", [en línea], <http://www.librarieswithoutwalls.org/klein.html>, (2006).