ESTABILIDAD DEL HAZ TANGENTE, ENDOMORFISMOS Y CAMPOS VECTORIALES

LETICIA BRAMBILA–PAZ y JESÚS MUCIÑO–RAYMUNDO
Departamento de Matemáticas,
UAM–Iztapalapa,
09340 México D. F.
e-mail: lebp@xanum.uam.mx

e

Instituto de Matemáticas,
Unidad Morelia, UNAM,
Morelia 58000, Michoacán.
e-mail: muciray@servidor.uman.mx

Resumen. Sea X una curva algebraica no singular sobre $\mathbf{C}$ de género $g \geq 2$. Un objeto naturalmente asociado a X es $\mathcal{M}_\zeta$ el espacio moduli de haces vectoriales estables sobre X de grado d, rango n y con haz determinante ζ. En este trabajo se muestra que el haz tangente $T_\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}_\zeta$ es estable si y sólo si la variedad obtenida al proyectivizar sus fibras $P(T_\mathcal{M})$ no admite campos vectoriales holomorfos. También se muestra que existe una correspondencia entre la existencia de endomorfismos no triviales en un haz holomorfo E y la existencia de campos holomorfos en el haz proyectivizado $P(E)$ que son tangentes a las fibras.

1. Introducción.

Sea Y una variedad algebraica de dimensión m y H un haz lineal amplio sobre Y. Si E es un haz vectorial sobre Y entonces el grado de E con respecto a H se define como

$$d_H := c_1(E) \cdot [H]^{m-1} ,$$

y la inclinación de E con repecto H será

$$\mu_H(E) := d_H(E)/rk(E) ,$$

donde $rk(E)$ es el rango de E. Un haz sobre Y se dice que es estable con respecto a H ó $H-$estable si para toda subgavilla F libre de torsión con cociente libre de torsión se tiene

$$\mu_H(F) < \mu_H(E) .$$

La importancia del concepto estabilidad reside, en que los haces estables son aquellos para los cuales existe un espacio que parametriza sus deformaciones, el llamado espacio de moduli de haces estables.

AMS Mathematical Subject Classification: 14.
El primer autor es miembro del VBAC Research Group of Europroj. Ambos autores son apoyados por CONACYT 3231-E9307.

El haz E es H-poliestable si es la suma directa de haces H-estables. Un haz es simple si y sólo si los únicos endomorfismos que admite son multiplos escalares de la identidad, o sea

$$H^0(Y, E \otimes E^*) \cong End(E) \cong \mathbf{C}\ .$$

Es bien sabido que un haz H–estable es necesariamente simple, sin embargo el inverso no es verdadero.

En general es muy difícil determinar si un haz es estable ó no. Resultados de S. Donaldson, K. Ulhenbeck, S. T. Yau etc, muestran que la estabilidad de un haz es equivalente a la existencia una métrica Hermite–Einstein en el haz. Por ejemplo una conexión plana hermitiana y algunas soluciones de las ecuaciones de Yang-Mills son ejemplos de métricas de Hermite–Einstein.

Sea X una curva algebraica no singular sobre $\mathbf{C}$ de género $g \geq 2$. Un objeto naturalmente asociado a X es $\mathcal{M}_\zeta$ el espacio moduli $\mathcal{M}_\zeta(n,d)$ de haces vectoriales sobre X de grado d, rango n y con determinante $\zeta \in Pic_d(X)$. Si d y n son primos entre si, entonces $\mathcal{M}_\zeta$ es una variedad algebraica no singular sobre $\mathbf{C}$, lo cual siempre supondremos. Denotaremos por $T_\mathcal{M}$ el haz tangente a $\mathcal{M}_\zeta$.

Diversos autores han estudiado las variedades $\mathcal{M}_\zeta$, desde distintos puntos de vista. En particular P. Newstead ha construido modelos concretos para $\mathcal{M}_\zeta$ para ciertos valores de d, n, estudiando también sus propiedades topológicas, ver [N], M. S. Narashiman y S. Ramanan han estudiado las deformaciones de $\mathcal{M}_\zeta$ como variedad compleja, sus grupos de automorfismos [NR], L. Brambila y P. Newstead han descrito sus subvariedades de Brill-Noether [BN], etc. Un problemas abierto en el estudio de la geometría de $\mathcal{M}_\zeta$ es determinar si $T_\mathcal{M}$ es un haz estable ó no. El primer propósito de este trabajo es presentar una técnica para atacar dicho problema, ver secciones 2 y 3.

El resultado principal 3.1, afirma que la estabilidad de dicho haz es equivalente con la no existencia de campos vectoriales holomorfos en la variedad que resulta de proyectivizar las fibras de $T_\mathcal{M}$.

Para lo anterior nuestra herramienta es el cálculo de ciertos grupos de cohomología para $\mathcal{M}_\zeta$. Por otra parte aplicando ideas básicas de grupos de transformaciones holomorfas y la descripción explícita de los campos holomorfos del espacio proyectivo, en la sección 4 se muestra que:

Dado E un haz vectorial holomorfo sobre Y una variedad algebraica no singular sobre $\mathbf{C}$. El haz E es simple si y sólo si no existen campos vectoriales holomorfos en el haz proyectivizado $P(E)$ que sean tangentes a las fibras.

La existencia de dichos campos es trivialmente una obstrucción a la estabilidad del haz E.

Quisieramos agradecer al réferi sus comentarios.

2. Grupos de cohomología.

Recordemos que en general la H–estabilidad de un haz depende del haz amplio H que se elija. Sin embargo en nuestro caso para $T_\mathcal{M}$ se tiene que $Pic_d(\mathcal{M}_\zeta) \cong \mathbf{Z}$, ver

[NR], donde el generador es el divisor theta θ_ζ. Ya que θ_ζ–estable es lo mismo que $a\theta_\zeta$–estable, para $a \in \mathbf{Z}$, nos referiremos a la estabilidad de $T_{\mathcal{M}}$ sin hacer mención con respecto a que divisor.

P. E. Newstead en [N] demuestra que $T_{\mathcal{M}}$ es poliestable, por lo tanto se tiene la siguiente:

Observación 2.1 *$T_{\mathcal{M}}$ es estable si y sólo si es simple.*

Demostración: Como $T_{\mathcal{M}}$ es poliestable $T_{\mathcal{M}}$ es de la forma

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$$

donde E_i es estable para toda $1 \leq i \leq r$. $T_{\mathcal{M}}$ es estable si y sólo si $r = 1$. Si consideramos los endomorfismos de $T_{\mathcal{M}}$ tenemos que

$$\mathbf{C}^r \cong \oplus_{i=1}^r End(E_i) \subset End(T_{\mathcal{M}}) \ .$$

Por lo tanto, si $T_{\mathcal{M}}$ es simple, o sea si $End(T_{\mathcal{M}}) \cong \mathbf{C}$, entonces $r = 1$ y por lo tanto el haz es estable. □

En esta sección calcularemos ciertos grupos que nos permitirán demostar el resultado que queremos. En general, si E es un haz vectorial sobre una variedad Y y $h : P(E) \to Y$ es el haz fibrado que resulta de la proyectivización de E se tiene la siguiente sucesión de haces vectoriales sobre $P(E)$:

$$0 \to \mathcal{O} \to H \otimes h^*E \to T_h \to 0$$

donde H es el haz de hiperplanos y T_h el haz tangente a las fibras.

Observación 2.2 Cabe mencionar que en la situación anterior:
i) $h_*(T_h) = ad(E)$,
ii) $h_*(H) = E^*$, ver [NR].

En particular si E es el haz tangente $T_{\mathcal{M}}$ y consideramos $P(T_{\mathcal{M}}) \xrightarrow{h} \mathcal{M}_\zeta$ tenemos la sucesión exacta:

$$0 \to \mathcal{O} \to H \otimes h^*T_{\mathcal{M}} \to T_h \to 0 \qquad (1) \ ,$$

de haces sobre $P(T_{\mathcal{M}})$. También de la sucesión de Euler tenemos la sucesión:

$$0 \to T_h \to T_{P(T_{\mathcal{M}})} \to h^*(T_{\mathcal{M}}) \to 0 \qquad (2) \ ,$$

de haces sobre $P(T_{\mathcal{M}})$.

Proposición 2.3 $H^0(\mathcal{M}_\zeta, T_{\mathcal{M}} \otimes T^*_{\mathcal{M}}) \cong H^0(P(T_{\mathcal{M}}), h^*(T_{\mathcal{M}}) \otimes H)$.

Demostración: Se tiene que $P(T_{\mathcal{M}}) \xrightarrow{h} \mathcal{M}_\zeta$, por lo tanto

$$H^0(P(T_{\mathcal{M}}), h^*(T_{\mathcal{M}}) \otimes H) \cong H^0(\mathcal{M}_\zeta, T_{\mathcal{M}} \otimes h_*H) \ .$$

Por la Observación 2.2, ii) se tiene

$$H^0(\mathcal{M}_\zeta, T_{\mathcal{M}} \otimes h_*H) \cong H^0(\mathcal{M}_\zeta, T_{\mathcal{M}} \otimes T^*_{\mathcal{M}}) \ . \qquad □$$

Proposición 2.4 $H^0(P(T_{\mathcal{M}}),T_{P(T_{\mathcal{M}})}) \cong H^0(P(T_{\mathcal{M}}),T_h)$.

Demostración: Usando nuevamente que $P(T_{\mathcal{M}}) \xrightarrow{h} \mathcal{M}_\zeta$ se tiene que

$$H^0(P(T_{\mathcal{M}}),h^*(T_{\mathcal{M}})) \cong H^0(\mathcal{M}_\zeta,T_{\mathcal{M}}) ,$$

pero $H^0(\mathcal{M}_\zeta,T_{\mathcal{M}}) = 0$, (ver [NR]). Entonces por la sucesión exacta (2) se tiene $H^0(P(T_{\mathcal{M}}),T_{P(T_{\mathcal{M}})}) \cong H^0(P(T_{\mathcal{M}}),T_h)$. □

3. Resultado principal.

En esta sección demostraremos el teorema que nos interesa.

Teorema 3.1 *$T_{\mathcal{M}}$ es estable si y sólo si $P(T_{\mathcal{M}})$ no admite campos vectoriales holomorfos.*

Demostración: De la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O} \to H \otimes h^*T_{\mathcal{M}} \to T_h \to 0 \tag{1}$$

tenemos la sucesión de cohomología:

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(P(T_{\mathcal{M}}),\mathcal{O}) \xrightarrow{i} H^0(P(T_{\mathcal{M}}),h^*(T_{\mathcal{M}}) \otimes H) \to H^0(P(T_{\mathcal{M}}),T_h) \to \\ \to H^1(P(T_{\mathcal{M}}),\mathcal{O}) \to \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

Donde $H^i(P(T_{\mathcal{M}}),\mathcal{O}) = 0$ para $i \neq 0$ y $H^0(P(T_{\mathcal{M}}),\mathcal{O}) = \mathbf{C}$. Por la Proposición 2.3 tenemos que

$$H^0(\mathcal{M}_\zeta,T_{\mathcal{M}} \otimes T^*_{\mathcal{M}}) \cong H^0(P(T_{\mathcal{M}}),h^*(T_{\mathcal{M}}) \otimes H) .$$

Por lo tanto, si suponemos que $T_{\mathcal{M}}$ es estable tenemos que es simple y se sigue que

$$H^0(\mathcal{M}_\zeta,T_{\mathcal{M}} \otimes T^*_{\mathcal{M}}) \cong \mathbf{C} ,$$

lo cual implica que el morfismo

$$i : H^0(P(T_{\mathcal{M}}),\mathcal{O}) \to H^0(P(T_{\mathcal{M}}),h^*(T_{\mathcal{M}}) \otimes H)$$

es un isomorfismo. Por lo tanto $H^0(P(T_{\mathcal{M}}),T_h) = 0$ y por la Proposición 2.4 $H^0(P(T_{\mathcal{M}}),T_{P(T_{\mathcal{M}})}) = 0$, ó sea $P(T_{\mathcal{M}})$ no admite campos vectoriales holomorfos.

Inversamente, si $P(T_{\mathcal{M}})$ no admite campos vectoriales holomorfos entonces

$$H^0(P(T_{\mathcal{M}}),T_h) \cong H^0(P(T_{\mathcal{M}}),T_{P(T_{\mathcal{M}})}) = 0 ,$$

y por lo tanto

$$\mathbf{C} \cong H^0(P(T_{\mathcal{M}}),\mathcal{O}) \cong H^0(P(T_{\mathcal{M}}),h^*(T_{\mathcal{M}}) \otimes H) .$$

Entonces el resultado se sigue de 2.1 y 2.3. □

Recordando los elementos de la geometría de $\mathcal{M}_\zeta$ que se han utilizado llegamos al siguiente corolario que muestra como estas técnicas pueden aplicarse a otros casos.

Corolario 3.2 *Sea Y una variedad algebraica sobre $\mathbf{C}$ no singular, donde H es un haz amplio sobre Y, supóngase que:*
i) *Y no posee campos vectoriales holomorfos,*
ii) *TY es H–poliestable.*
Entonces TY es H–estable si y sólo si el haz proyectivizado $P(TY)$ no admite campos vectoriales holomorfos. □

El interés de lo anterior rádica en que muy pocas variedades proyectivas poseen campos vectoriales holomorfos (ver por ejemplo [CHK], [K], [M], donde se describen algunas obstrucciones a la existencia de campos vectoriales holomorfos). Esto es la hipótesis (i) se cumple en muchos casos. Más aún la no existencia de campos vectoriales en la variedad es una condición necesaria para la estabilidad (aunque no suficiente), ver [S].

4. Campos holomorfos y automorfismos.

Otra consecuencia natural de nuestras técnicas son los siguientes resultados en haces vectoriales arbitrarios.

Antes recordemos los siguientes hechos sobre, el grupo de biholormorfismos y campos vectoriales holomorfos en espacios proyectivos.

Observación 4.1 *El grupo de biholomorfismos de una variedad compleja y compacta es un grupo de Lie de dimensión finita y su álgebra de Lie es isomorfa al espacio vectorial de los campos vectoriales holomorfos en la variedad.* □

Observación 4.2 i) *Un campo vectorial holomorfo en $\mathbf{C}^m$ determina un campo vectorial holomorfo en $\mathbf{C}P^{m-1}$ si y sólo si puede expresarse como $F = \Sigma_i^m A_i(z_1, \ldots, z_m)\frac{\partial}{\partial z_i}$ donde cada A_i es una función lineal. Estos campos están canónicamente identificados con la funciones lineales en $\mathbf{C}^m$.*
ii) *El campo radial $R = \Sigma z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ se proyecta al campo nulo en $\mathbf{C}P^{m-1}$.*
iii) *El álgebra de Lie del grupo de biholomorfismos de $\mathbf{C}P^{m-1}$ es isomorfa al espacio vectorial de matrices complejas de $m \times m$ modulo múltiplos de la matriz identidad.* □

La demostración de estos hechos bien conocida, ver por ejemplo [K] pág. 77 y [GH] pág 409.

Proposición 4.3 *Sea $\pi : E \to Y$ una haz vectorial holomorfo arbitrario sobre Y. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
i) *E posee un endomorfismo no trivial.*
ii) *El haz proyectivizado $P(E)$ admite campos vectoriales holomorfos, tangentes a las fibras.*
iii) *El haz admite una familia de automorfismos no triviales (esto es endomorfismos que son de rango máximo en cada fibra de E, pero no múltiplos de la identidad), parametrizada por $\mathbf{C}$.*

Demostración: Que (i) implica (ii), es posible probarlo usando las sucesiones exactas de §2. Otra prueba mediante la contrucción explícita de dicho campo y que no requiere información adicional sobre Y es como sigue. Sea R el campo vectorial holomorfo en el espacio tangente a E que proviene de la $\mathbf{C}^*$–acción multiplicativa en las fibras de E. Es fácil ver que dicho campo siempre está bien definido. Más aún R puede expresarse en cada fibra E_p, para $p \in Y$, como la función lineal Id esto es:

$$R = \Sigma_i^n \; z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \; ,$$

donde z_i son coordendas lineales de E_p.

Si $A \in End(E)$ es un endomorfismo no trivial. Entonces en cada fibra E_p podemos definir $\widetilde{F} = A \circ R$, donde "$\circ$" es la composición de funciones lineales.

Para cada E_p la función lineal resultante puede interpretarse como un campo lineal holomorfo $\widetilde{F}(p)$ en E_p. Dicho campo baja al espacio proyectivo correspondiente en $P(E)$. El campo obtenido es nunca nulo pues A no es un multiplo de la identidad. Con lo que obtenemos un campo holomorfo y no nulo $F(p)$ en el espacio proyectivo $P(E_p)$. Es fácil mostrar que F depende holomorfamente de p. Lo que implica (ii).

Para mostar (ii) implica (iii), basta recordar que los campos vectoriales holomorfos en el espacio proyectivo complejos son tales que al integrarlos se obtiene una familia de automorfismos complejos de dicho espacio proyectivo, usando 4.1. Aplicando el proceso de integración al campo F en E se obtiene una familia de automorfismos holomorfos del haz.

Las otras implicaciones son inmediatas. □

Una consecuencia inmediata de lo anterior.

Corolario 4.4 *Sea $p : E \to Y$ un haz vectorial holomorfo. Sea $Aut^0(E) = Aut(E)/\mathbf{C}^*$, el grupo de automorfismos del haz que no provienen de multiplicación por una constante no nula en $\mathbf{C}^*$. Dicho grupo tiene como álgebra de Lie al espacio vectorial de campos vectoriales holomorfos tangentes a las fibras del haz proyectivizado $P(E)$.*

Demostración: Basta aplicar 4.1 a la variedad compacta $P(E)$, tenemos que el álgebra de Lie de biholomorfismos de $P(E)$ esta formada por sus campos vectoriales holomorfos.

Como sólo estamos interesados en biholomorfismos de $P(E)$ que son lineales en las fibras, el anterior resultado nos proporciona como álgebra de Lie del grupo $Aut(E)$ a los campos vectoriales holomorfos tangentes y lineales a las fibras de E, (aplicando 4.2).

Los endomorfismos triviales en $Aut(E)$, es decir aquellos que provienen de multiplicación por elementos de $\mathbf{C}^*$ dan origen al campo radial R, mismo que está contenido en el núcleo de la función de proyección $\Pi : E \to P(E)$ que define la proyectivizacion del haz. Por lo que el álgebra de Lie buscada no contiene al campo radial R. □

Como se habrá dado cuenta el lector, el problema de la estabilidad del haz $T_{\mathcal{M}}$ se reduce a calcular ciertos grupos de cohomología como son:

i) $H^0(P(T_{\mathcal{M}}), h^*(T_{\mathcal{M}}) \otimes H)$,
ii) $H^0(P(T_{\mathcal{M}}), T_h)$,
iii) $H^0(P(T_{\mathcal{M}}), T_{P(T_{\mathcal{M}})})$ etc.

Donde estos haces están relacionados por las sucesiones

$$0 \to \mathcal{O} \to H \otimes h^* T_{\mathcal{M}} \to T_h \to 0$$

y

$$0 \to T_h \to T_{P(T_{\mathcal{M}})} \to h^*(T_{\mathcal{M}}) \to 0 \ .$$

Por ejemplo, sabemos que $H^0(P(T_{\mathcal{M}}), T_h) \cong H^0(\mathcal{M}_\zeta, ad(T_{\mathcal{M}}))$. Por lo tanto, si $H^0(P(T_{\mathcal{M}}), T_h) = 0$ entonces $T_{\mathcal{M}}$ es simple y por lo tanto estable. Sin embargo no es fácil calcular dichos grupos y se espera que en un próximo artículo se pueda dar más información sobre estos grupos.

Por otra parte, para un haz vectorial arbitrario $\pi : E \to Y$ sobre una variedad algebraica no singular, podemos resumir las relaciones entre H–estabilidad, existencia de endomorfismos no triviales y campos vectoriales holomorfos en $P(E)$ tangentes a las fibras como sigue:

i) E es H–Estable $\Rightarrow$ E es simple $\iff$ no existen campos holomorfos.

ii) Existencia de campos holomorfos $\iff$ E no es simple $\Rightarrow$ E no es H–estable.

Por lo que la existencia de campos vectoriales holomorfos tangentes a las fibras determinan una obstrucción a la H–estabilidad del haz.

Bibliografía

1. L. Brambila–Paz, P. Newstead, *Subvariedades del espacio moduli*, Aport. Mat. Comunicaciones 16 (1995) 43–53.
2. J. Carrell, A. Howard, C. Kosniowski, *Holomorphic vector fields on complex surfaces*, Math. Ann. 204 (1973), 73–81.
3. Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley–Interscience (1978).
4. S. Kobayashi, *Transformation groups in Differential Geometry*, Springer–Verlag (1972).
5. Y. Matsushima, *Holomorphic vector fields on complex Kahler manifolds*, Regional Conf. Series in Math. No. 7, (1971) Amer. Math. Soc.
6. P.E. Nestead, Comunicación personal.
7. P. Newstead, *Introduction to Moduli problems and orbit spaces*, TATA Lectures Springer–Verlag (1978).
8. M.S. Narashimhan, S. Ramanan, *The deformation of the moduli space of vector bundles on a curve*, Ann. of Math. (2), 101, (1975) 391–417.
9. S. Subramanian, *Stability of the tangent bundle and existence of a Kahler–Einstein metric*, Math. Ann. 291 (1991), 573–577.