Aportaciones Matemáticas Serie Comunicaciones **16** (1995) 173–178

Estabilidad de haces vectoriales en productos de variedades

L. Brambila–Paz
Departamento de Matemáticas,
UAM-Iztapalapa,
093400, México D. F.

y

J. Muciño Raymundo
Instituto de Matemáticas,
UNAM, México
04510 México D. F.
y
Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT),
36000, Guanajuato, Gto.
MEXICO

Resumen. Dada una polarización en una variedad algebraica, se dice que un haz es estable (con respecto a la polarización) si la inclinación de todas sus subgavillas libres de torsión es menor que la inclinación del haz. Un problema en geometría algebraica es determinar cuando un haz es estable. Se da un criterio para este problema suponiendo que la base del haz es el producto de dos variedades. Se demuestra que un haz es estable en el producto si es estable en cada uno de los factores.

El concepto de *espacio moduli* aparece en geometría algebraica cuando se consideran problemas de clasificación. Esto es, dada una colección de objetos y una relación de equivalencia, se quiere dar una estructura de variedad al conjunto de clases de equivalencia de tal manera que "refleje" la estructura algebro-geométrica de los objetos. A esta variedad se le llama espacio moduli.

D. Mumford en [M], demuestra que si la relación está dada por la acción de ciertos grupos entonces para ciertos objetos, que él llama estables, siempre existe el espacio moduli y es una variedad cuasi-proyectiva.

Cuando los objetos son haces vectoriales, M.S. Narasimhan y C. S. Seshadri en [N-S] dan una definición de haces estables en términos de la inclinación del haz y de su subgavillas. S. K. Donaldson en [D], y K. K. Uhlenbeck, S. T. Yau en [U-Y] demuestran que la condición de estabilidad en un haz es equivalente a la existencia de una conexión con curvatura de tipo Hermite–Einstein (una generalizacion de las

Realizado como parte del proyecto CONACYT 3231-E9307. Clasificación AMS 14.

ecuaciones de auto dualidad). La anterior interpretación permite desarrollar una fuerte interacción entre la teoría de haces estables y los conceptos de instantones y estructuras diferenciables en cuatro variedades, ver [F-M].

Desafortunadamente determinar si un haz holomorfo dado es estable es un problema en general muy difícil. Desde el punto de vista algebraico requiere estudiar la inclinación de todas las subgavillas del haz, mientras que el hallar una conexión con curvatura Hermite-Einstein involucra la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en el haz.

El problema de describir los espacios de moduli de haces estables es poco conocido hoy día. La existencia de los espacios de moduli de haces vectoriales sobre curvas fue demostrada por R. S. Narasimhan y C. S. Seshadri en [N-S] e incluso hay resultados cuando la curva base es singular [S]. Sin embargo para variedades de dimensión mayor hay pocas descripciones.

El objetivo de esta nota es presentar un criterio para determinar la estabilidad de un haz suponiendo que la base del haz es un producto de variedades. Ello es un primer paso para tratar de relacionar el espacio de moduli de haces estables sobre un producto con los espacios de moduli sobre cada uno de los factores.

Por ejemplo, la variedad de Picard $Pic(X)$ es el espacio moduli de haces lineales sobre X. Si Y es otra variedad algebraica irreducible no singular y conexa entonces $Pic(X \times Y) = Pic(X) \times Pic(Y)$ si $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ (ver [H]). Sea $\mathcal{M}_{(n,d)}(X)$ el espacio moduli de haces estables de rango n y grado d con respecto a una polarización H. Si consideramos el espacio moduli $\mathcal{M}_{(n,d)}(X)$ como una generalización de la variedad de Picard, es natural peguntar que relación hay entre haces estables sobre un producto y los haces estables en cada uno de los factores. Se quisiera dar condiciones para que

$$\mathcal{M}_{(n,d)}(X \times Y) = \mathcal{M}_{(n,d')}(X) \times \mathcal{M}_{(n,d'')}(Y) .$$

A este respecto no se sabe nada, exceptuando para polarizaciones triviales. Daremos aquí un criterio que relaciona haces estable sobre un producto de variedades con los haces estables en cada uno de los factores.

En la primera sección daremos las definiciones necesarias y veremos la estabilidad en productos de curvas $C_1 \times C_2$. Demostraremos que una condición suficiente para que un haz sea estable en el producto es que sea estable en cada uno de los factores (ver Proposición 1.1.). Esto nos permite determinar inmersiones de las curvas en $\mathcal{M}_{(n,d)}(C_i)$, $i = 1, 2$. En §2, generalizaremos la Proposición 1.1 con lo que tendremos un criterio para saber cuando un haz es estable sobre un producto en general (ver [B-B-N]). Esto nos da más información sobre como relacionar $\mathcal{M}_{(n,d)}(X \times Y)$ con $\mathcal{M}_{(n,d')}(X)$ y $\mathcal{M}_{(n,d'')}(Y)$ que es en lo que estamos interesados.

§1 -. ESTABILIDAD

Durante este reporte al decir variedad estaremos entendiendo una variedad algebraica irreducible no singular conexa proyectiva sobre $\mathbf{C}$, a menos que se especifique otra cosa.

Sea X una variedad y H un haz lineal sobre X. Si para cada punto $x \in X$ existe al menos una sección $s \in H^0(X, H)$ tal que $s(x) \neq 0$, entonces existe una función $\phi_H : X \to Proy(H^0(X, H))$. Se dice que H es *muy amplio* si ϕ_H es un encaje. Un haz lineal H es *amplio* si para algún entero $n \geq 1, H^{\otimes n}$ es muy amplio.

Una *polarización en* E es la primera clase de Chern $c_1(H)$ de un haz amplio H. Por abuso de notación, se considera al haz H como la polarización. El tipo de la polarización es precisamente el tipo de H.

Sea X una variedad de dimensión n con polarización H. Si E es un haz vectorial sobre X, el *grado* de E, con respecto a la polarización H es :

$$d_H(E) := c_1(E) \cdot [H]^{n-1}$$

donde $c_1(E)$ es la primera clase de Chern. La *inclinación (con respecto a* H) de E, que se denota $\mu_H(E)$, es el número racional

$$\mu_H(E) := d_H(E)/rk(E),$$

donde $rk(E)$ es el rango de E.

Se dice que un haz E es H-*estable* (resp. H-*semiestable*) si para toda subgavilla $F \subset E$ no-trivial y libre de torsión con $rk(F) < rk(E)$ la inclinación de F es menor (resp. menor o igual) que la inclinación de E, esto es

$$\mu_H(F) < \mu_H(E) \qquad (\text{resp. } \mu_H(F) \leq \mu_H(E)) \,.$$

Denotaremos por $\mathcal{M}_{(n,d)}(X)$ el espacio moduli de haces H-estables sobre X de grado d y rango n. Por los resultados de Mumford en geometría invariante (ver [M]), se tiene que $\mathcal{M}_{(n,d)}(X)$ es una variedad cuasi-proyectiva y se obtiene una compactificación al agregar los haces H-semiestables.

Cuando quede fija la polarización, omitiremos los subíndices H y sólo hablaremos de estable en vez de H-estable.

Sea C una curva algebraica irreducible proyectiva no-singular de género $g \geq 1$ sobre $\mathbf{C}$. La *polarización canónica* en C está dada por el haz cotangente K. Por lo que en este caso, el grado de un haz vectorial E sobre C está dado por la clase de Chern del haz determinante asociado $det(E)$, esto es $d(E) = c_1(E) = c_1(det(E))$. En este caso, por ser C una curva se tiene que E es estable (resp. semiestable) si para todo subhaz $F \subset E$ propio $\mu(F) < \mu(E)$ (resp. $\mu(F) \leq \mu(E)$). Y se tiene que $\mathcal{M}_{(n,d)}(C)$ es una variedad cuasi-proyectiva de dimensión $n^2(g-1)+1$ (ver [N-S], [S]). Cuando d y n son coprimos, existe la familia universal $\mathcal{U}$ parametrizada por $\mathcal{M}_{(n,d)}(C)$ (ver [N-R]).

Consideremos dos curvas C_1 y C_2 algebraicas irreducibles proyectivas no singulares de género $g \geq 2$ sobre $\mathbf{C}$, sean $p_i : C_1 \times C_2 \to C_i$, $i = 1, 2$ las proyecciones en ambos factores. En general tenemos que $p_1^* Pic(C_1) \otimes p_2^* Pic(C_2) \subset Pic(C_1 \times C_2)$, por lo que una polarización en $C_1 \times C_2$ está dada por $H = aK_1 + bK_2$ con $a, b > 0$, donde K_i es la polarizacion canónica en C_i, para $i = 1, 2$. Los haces H-estables en $C_1 \times C_2$ no son necesariamente imagenes inversas ("pull-back") de haces estables en cada uno de los factores. En general, la imagen inversa de un haz estable no tiene por que ser estable, tampoco si tomamos imagenes directas. Por ejemplo, tomemos el haz de Poincaré $\mathcal{L}$ sobre $C \times Pic_0(C)$. $\mathcal{L}$ es un haz lineal y por lo tanto estable, sólo recientemente se ha demostrado para algunos casos que la imagen directa bajo la proyección de $\mathcal{L}$ a $Pic_0(C)$ es estable (ver [E-L]). La demostración utiliza fuertemente las propiedades universales de $\mathcal{L}$, por lo que no se puede generalizar para cualquier haz lineal. En la siguiente Proposición daremos un criterio para saber cuando un haz es estable en el producto de dos curvas .

PROPOSICION 1.1 *Sea E un haz vectorial sobre $C_1 \times C_2$ tal que para puntos genéricos $x \in C_1, y \in C_2$, las restricciones $E_x \cong E|_{x \times C_2}$ y $E_y \cong E|_{C_1 \times y}$ son semiestables entonces E es H-semiestable.*

Demostración: Sea $F \subset E$ una subgavilla de E. Como codim$(SingF) \geq 2$, podemos escoger $x \in C_1$ y $y \in C_2$ tales que F_x y F_y no tienen torsión y por lo tanto no alteran a $c_1(F_x)$ ó a $c_1(F_y)$.

El grado de E es:

$$\begin{aligned} d_H(E) &= c_1(E) \cdot [aK_1 + bK_2] \\ &= (c_1(E_x) + c_{1,1}(E) + c_1(E_y)) \cdot [aK_1 + bK_2] \\ &= c_1(E_x) \cdot bK_2 + c_1(E_y) \cdot aK_1 \\ &= d(E_x) + d(E_y) \end{aligned}$$

y por lo tanto la inclinación de E es $\mu_H(E) = (d(E_x)+d(E_y))/rk(E)$. Análogamente, el grado de F es $d_H(F) = d(F_x) + d(F_y)$ y la inclinación es $\mu_H(F) = (d(F_x) + d(F_y))/rk(F)$. Como E_x y E_y son estables en C_1 y en C_2 tenemos que $d(F_x)/rk(F) \leq d(E_x)/rk(E)$ y $d(F_y)/rk(F) \leq d(E_y)/rk(E)$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu_H(F) &= (d(F_x) + d(F_y))/rk(F) \\ &\leq (d(E_x) + d(E_y))/rk(E) \\ &= \mu_H(E) \end{aligned}$$

Lo que implica que E es H-estable. Q.E.D.

COROLARIO 1.2 *Si E_x ó E_y es estable entonces E es H-estable.*
Q.E.D.

NOTA 1.3 Obsérvese que la desigualdad

$$(d(F_x) + d(F_y))/rk(F) \leq (d(E_x) + d(E_y))/rk(E)$$

no implica que $d(F_x)/rk(F) \leq d(E_x)/rk(E)$ ó $d(F_y)/rk(F) \leq d(E_y)/rk(E)$ por lo que el converso de la Proposición no es cierto.

La Proposición 1.1 también nos está diciendo que si al haz E sobre $C_1 \times C_2$ lo consideramos como una familia de haces sobre C_i parametrizados por $C_j, i \neq j$, entonces, si las familias son de haces estables entonces el haz es H-estable, con $H = aK_1 + bK_2$. Por la propiedad universal del espacio moduli $\mathcal{M}_{(n,d)}(C_i)$ tendriamos un homomorfismo $\phi_E : C_j \to \mathcal{M}_{(n,d)}(C_i)$ de C_j en $\mathcal{M}_{(n,d)}(C_i)$, para i distinto de j.

Un homomorfismo $\phi : C_j \to \mathcal{M}_{(n,d)}(C_i)$ define una familia de haces estables sobre C_i parametrizados por C_j, la cual define un haz E sobre $C_i \times C_j$. Denotemos por $H(C_j, \mathcal{M}_{(n,d)}(C_i))$ el espacio de homomorfismos $\phi : C_j \to \mathcal{M}_{(n,d)}(C_i)$ tales que E es una familia de haces estables sobre C_i parametrizados por C_j. La Proposición 1.1, nos dice que existe un homomorfismo α de $H(C_j, \mathcal{M}_{(n,d)}(C_i))$ a $\mathcal{M}_{(n,d')}(C_i \times C_j)$. Se quiere dar condiciones para que este homomorfismo sea sobreyectivo.

§2 -. ESTABILIDAD EN PRODUCTOS

En esta sección generalizaremos la Proposición 1.1 para el producto de dos variedades.

TEOREMA 2.1. *Sea X y Y dos variedades de dimensión m y n respectivamente y L_X y L_Y polarizaciones en X y Y. Si $H = aL_X + bL_Y$ con $a, b > 0$ entonces un haz vectorial E sobre $X \times Y$ es H-estable si para puntos genéricos $x \in X$, $y \in Y$ se tiene que $E_x \cong E|_{x\times Y}$ y $E_y \cong E|_{X\times y}$ son respectivamente L_X-estable y L_Y-estable.*

Demostración: El grado con respecto a H de un haz E sobre $X \times Y$ está dado por $d_H(E) = c_1(E) \cdot [H]^{m+n-1}$. Nótese que

$$[H]^{m+n-1} = [aL_X + bL_Y]^{m+n-1} = [\lambda L_X^m \cdot L_Y^{n-1} + \beta L_X^{m-1} \cdot L_Y^n],$$

para algún $\lambda, \beta \geq 0$, ya que los demás términos son cero.

La primera clase de Chern de E está dada por

$$c_1(E) = c_1(E_x) + c_{1,1}(E) + c_1(E_y).$$

Por lo tanto, como $\lambda, \beta > 0$ tenemos que;

$$\begin{aligned} d_H(E) &= c_1(E) \cdot [H]^{m+n-1} \\ &= c_1(E) \cdot [aL_X + bL_Y]^{m+n-1} \\ &= (c_1(E_x) + c_{1,1}(E) + c_1(E_y)) \cdot [\lambda L_X^m \cdot L_Y^{n-1} + \beta L_X^{m-1} \cdot L_Y^n] \\ &= [c_1(E_x) \cdot L_Y^{n-1}] \cdot \lambda L_X^m + [c_1(E_y) \cdot L_X^{m-1}] \cdot \beta L_Y^n \ . \end{aligned}$$

Consideremos $F \subset E$ una subgavilla de E. Como $\mathrm{codim}(SingF) \geq 2$, podemos escoger $x \in X$ y $y \in Y$ tales que $SingF_x$ y $SingF_y$ tienen también codimensión mayor o igual a 2. Por lo que, la torsión de F_x o de F_y tiene soporte de codimensión ≥ 2 y por lo tanto no afecta a la primera clase de Chern $c_1(F_x)$ o $c_1(F_y)$. De donde, el grado de F está también dado por

$$d_H(F) = [c_1(F_x) \cdot L_Y^{n-1}] \cdot \lambda L_X^m + [c_1(F_y) \cdot L_X^{m-1}] \cdot \beta L_Y^n \ .$$

Como E_x y E_y son respectivamente L_X-estable y L_Y-estable, tenemos que $\mu_{L_X}(F_y) \leq \mu_{L_X}(E_y)$ y $\mu_{L_Y}(F_x) \leq \mu_{L_Y}(E_x)$. Y además $d_{L_X}(F_y) = c_1(F_y) \cdot [L_X^{m-1}]$ y $d_{L_Y}(F_x) = c_1(F_x) \cdot [L_Y^{n-1}]$ por lo que tenemos;

$$
\begin{aligned}
\mu_H(F) &= d_H(F)/rk(F) \\
&= ([c_1(F_x) \cdot L_Y^{n-1}] \cdot \lambda L_X^m + [c_1(F_y) \cdot L_X^{m-1}] \cdot \beta L_Y^n)/rk(F) \\
&\leq ([c_1(E_x) \cdot L_Y^{n-1}] \cdot \lambda L_X^m + [c_1(E_y) \cdot L_X^{m-1}] \cdot \beta L_Y^n)/rk(E) \\
&= \mu_H(E)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto E es H-estable. Q.E.D.

COROLARIO 2.2 *Si E_x o E_y es L_X o L_Y-estable entonces E es H-estable.* Q.E.D.

En términos de los resultados de Donaldson, Uhlenbeck y Yau el Teorema 2.1 nos dice que E sobre $X \times Y$ admite una conexión con curvatura de tipo Hermite-Einstein si para puntos genéricos $x \in X$, $y \in Y$ se tiene que $E_x \cong E|_{x \times Y}$ y $E_y \cong E|_{X \times y}$ son respectivamente admiten una conexión con curvatura de tipo Hermite-Einstein. Un problema interesante es dar la descripción explícita de dicha conexión.

REFERENCIAS

[B-B-N] V. Balaji, L Brambila-Paz, P. Newstead : *Stability of the Poincaré bundle.* Manuscrito.

[D] S. K. Donaldson : *Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles.* Proc. Lond. Math. Soc. 50 (1985) 1–26.

[F-M] R. Friedman, J. W. Morgan : *Smooth Four Manifolds and Complex Surfaces.* Springer–Verlag 1994.

[H] R. Hartshorne : *Algebraic Geometry.* Springer–Verlag 1977.

[M] D. Mumford : *Geometric Invariant Theory.* Springer–Verlag 1965.

[N-S] M. S. Narasimhan, C. S. Seshadri : *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface.* Ann. of Math. 82 (1965) 540–567.

[S] C. S. Seshadri : *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques.* Astérisque 96 (1982).

[U-Y] K. K. Uhlenbeck, S. T. Yau : *On the existence of Hermitian Yang-Mills connections on stable bundles.* Commun. Pure Appl. Math. 39 (1986) 257–293.