



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ASPECTOS TOPOLÓGICOS, ANALÍTICOS Y COMBINATORIOS
DEL ESPACIO DE POLINOMIOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

LEIDY JOHANNA GONZÁLEZ CELY

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JESÚS RUPERTO MUCIÑO RAYMUNDO

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM, CAMPUS MORELIA

MORELIA, MICH., MÉXICO

FEBRERO DE 2019

A Carmen y Jorgen.

«No olvides que lo que llamamos hoy realidad fue imaginación ayer.»

JOSÉ SARAMAGO,
El hombre duplicado

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer al Dr. Jesús Muciño porque sus enseñanzas, paciencia y dedicación han sido fundamentales para la culminación de este proyecto. Sus consejos me han ayudado a madurar como matemática y me han motivado a trabajar día a día.

Igualmente le agradezco a la Dra. Rita Jiménez, Dr. Edgardo Roldán, Dr. Carlos Cabrera y Dr. Abel Castorena. Los comentarios y sugerencias de cada uno de ustedes me ayudaron a consolidar conceptos matemáticos y mejorar este escrito.

También quiero darle las gracias al Dr. Ferrán Valdez, sus consejos matemáticos y apoyo a lo largo de este proceso fueron valiosos para que hoy este sueño sea una realidad. Los amigos en este tipo de ambientes constituyen una familia, por lo tanto, quiero reconocer el apoyo de todos mis compañeros y amigos Liliana, Alba, Karley, Yesenia, Alex, Natalia, Jaime, Vianey, Israel, Cenobio, Cesar, entre otros. A Jurgén un gracias especial por tanto amor y motivación durante todos estos años. Un agradecimiento enorme a Lidia González y Alejandro Romero por el apoyo incondicional, la compañía y el cariño.

Finalmente expreso mi gratitud a Conacyt, al Posgrado en Ciencias Matemáticas UNAM-UMISNH y al Centro en Ciencias Matemáticas UNAM Campes Morelia.

Índice general

Índice de notación	I
Introducción	IV
1. Una correspondencia entre mosaicos, gráficas planas y gráficas de Speiser	1
1.1. Algoritmo a la F. Klein para representar funciones racionales, a través de mosaicos y gráficas.	1
1.2. Gráficas de Speiser para funciones singulares complejo analíticas.	8
1.3. Correspondencia natural entre funciones singulares complejo analíticas y algunos objetos analíticos, geométricos.	10
2. Una correspondencia entre mosaicos $\mathfrak{M}$ dados por k-ágonos topológicos y funciones singulares complejo analíticas	13
2.1. Mosaicos a la H. A. Schwarz, R. Nevanlinna y G. V. Belyĭ.	13
3. Caracterización del espacio de polinomios genéricos	25
3.1. Una correspondencia entre mosaicos, gráficas planas y polinomios genéricos. . . .	25
3.1.1. Esquema general de la caracterización de gráficas realizables por polinomios genéricos.	28
3.2. Construcción de un polinomio genérico f a partir de una gráfica plana Γ	34
3.2.1. La noción de árbol de prueba.	34
3.2.2. Noción de árbol primo y su etiquetado de prueba.	37
3.2.3. Noción de árbol semi-primo y su etiquetado de prueba.	41
3.2.4. Descomposición de un árbol de prueba.	43
3.2.5. Un etiquetado de prueba para un árbol de prueba.	47
3.2.6. Construcción de un cubriente topológico ramificado f_{top} y por ende un polinomio genérico f	53
3.3. Conteo de clases de polinomios genéricos.	54
4. Constelaciones de la esfera y aplicación de Lyashko–Looijenga	59

4.1. De polinomios genéricos a constelaciones de la esfera.	59
4.2. Aplicación de Lyashko–Looijenga.	63
5. Enfoques futuros	67
5.1. Enfoques topológicos.	67
5.2. Enfoques combinatorios.	70
5.3. Enfoques analíticos.	70
Bibliografía	71

Abstract

Let $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ be a generic polynomial of degree $n \geq 2$, and let $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ be an oriented Jordan path running through its ramification values. A classical algorithm (probably attributed to F. Klein) determines from the above data a planar graph $f^{-1}(\gamma)$ and a tiling $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma)} \doteq \widehat{\mathbb{C}}_z \setminus f^{-1}(\gamma)$. In this tesis, we study under what conditions a planar graph $\Gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_z$ (equivalently a tiling $\mathfrak{M}_\Gamma$) comes from a suitable pair formed by a generic polynomial f and an oriented Jordan path γ .

Resumen

Consideremos un polinomio genérico $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 2$, y una curva de Jordan orientada $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ pasando a través de los valores de ramificación de f . Un algoritmo clásico, probablemente atribuido a F. Klein, determina de los datos anteriores la gráfica plana $f^{-1}(\gamma)$ y el mosaico $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma)} \doteq \widehat{\mathbb{C}}_z \setminus f^{-1}(\gamma)$. En esta tesis estudiamos bajo qué condiciones una gráfica plana $\Gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_z$ (o equivalentemente un mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$) viene de un polinomio genérico f y una curva de Jordan orientada γ adecuada.

Palabras claves: polinomios genéricos, esfera de Riemann, gráficas planas, mosaicos, árboles.

Índice de notación

$Aff(\mathbb{C})$	70	Espacio de transformaciones afines en el plano $\mathbb{C}$.
$\mathbb{C}$	1	Plano complejo.
$\widehat{\mathbb{C}}$	1	Esfera de Riemann.
C_f	4	Puntos críticos de f .
$\mathcal{C}_k^n$	59	k -constelación de grado n y longitud k .
$\widehat{\mathbb{C}} \setminus R$	60	Esfera de Riemann con ponchaduras $R = \{w_0, w_1, \dots, w_{k-1}\}$.
$\mathcal{C}_{coef}^{n-1}$	63	Espacio de coeficientes de los polinomios genéricos en $\mathcal{G}_n$.
$\mathcal{C}_{ramif}^{n-1}$	64	Espacio de valores de ramificación finitos de los polinomios genéricos en $\mathcal{G}_n$.
$\mathbb{C}[z]_n$	68	Espacio de polinomios complejos de grado n .
$d := d(\mathfrak{t})$	35	Valencia de un vértice $v_{\mathfrak{t}}$.
E	61	Fibra de un punto regular w^* de g .
$\mathcal{F}$	11	Foliación singular real sobre $\widehat{\mathbb{C}}$.
g	1	Función singular complejo analítica.
$g^{-1}(\gamma)$	3	Gráfica plana, orientada, conexa y etiquetada.
g_{top}	17	Cubriente topológico ramificado de S_{top} en $\widehat{\mathbb{C}}$.
$g_{\mathfrak{t}}^0$	17	Cubriente g_{top} restringido a los vértices en la frontera $\partial\tau_{\mathfrak{t}}$.
$\widehat{g_{\mathfrak{t}}^0}$	17	Homeomorfismo de la frontera $\partial\tau_{\mathfrak{t}}$ a la curva de Jordan γ .
$\widehat{g_{\mathfrak{t}}^0}$	17	Homeomorfismo de la cara $\tau_{\mathfrak{t}}$ al semiplano superior $\mathbb{H}_+$.
$\mathcal{GE}_n$	54	Espacio de pares formados por gráficas planas, realizables por polinomios genéricos, y etiquetados realizables.
$\mathcal{G}_n$	63	Espacio de polinomios genéricos mónicos de grado n .
$\mathbb{H}_+ \subset \widehat{\mathbb{C}}$	4	Semiplano superior.
$\mathbb{H}_- \subset \widehat{\mathbb{C}}$	4	Semiplano inferior.
$\Im(z)$	4	Parte imaginaria de un número complejo $z \in \mathbb{C}$.
$\mathcal{L}$	32	Etiquetado realizable para Γ .
L	39	Etiquetado de prueba para T .
LL	63	Aplicación de Lyashko–Looijenga.

$\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$	1	Espacio de funciones meromorfas en $\widehat{\mathbb{C}}$.
$\mathcal{M}(S_{\mathbf{g}})$	1	Espacio de funciones meromorfas en $S_{\mathbf{g}}$.
$\mathcal{M}(S)$	1	Espacio de funciones meromorfas en S .
$\mathfrak{M}$	2	Mosaico de la esfera de Riemann.
$\mathcal{ME}_n$	54	Espacio de pares formados por mosaicos no homogéneos de $\widehat{\mathbb{C}}_z$, realizables por polinomios genéricos, y etiquetados realizables.
$\mathbb{N}$	39	Números naturales.
$\mathcal{O}(\mathbb{C})$	1	Espacio de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$.
$\wp$	18	Función $\wp$ de Weierstrass.
$\wp'$	18	Derivada de la función $\wp$ de Weierstrass.
$\mathcal{P}$	37	Árbol primo.
$\mathbf{P} \vdash n$	59	Partición del entero positivo n .
$\mathbf{P}_k^n$	57	Pasaporte asociado a una k -constelación $\mathcal{C}_k^n$.
R_g	2	Valores de ramificación (o críticos) de g .
$\mathbb{R}$	4	Eje real.
$\Re(z)$	11	Parte real de un número complejo $z \in \mathbb{C}$.
$S_{\mathbf{g}}$	1	Superficie de Riemann compacta de género $\mathbf{g}$.
S	1	Superficie de Riemann arbitraria.
S_{top}	2	Superficie topológica, orientada y sin frontera.
$\mathcal{S}_g$	8	Gráfica de Speiser asociada a g .
$star(v_{\mathbf{t}})$	35	Estrella de un vértice $v_{\mathbf{t}}$ de T .
$\mathcal{S}$	41	Árbol semi-primo.
$star_{ni}(v)$	43	Estrella no inicial.
$\mathbb{T}^2$	19	Superficie de género 1, toro.
T	35	Árbol de prueba asociado a Γ .
$\mathcal{TE}_n$	54	Espacio de pares formados por árboles de prueba y etiquetados de prueba.
v	35	Vértice de un árbol de prueba T .
$\mathbb{Z}_n$	52	Grupo cíclico $\{0, 1, \dots, n-1\}$.
τ	2	Cara (cerrada) o k -ágono topológico de un mosaico $\mathfrak{M}$.
γ	2	Curva de Jordan orientada en $\widehat{\mathbb{C}}$ pasando por los elementos de R_g .
Γ	26	Gráfica plana, orientada, conexa y etiquetada.
$\partial\tau$	3	Frontera de la cara τ de $\mathfrak{M}_{\Gamma}$.
$\prec$	29	Orden topológico en Γ .
ζ	32	Vértices ocultos de Γ .
Θ	30	Lazo anclado en ∞ .
$\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\lambda}}$	35	Arista de un árbol de prueba T .
$\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}^I$	36	Arista inicial de la estrella $star(v_{\mathbf{t}})$.
$[\dots]$	36	Orden en las aristas de la estrella $star(v_{\mathbf{t}})$.

$\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(1)}}^{IP}$	37	Arista principal de un árbol primo $\mathcal{P}$.
$<_{lex}$	39	Orden lexicográfico en T .
$\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j+1)}}^P$	41	Arista principal de un árbol semi-primo $\mathcal{S}$.
$\Gamma_{\mathcal{L}}$	52	Gráfica etiquetada.
$\widehat{\Gamma}_{\mathcal{L}}$	52	Gráfica etiquetada ampliada.
σ	59	Permutación del grupo simétrico S_n .
$\pi_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus R, \cdot)$	60	Grupo fundamental de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus R$.

Introducción

Los objetos iniciales de esta tesis son las funciones racionales de la esfera de Riemann en sí misma. A pesar de ser objetos bastante conocidos, describir topológicamente su “forma” es complicado, la dificultad radica en la diversidad de interpretaciones precisas para el concepto vago de forma. Sorprendentemente W. Thurston en 2010 se planteó la pregunta

$$¿cuál es la forma de una función racional? \tag{1}$$

W. Thurston, S. Koch, y T. Lei [22] dieron una respuesta parcial a esta pregunta para el caso de funciones racionales genéricas; estudio enriquecido más tarde por J. Tomasini [41]. Nosotros estamos interesados en entender la forma topológica de un polinomio complejo, de la esfera de Riemann en sí misma, en el sentido de Thurston. En esta tesis entender la forma topológica de un polinomio complejo se reduce a entender una gráfica plana asociada al polinomio; ver [15]. Es importante resaltar que ningún polinomio es función racional genérica.

Objetos centrales.

En nuestro trabajo seguimos un algoritmo, atribuido a F. Klein [11], para describir la forma de una función racional

$$g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w. \tag{2}$$

Describamos brevemente este algoritmo. Seleccionemos una curva de Jordan orientada $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ que pase por los valores de ramificación de g

$$R_g = \{w_0, w_1, \dots, w_j, \dots, w_{k-1}\}. \tag{3}$$

La curva γ determina dos componentes de Jordan τ y τ' con frontera común γ ; estas componentes se pueden reconocer como dos k -ágonos topológicos, llamados *caras*, con vértices R_g . De lo anterior obtenemos el mosaico

$$\mathfrak{M}_\gamma = \tau \cup \tau' = \widehat{\mathbb{C}}_w. \tag{4}$$

La imagen inversa $g^{-1}(\gamma)$ produce un mosaico

$$\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)} = g^{-1}(\tau) \cup g^{-1}(\tau') = \widehat{\mathbb{C}}_z, \tag{5}$$

dado por una colección de k -ágonos topológicos o caras, con k fija. Cada vértice $z \in g^{-1}(R_g)$ de $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$ tiene etiqueta j si $g(z) = w_j$.

Por lo tanto, dado un par $(g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \gamma)$ el algoritmo de Klein produce un mosaico $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$; ver Figura 1.

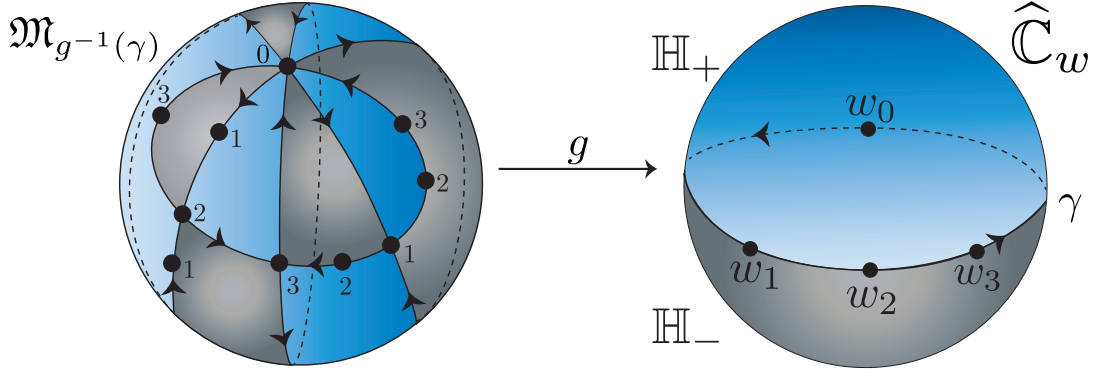


Figura 1: Mosaico $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$ determinado por el polinomio $g(z) = z^4 - 4z^3 - 4z^2$ y la curva de Jordan orientada $\gamma = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Es conveniente notar que el mosaico $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$ depende de la elección de la curva de Jordan γ , específicamente del orden en el que γ pasa por los valores de ramificación de g . En el Ejemplo 1.1.4 presentamos dos mosaicos, diferentes topológicamente, que provienen de una misma función y de dos curvas de Jordan que pasan en distintos ordenes por los valores de ramificación.

A lo largo de este escrito, $\mathfrak{M}_\Gamma$ denotará un mosaico de $\widehat{\mathbb{C}}_z$, dominio de alguna función racional g , y $\mathfrak{M}_\gamma$ un mosaico en el contradominio $\widehat{\mathbb{C}}_w$.

Si reconocemos a γ como una gráfica plana (*i.e.* gráfica encajada en $\widehat{\mathbb{C}}$), con vértices R_g , entonces $g^{-1}(\gamma)$ es una gráfica plana, orientada, conexa y etiquetada con vértices $g^{-1}(R_g)$. En el Cuadro 1 establecemos, sin ser muy rigurosos, una equivalencia entre gráficas planas $\{\Gamma\}$ y mosaicos $\{\mathfrak{M}_\Gamma\}$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$.

Gráfica Γ :	Mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$:
componente conexa y cerrada de $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$	cara o k -ágono τ (resp. τ')
ciclo ¹ con complemento conexo en Γ , orientado en sentido antihorario (resp. horario)	frontera de una cara azul (resp. gris) τ , (resp. τ')
arista	lado de $\partial\tau$ (resp. $\partial\tau'$)
vértice	esquina de dos lados en $\partial\tau$ (resp. $\partial\tau'$)
valencia de un vértice	número total de caras incidentes en una esquina.

Cuadro 1: Equivalencia entre gráficas Γ y mosaicos $\mathfrak{M}_\Gamma$.

¹Un *ciclo* de una gráfica Γ es un camino cerrado, con $s \geq 2$ vértices y aristas distintas; ver [17, pág. 13]

Como consecuencia del algoritmo de Klein y la equivalencia expuesta en el Cuadro 1, cada par $(g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \gamma)$ determina un mosaico $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$ y una gráfica plana $g^{-1}(\gamma)$.

Durante el desarrollo del texto, la equivalencia mencionada antes, representará una herramienta valiosa de trabajo. Es conveniente mencionar que numerosas equivalencias entre mosaicos y gráficas, para diversos fines, son presentadas en la literatura, por ejemplo la expuesta por S. K. Lando y A. K. Zvonkin en [24, Capítulo 1, §1.3.2].

El siguiente diagrama da un sentido riguroso a todo lo anterior; ver Lema 1.1.1. Resaltamos que este diagrama contiene todos los objetos centrales de esta tesis.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Función racional } g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \\
 \text{y curva de Jordan orientada } \gamma \text{ adecuada} & & \\
 \downarrow & & \\
 \text{Mosaico } \mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)} \text{ de } \widehat{\mathbb{C}}_z & \xleftrightarrow{\quad} & \text{Gráfica plana, orientada} \\
 \text{por } k\text{-ágonos, para una única } k & & \text{conexa y etiquetada } g^{-1}(\gamma) \subset \widehat{\mathbb{C}}_z.
 \end{array} \tag{6}$$

La generalización del algoritmo de Klein y la equivalencia expuesta en el Cuadro 1 está sujeta a ciertas condiciones. Antes de especificar tales condiciones, establezcamos algunos convenios de notación. Indicaremos con S_{hol} a una superficie de Riemann, no necesariamente compacta. Por definición, una *función singular complejo analítica*

$$g : S_{hol} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w,$$

es aquella que admite a lo más ceros, polos y singularidades esenciales.

Una condición necesaria para que el algoritmo de Klein y la equivalencia en el Cuadro 1 se puedan extender a una función singular complejo analítica g es que los conjuntos de valores de ramificación y singularidades esenciales de g sean finitos. Evidentemente en este caso, la gráfica $g^{-1}(\gamma)$ no necesariamente es plana.

Un ejemplo sencillo de una función singular complejo analítica, con al menos una singularidad esencial, es la función exponencial. En el Ejemplo 2.3 construimos un mosaico para $S_{hol} = \mathbb{C}$, a partir de la función exponencial, usando el algoritmo de Klein.

Primer resultado.

Un primer problema en el que estamos interesados, para el caso de funciones racionales, es completar el diagrama (6) con un “morfismo” $\uparrow$, de mosaicos $\{\mathfrak{M}\}$ a pares $\{(g, \gamma)\}$. El problema concreto es el siguiente.

Problema 1. *Determinar bajo qué condiciones un mosaico $\mathfrak{M}$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$ proviene de una función racional $g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ y una curva de Jordan orientada γ adecuada.*

Respuestas alrededor de esta pregunta han aparecido en versiones distintas, entre ellas, geométricas, algebraicas y analíticas; de manera puntual podemos referirnos a trabajos de H. A. Schwarz

[38], R. Nevanlinna [36], [35, Capítulo XI, §2], G. V. Belyĭ [7], [19, Capítulo 10, Sección 2], S. K. Lando [24, Capítulo 2], entre otros. Ninguno de estos trabajos se discute con profundidad en esta tesis.

El Teorema 2.1.1 nos proporciona una respuesta al Problema 1, para una familia específica de mosaicos; el resultado del teorema es mucho más general, pues no sólo produce pares (g, γ) , donde g es función racional, en diversos casos g es función singular complejo analítica.

Teorema 2.1.1 (L. J. González Cely, J. Muciño-Raymundo [16]). *Consideremos una superficie topológica, orientada y sin frontera, no necesariamente compacta S_{top} provista con un mosaico*

$$\mathfrak{M} = \underbrace{\bigcup_{t=1}^m \tau_t}_{\text{caras azules}} \cup \underbrace{\bigcup_{t=1}^m \tau'_t}_{\text{caras grises}},$$

que satisface lo siguiente:

- i) $\mathfrak{M}$ está dado por una colección finita o numerable ($m \leq \infty$) de k -ágonos topológicos $\{\tau_t, \tau'_t\}$, con $k \geq 3$ fija;
 - ii) los k -ágonos están coloreados de manera alterna azul-gris en S_{top} (equivalentemente la valencia de cada vértice, en la gráfica asociada a $\mathfrak{M}$, es par o infinita);
 - iii) los k -ágonos de $\mathfrak{M}$ no tienen aristas sin identificar;
 - iv) para cada cara azul τ_t , los k vértices en $\partial\tau_t$ están etiquetados con los números $0, 1, \dots, k-1$ tal que el orden cíclico de las etiquetas es $0, 1, \dots, k-1$, al recorrer $\partial\tau_t$ en sentido antihorario;
 - v) la etiqueta de cada vértice de S_{top} es la misma para todas las fronteras de sus caras adyacentes.
- Entonces, existen una estructura de superficie de Riemann S_{hol} (en S_{top}) y una función singular complejo analítica

$$g : S_{hol} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w,$$

con

$$\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)} = \mathfrak{M},$$

donde $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ es una curva de Jordan orientada que pasa por los k valores de ramificación $\{w_0, w_1, \dots, w_j, \dots, w_{k-1}\}$ de g .

Un detalle que merece destacarse es que, en la prueba del Teorema 2.1.1, se construye/reconoce un mosaico $\mathfrak{M}_\gamma = \tau \cup \tau' = \widehat{\mathbb{C}}_w$ como en (5), adaptado a $\mathfrak{M}$.

Cabe mencionar que el Teorema 2.1.1 es relativamente sencillo para los pares $\{(\widehat{\mathbb{C}}, \mathfrak{M})\}$, donde los mosaicos $\mathfrak{M}$ de $\widehat{\mathbb{C}}$ están dados por un número finito de k -ágonos, siempre con k fija. Sin embargo, el teorema nos permite trabajar con algunas familias de pares $(S_{top}, \mathfrak{M})$, donde S_{top} son superficies topológicas, no necesariamente compactas, provistas con mosaicos $\mathfrak{M}$, dados por una infinidad de k -ágonos, siempre con k fija. Estos pares $(S_{top}, \mathfrak{M})$ producen funciones singulares complejo analíticas; ver la función exponencial en el Ejemplo 2.3.

Sobre la paternidad del Teorema 2.1.1 resaltamos lo siguiente. H. A. Schwarz [38] vislumbró el anterior resultado desde el punto de vista de ecuaciones diferenciales, dado que él buscaba soluciones para las mismas [19, Capítulo 10, Sección 2]. R. Nevanlinna y A. Speiser usaron implícitamente el resultado en diversos trabajos [36], [35, Capítulo XI, §2]. Por último, G. V.

Belyĭ [7] dio una versión algebraica de este teorema para curvas algebraicas $S_{\mathbf{g}}$ (superficies de Riemann compactas de género $\mathbf{g}$), provistas con mosaicos dados por colecciones de triángulos. El Teorema 2.1.1, dado para k -ágonos en general y fundamentado en los resultados anteriores, es propio de esta tesis.

Existen muchas maneras distintas de dotar a una superficie S_{top} con un mosaico a dos colores (*i.e.* un mosaico cuyas caras están divididas en dos conjuntos, caras azules y grises), a priori, no alternas. Como era de esperarse, no cualquier mosaico a dos colores de una superficie S_{top} determina una función singular complejo analítica. En el Ejemplo 2.1.6 presentamos a la superficie compacta de género 2, provista con un mosaico a dos colores que no determina una función como las requeridas.

Motivación para el problema central.

Centrémonos nuevamente en la categoría de funciones racionales. Una consecuencia del Teorema 2.1.1 es un primer “morfismo” $\uparrow$ entre mosaicos $\{\mathfrak{M}\}$ y pares $\{(g : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \gamma)\}$, donde para cada par $(g : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \gamma)$, g es función racional y γ curva de Jordan orientada adecuada. De esta manera, el Diagrama (6) toma la forma siguiente; ver Lema 2.1.3.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Función racional } g : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \\
 \text{y curva de Jordan orientada } \gamma \text{ adecuada} & & \\
 \downarrow \text{---} & & \\
 \text{Mosaico } \mathfrak{M} \text{ de } \widehat{\mathbb{C}}_z & \xrightleftharpoons{\quad} & \text{Gráfica plana,} \\
 \text{por } k\text{-ágonos, para una única } k & & \text{orientada y conexa } g^{-1}(\gamma) \subset \widehat{\mathbb{C}}_z.
 \end{array} \tag{7}$$

El “morfismo” $\uparrow$ está punteado dado que un mosaico $\mathfrak{M}$ no determina un único par (g, γ) .

Es sencillo observar que todos los mosaicos construidos con el algoritmo de Klein y los permitidos en el Teorema 2.1.1 están dados por k -ágonos, para un mismo valor de k . Estamos interesados en considerar mosaicos que no cumplan esta condición. A lo largo de este trabajo diremos que un mosaico es *homogéneo* si todas sus caras son k -ágonos, para una única k , y *no homogéneo* en caso contrario. El problema natural de interés es el siguiente.

Problema 2. *Caracterizar cuándo un mosaico $\mathfrak{M}$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$ no homogéneo, con sus caras coloreadas de manera alterna azul-gris, proviene de una función racional $g : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ y una curva de Jordan orientada γ adecuada, es decir, cuando $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)} = \mathfrak{M}$.*

La hipótesis de admitir mosaicos no homogéneos genera una obstrucción topológica para garantizar la existencia de g . Una respuesta parcial al Problema 2, en un subcaso no homogéneo, se la debemos a W. P. Thurston [22]. Él encontró condiciones específicas bajo las cuales una gráfica plana Γ , tiene la forma $\Gamma = g^{-1}(\gamma)$, donde $g : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ es racional genérica ², de grado $n \geq 2$. Thurston garantizó que el mosaico $\mathfrak{M}_{\Gamma}$, determinado por la gráfica Γ , puede ser homogeneizado añadiendo nuevos vértices de valencia 2 en Γ . Estas condiciones están reportadas en el trabajo

²Una función g es *racional genérica* si tiene $(2n - 2)$ valores de ramificación distintos.

[22] de W. Thurston, S. Koch y T. Lei. Este estudio fue enriquecido más tarde por J. Tomasini en [41]. El resultado preciso del grupo dirigido por W. Thurston fue el siguiente.

Teorema 3.1.1 (W. P. Thurston, S. Koch, T. Lei, 2010). *Una gráfica plana orientada Γ con $2n - 2$ vértices de valencia 4 es igual a $g^{-1}(\gamma)$ (omitiendo los vértices de valencia 2) para alguna función racional genérica $g : \hat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \hat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 2$, y una curva de Jordan orientada $\gamma \subset \hat{\mathbb{C}}_w$ que pasa por los valores de ramificación de g , sí y sólo si*

- a) cada cara de $\hat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$ es un dominio de Jordan;
- b) (balance global) para una coloración alterna azul-gris de las caras de $\hat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$, hay n caras grises, n caras azules;
- c) (balance local) si un ciclo orientado Γ_0 en Γ , que al recorrerlo con la orientación heredada de Γ , contiene caras azules a su izquierda, entonces el ciclo orientado Γ_0 deja exactamente más caras azules que grises a su izquierda.

Recapitulando el trabajo de Thurston, obtenemos el diagrama siguiente; ver Lema 3.1.1. Es importante resaltar que el Diagrama (8) generaliza el Diagrama (7), al incluir mosaicos no homogéneos.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Función racional genérica } g : \hat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \hat{\mathbb{C}}_w \\
 \text{y curva de Jordan orientada } \gamma \text{ adecuada} \\
 \uparrow \\
 \text{Mosaico no homogéneo } \mathfrak{M}_\Gamma \text{ de } \hat{\mathbb{C}}_z, & \longleftrightarrow & \text{Gráfica plana } \Gamma \\
 \text{con vértices de valencia 4} & & \text{como en Teorema 3.1.1.}
 \end{array} \tag{8}$$

Nuevamente el “morfismo” $\uparrow$ está punteado, puesto que un mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$, asociado a una gráfica plana Γ como las requeridas por Thurston, no determina un único par $(g : \hat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \hat{\mathbb{C}}_w, \gamma)$.

Resultados principales de la tesis.

Dado que los polinomios $f : \hat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \hat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 3$, siempre tienen en ∞ índice de ramificación ³ $(n-1)$, entonces ningún polinomio es una función racional genérica (recordemos que todos los valores de ramificación, de una función racional genérica, tienen índice de ramificación 1). En consecuencia, los mosaicos a la Klein $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma)}$ de $\hat{\mathbb{C}}_z$, contruidos a partir de un polinomio $f : \hat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \hat{\mathbb{C}}_w$, siempre tienen un vértice de valencia $2n$ en ∞ .

Por los argumentos expuestos en el párrafo anterior, la parte medular de esta tesis es dar respuesta al Problema 2, en una familia de polinomios, llamados *genéricos*. Recordemos que por definición, un polinomio $f : \hat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \hat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 3$, es *genérico* si tiene n valores de ramificación distintos, incluyendo a ∞ . En términos de gráficas, nuestro objetivo es dar respuesta al problema siguiente; versión de la pregunta planteada en (1) y Problema 2, para polinomios genéricos.

³ El lector que este interesado en información adicional puede consultar [14, pág. 15].

Problema 3. *Caracterizar topológicamente cuándo una gráfica plana $\Gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_z$ está determinada por un polinomio genérico $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ de grado $n \geq 2$, y una curva de Jordan orientada γ adecuada.*

Consideremos un polinomio genérico $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 3$. A partir de la gráfica $f^{-1}(\gamma)$, olvidando los vértices de valencia 2, obtenemos una gráfica plana Γ que tiene $(n - 1)$ vértices de valencia 4 (puntos críticos de f) y un vértice de valencia $2n$ en ∞ . El Teorema 3.1.2, enunciado abajo, proporciona la implicación inversa, cualquier gráfica plana del tipo Γ puede ser realizada, topológicamente, como una gráfica $f^{-1}(\gamma)$, para algún polinomio genérico f y una curva de Jordan orientada γ adecuada. La dificultad inicial, al igual que en el caso estudiado por Thurston, radica en la no homogeneidad del mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$. Una dificultad adicional, en nuestro caso, es tener mosaicos con vértices de distintas valencias. Estas dificultades están ilustradas en el Ejemplo 3.1.1.

Teorema 3.1.2 (L. González Cely [15]). *Una gráfica plana, orientada y conexa Γ con $n - 1$ vértices de valencia 4 y un vértice de valencia $2n$ en ∞ es igual a $f^{-1}(\gamma)$ (omitendo los vértices de valencia 2) para algún polinomio genérico $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 2$, y una curva de Jordan orientada $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ que pasan por los valores de ramificación de f sí y sólo si*

- a) *la frontera de cada componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$ es una curva de Jordan orientada;*
- b) *para una coloración alterna azul-gris de las caras de $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$, hay n caras grises, n caras azules.*

La idea central de la prueba del Teorema 3.1.2 es dar un algoritmo que nos permita homogeneizar el mosaico y de esa manera garantizar la existencia del polinomio genérico.

Usando las equivalencias del Diagrama (7), el teorema anterior tiene su versión en términos de mosaicos.

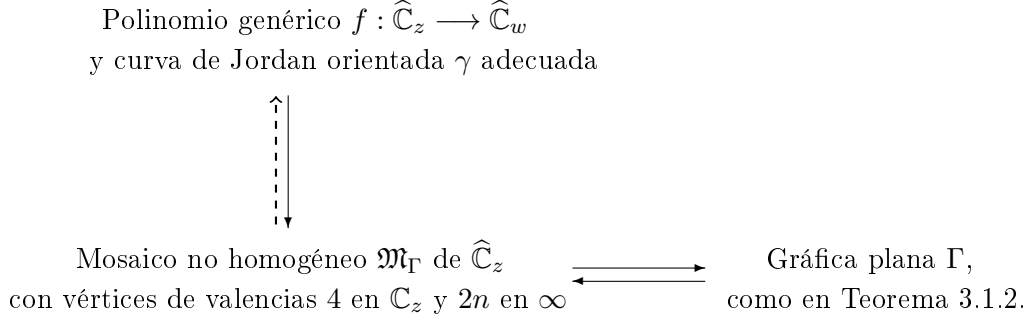
Corolario 1. *Una mosaico orientado $\mathfrak{M}_\Gamma$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$ con $n - 1$ vértices de valencia 4 y un vértice de valencia $2n$ en ∞ es igual a $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma)}$ (omitendo los vértices de valencia 2) para algún polinomio genérico $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 2$, y una curva de Jordan orientada $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ que pasan por los valores de ramificación de f sí y sólo si*

- a) *la frontera de cada cara de $\mathfrak{M}_\Gamma$ es una curva de Jordan orientada;*
- b) *para una coloración alterna azul-gris de las caras de $\mathfrak{M}_\Gamma$, hay n caras grises, n caras azules.*

El resultado en el Teorema 3.1.2 es topológico, en el siguiente sentido. Dado un polinomio genérico f y una curva de Jordan orientada γ pasando por los valores de ramificación de f , la gráfica Γ está totalmente determinada, esto se desprende del algoritmo de Klein. Por el contrario, dada una gráfica Γ como la requerida, solo la existencia de un polinomio genérico f y una curva de Jordan orientada adecuada γ es garantizada. Si permitimos una perturbación continua f_ϵ , para ϵ suficientemente pequeño, de un polinomio genérico f_0 y su correspondiente γ_0 , entonces el conjunto de pares $\{(f_\epsilon, \gamma_\epsilon)\}$ determina topológicamente la misma gráfica Γ .

Sintetizando nuestro resultado principal, obtenemos el diagrama siguiente. Observemos que el teorema anterior nos permite construir el “morfismo punteado” $\uparrow$ entre mosaicos $\{\mathfrak{M}\}$ y pares

$\{(f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \gamma)\}$, donde para cada par $(f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \gamma)$, f es un polinomio genérico y γ curva de Jordan orientada adecuada.



Estructura de la tesis.

En el Capítulo 1 exponemos nuestra interpretación de distintos algoritmos y métodos que asocian, a partir de funciones singulares complejo analíticas $\{g\}$, gráficas planas $\{\Gamma\}$ o equivalentemente mosaicos $\{\mathfrak{M}_\Gamma\}$. En §1.1 describimos el algoritmo de Klein, detallado en las Ecuaciones (2)–(5), y damos una colección de ejemplos. La gráfica dual, en el sentido de Poincaré [18, Capítulo 3, §3.3], de la gráfica $g^{-1}(\gamma)$ se conoce como la *gráfica de Speiser* $\mathcal{S}_g$ de g . Estas gráficas fueron introducidas por A. Speiser [39] alrededor de 1930. Existen distintas aplicaciones de estas gráficas, tal como se puede constatar en los trabajos [27], [12] y [29]. En §1.2 hablamos un poco de estas gráficas, y construimos algunos ejemplos interesantes.

Por otra parte, existe una equivalencia entre funciones $g(z)$, 1-formas $g'(z)dz$, diferenciales cuadráticas $(g'(z))^2 dz \otimes dz$, y campos vectoriales $\frac{1}{g'(z)} \frac{\partial}{\partial z}$. Debido a estas equivalencias, los mosaicos asociados a las funciones $\{g(z)\}$ tienen sus interpretaciones correspondientes en todas estas clases de objetos. Estas equivalencias son usadas por J. Muciño-Raymundo y A. Alvarez-Parrilla en [4] para comprender la geometría y dinámica de campos vectoriales complejo analíticos singulares. Algunas otras referencias importantes que siguen lineamientos similares son [40], [32], [31] [4]. En §1.3 damos una descripción rápida de estas equivalencias y algunos ejemplos.

En el Capítulo 2 planteamos el Problema 1. Como mencionamos anteriormente, este problema en versiones distintas, fue estudiado por H. A. Schwarz [38], R. Nevanlinna [36], [35, Capítulo XI, §2] y G. V. Belyi entre otros. En §2.1 damos una respuesta parcial al Problema 1; ver el Teorema 2.1.1. Adicionalmente presentamos una colección de ejemplos que ayudarán a visualizar la importancia de este resultado.

En el Capítulo 3 enunciamos la pregunta/problema (1) planteada por W. Thurston y la caracterización que obtiene, conjunto con S. Koch y T. Lei, para las gráficas planas que provienen de funciones racionales genéricas; ver Teorema 3.1.1. Por otra parte, demostramos el resultado principal de la tesis, Teorema 3.1.2. En §3.1, describiremos con detalle la dificultad del problema, dando además un ejemplo que nos permita evidenciar la misma. En las ecuaciones (3.2)–(3.4) daremos una descripción precisa de las gráficas planas orientadas $\{\Gamma\}$ involucradas en nuestra caracterización. Finalmente, en §3.2, la prueba de la implicación “ $\longleftarrow$ ” del Teorema 3.1.2 es dada.

En el Capítulo 4 presentamos la relación de nuestro problema con el famoso *problema de enumeración de Hurwitz* [20], enunciado a continuación.

*Determinar el número de cubrientes ramificados de una superficie de Riemann,
con conjunto de ramificación prescrito.*

Este problema es de naturaleza topológica pero con un gran contenido combinatorio. Según nuestras fuentes, K. Barański [6], S. K. Lando [23], A. Zvonkin y S. K. Lando en [24, Capítulos 1 y 5] este aún es un problema con respuestas parciales. En §4.1 comentamos como construir los objetos combinatorios del problema de Hurwitz a partir de un polinomio y por ende a partir de un mosaico a la Klein $\mathfrak{M}$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$.

Una herramienta importante para estudiar el espacio de polinomios genéricos es la llamada *aplicación de Lyashko–Looijenga*. Ellos construyeron esta aplicación para entender la naturaleza algebraica y geométrica del espacio de polinomios genéricos, considerando la equivalencia por la izquierda descrita en la Definición 3.3.1. Para mayor detalle podemos consultar [5] y [26]. En §4.2 damos la fórmula explícita para la aplicación LL en el caso de polinomios genéricos de grado 4 y construimos los mosaicos asociados para cada una de las clases.

El problema central de esta tesis es un punto de encuentro entre distintas ramas de las matemáticas, entre ellas topología, combinatoria y análisis complejo. Finalmente en el Capítulo 5 presentamos un listado de distintos problemas cercanos con los abordados a lo largo de esta tesis. Muchos de ellos son problemas abiertos de gran interés.

Capítulo 1

Una correspondencia entre mosaicos, gráficas planas y gráficas de Speiser

El propósito de este Capítulo es exponer nuestra interpretación de algunos algoritmos y métodos gráficos para representar y entender la topología de las funciones racionales. Esta representación se hace a través de gráficas planas o equivalentemente mosaicos. Adicionalmente, diremos en qué casos dichos algoritmos se extienden a funciones singulares complejo analíticas (descritas abajo).

Los algoritmos y métodos que estaremos trabajando se desarrollarán en alguno de los espacios siguientes, según sea conveniente.

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\mathbb{C}) &= \{g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \mathbb{C} \text{ es el plano complejo y } g \text{ es holomorfa}\}, \\ \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}}) &= \{g : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid \widehat{\mathbb{C}} \text{ es la esfera de Riemann y } g \text{ es meromorfa}\}, \\ \mathcal{M}(S_{\mathbf{g}}) &= \left\{ g : S_{\mathbf{g}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid \begin{array}{l} S_{\mathbf{g}} \text{ es una superficie de Riemann compacta de género } \mathbf{g} \\ \text{y } g \text{ es meromorfa} \end{array} \right\}, \\ \mathcal{M}(S) &= \left\{ g : S \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid \begin{array}{l} S \text{ es una superficie de Riemann arbitraria} \\ \text{y } g \text{ es singular complejo analítica} \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

En el espacio $\mathcal{M}(S)$, por función singular complejo analítica queremos decir función que admite, a lo más ceros, polos y singularidades esenciales.

1.1. Algoritmo a la F. Klein para representar funciones racionales, a través de mosaicos y gráficas.

Recordemos que una función meromorfa

$$g : S \longrightarrow S',$$

donde S y S' son superficies de Riemann, tiene una representación local $z \mapsto z^{\nu+1}$, para algún $\nu \in \mathbb{Z}$. El entero ν es el *índice de ramificación*¹ de g en el punto z . Este comportamiento rígido

¹El lector que este interesado en información adicional puede consultar [14, pág. 15].

permite utilizar la teoría de gráficas y métodos combinatorios para exhibir diferentes propiedades de las funciones meromorfas. La finalidad de esta Sección es estudiar un algoritmo atribuido a F. Klein como un instrumento fundamental para entender la topología de las funciones racionales.

Antes de empezar, establecemos un concepto básico que se utilizará a lo largo de este escrito.

Definición 1.1.1. Un *mosaico* $\mathfrak{M}$ de una superficie topológica, orientada y sin frontera S_{top} es una familia finita o numerable de k -ágonos topológicos

$$\{\tau_{\mathfrak{t}} \subset \widehat{\mathbb{C}}\},$$

que llamaremos *caras*, cumpliendo lo siguiente.

1. La superficie S_{top} es la unión de todas las caras.
2. Para dos caras $\tau_{\mathfrak{t}}, \tau_{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{M}$, con $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{k}$, la intersección cumple solo una de las siguientes condiciones:

$$\tau_{\mathfrak{t}} \cap \tau_{\mathfrak{k}} = \begin{cases} \text{un punto (vértice),} \\ \text{un arco topológico (arista),} \\ \text{un conjunto de vértices y aristas,} \\ \text{vacío.} \end{cases}$$

Los mosaicos expuestos en la Figura 1.1(a)–(b), ejemplifican cuando la intersección de dos caras es un conjunto de vértices y aristas.

F. Klein fue, según tenemos entendido, un pionero en el estudio de gráficas y mosaicos como una herramienta para describir funciones racionales. Para un análisis detallado es apropiado consultar “*Los protocolos de Felix Klein*”, [11]. A grandes rasgos, nuestra interpretación del estudio en [11] es la siguiente.

Algoritmo 1.1.1 (A la F. Klein). Consideremos una función racional $g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ de grado $n \geq 2$ con valores de ramificación

$$R_g := \{w_0, w_1, \dots, w_j, \dots, w_{k-1}\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_w.$$

El número máximo posible de valores de ramificación distintos es $(2n - 2)$, es decir, $(k - 1) \leq (2n - 3)$. Si dado el caso $\infty \in R_g$, entonces acordaremos que $w_0 = \infty$.

Paso 1. Seleccionemos una curva de Jordan orientada $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ que pase por los puntos de R_g , siguiendo el orden natural de los subíndices. Las cerraduras de las dos componentes de Jordan de $\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus \gamma$ se pueden reconocer como dos k -ágonos topológicos τ y τ' , con frontera común γ . De esta manera obtenemos un mosaico $\mathfrak{M}_\gamma$ de $\widehat{\mathbb{C}}_w$ con

vértices

$$V = R_g = \{w_0, w_1, \dots, w_j, \dots, w_{k-1}\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad (1.1)$$

aristas

$$A = \{\overline{w_0 w_1}, \dots, \overline{w_j w_{j+1}}, \dots, \overline{w_{k-1} w_0}\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad (1.2)$$

y caras (k -ágonos topológicos)

$$\mathfrak{M}_\gamma = \tau \cup \tau' = \widehat{\mathbb{C}}_w. \quad (1.3)$$

Por construcción, el interior de τ (resp. τ') está a la izquierda (resp. derecha) de γ . Asignamos el color azul (resp. gris) al interior de τ (resp. τ').

Paso 2. La imagen inversa de γ bajo g , denotada $g^{-1}(\gamma)$, determina el mosaico $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$ con

vértices

$$V^* = \bigcup_j g^{-1}(w_j), \quad \text{donde cada } z \in V^* \text{ tiene etiqueta } j \text{ si } g(z) = w_j, \quad (1.4)$$

aristas

$$A^* = \bigcup_j g^{-1}(\overline{w_j w_{j+1}}), \quad (1.5)$$

y caras (k -ágonos topológicos)

$$\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)} = \underbrace{\tau_1 \cup \dots \cup \tau_{\mathbf{t}} \cup \dots \cup \tau_n}_{g^{-1}(\tau) = \text{caras azules}} \cup \underbrace{\tau'_1 \cup \dots \cup \tau'_{\mathbf{t}} \cup \dots \cup \tau'_n}_{g^{-1}(\tau') = \text{caras grises}} = \widehat{\mathbb{C}}_z, \quad (1.6)$$

donde todas sus caras son k -ágonos topológicos, para una misma k .

La valencia de cada vértice de $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$ tiene la forma $2(\nu+1)$, donde ν es su índice de ramificación. Notemos que los vértices de valencia 2 de $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$ son puntos regulares de g .

La orientación de las fronteras, en las caras de $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$, sigue la siguiente regla: la frontera de cada cara azul $\tau_{\mathbf{t}}$ está orientada en sentido antihorario; la frontera de cada cara gris $\tau'_{\mathbf{t}}$ en sentido horario. Además, para cada frontera $\partial\tau_{\mathbf{t}}$ (resp. $\partial\tau'_{\mathbf{t}}$), el orden cíclico de las etiquetas en sus k vértices es $0, 1, \dots, k-1$, al recorrerla siguiendo la orientación de $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$.

Para concluir, dado un par $(g : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \gamma)$, el algoritmo de Klein produce un mosaico $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$, con las características mencionadas.

Si reconocemos a la curva de Jordan γ como una gráfica plana (*i.e.* gráfica encajada en $\widehat{\mathbb{C}}$), orientada y conexa con vértices, aristas y caras señalados en (1.1)–(1.3), entonces $g^{-1}(\gamma)$ es una gráfica plana, orientada, conexa y etiquetada con vértices, aristas y caras indicados en (1.4)–(1.6). Sintetizando los planteamientos hechos, por el Algoritmo 1.1.1 y la equivalencia expuesta en el Cuadro 1 de la introducción, cada par $(g : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \gamma)$ determina un mosaico $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$ y una gráfica plana $g^{-1}(\gamma)$, tal como se enuncia a continuación.

Lema 1.1.1. *Dada una función racional $g : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ de grado $n \geq 2$ y una curva de Jordan orientada γ que pasa por los valores de ramificación de g , el siguiente diagrama queda determinado.*

$$\begin{array}{ccc} \text{Función racional } g : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \\ \text{y curva de Jordan orientada } \gamma \text{ adecuada} & & \\ \downarrow & & \\ \text{Mosaico } \mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)} \text{ de } \widehat{\mathbb{C}}_z & \longleftrightarrow & \text{Gráfica plana, orientada} \\ \text{por } k\text{-ágonos, para una única } k & & \text{conexa y etiquetada } g^{-1}(\gamma) \subset \widehat{\mathbb{C}}_z. \end{array} \quad (1.7)$$

□

Ejemplo 1.1.1. Consideremos el polinomio

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad f(z) = z^3 - 3z.$$

Los puntos críticos de f son

$$C_f = \{\infty, z_1 = 1, z_2 = -1\},$$

con multiplicidades $\{2, 1, 1\}$, respectivamente. Los valores de ramificación de f son

$$R_f = \{\infty, w_1 = -2, w_2 = 2\}.$$

En vista de que los valores de ramificación pertenecen al eje real, seleccionamos a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como la curva de Jordan orientada γ que pasa por los valores de ramificación R_f . La orientación de γ es tal que el semiplano superior $\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ (resp. $\mathbb{H}_- := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) < 0\}$) está a la izquierda (resp. derecha) de γ . Asignamos el color azul (resp. gris) a $\tau := \overline{\mathbb{H}}_+$ (resp. $\tau' := \overline{\mathbb{H}}_-$). De todo esto originamos el mosaico

$$\mathfrak{M}_\gamma = \overline{\mathbb{H}}_+ \cup \overline{\mathbb{H}}_- = \tau \cup \tau' = \widehat{\mathbb{C}}_w.$$

La imagen inversa de γ bajo f determina el mosaico $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma)}$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$, ilustrado en la Figura 1.1(a). Es importante notar que todas las caras del mosaico $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma)}$ son triángulos topológicos con dos tipos de vértices finitos; vértices de valencia 4, que corresponden a los puntos críticos finitos de f y vértices ζ_1, ζ_2 de valencia 2, que corresponden a puntos donde f es un biholomorfismo local. Al omitir estos últimos vértices en $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma)}$, obtendremos un ejemplo de gráfica plana, orientada y conexa, como las descritas en nuestro resultado principal, Teorema 3.1.2.

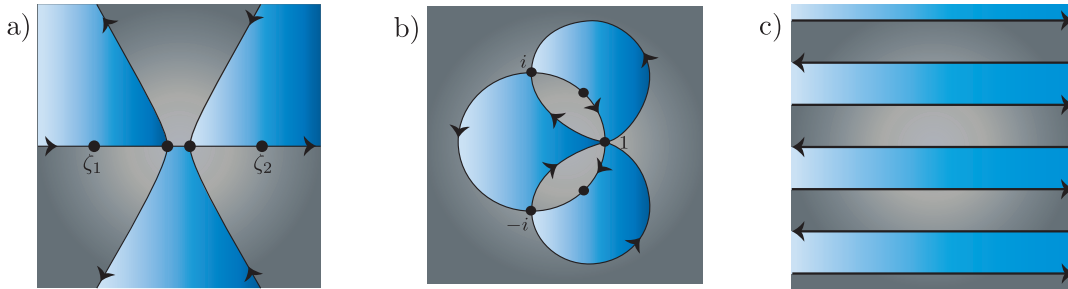


Figura 1.1: Mosaicos a la Klein determinados por el polinomio $f(z) = z^3 - 3z$, la función racional $g(z) = (1 + 3z - 3z^2 + 3z^3)/(3 - 3z + 3z^2 + z^3)$ y la función singular complejo analítica $h(z) = e^z$, respectivamente.

Ejemplo 1.1.2. Consideremos ahora la función racional

$$g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad g(z) = \frac{1 + 3z - 3z^2 + 3z^3}{3 - 3z + 3z^2 + z^3}.$$

Un cálculo sencillo nos permite encontrar los puntos críticos de g

$$C_g = \{z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -i\},$$

con multiplicidades $\{2, 1, 1\}$, respectivamente. Evaluando cada uno de estos puntos críticos en g , tenemos que los valores de ramificación son

$$R_g = \{w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -i\}.$$

Es claro que en este caso, el punto ∞ es un valor regular de g . Considerando que la norma de cada valor de ramificación es 1, seleccionamos al círculo unitario $\{w \in \mathbb{C}_w : |w| = 1\}$ como la curva de Jordan orientada γ que pasa por los valores de ramificación R_g . La orientación de γ es tal que el interior del círculo unidad $\{w \in \mathbb{C}_w : |w| < 1\}$ (resp. $\{w \in \widehat{\mathbb{C}}_w : |w| > 1\}$) está a la izquierda (resp. derecha) de γ . Nuevamente asignamos el color azul (resp. gris) a $\tau := \{w \in \mathbb{C}_w : |w| \leq 1\}$ (resp. $\tau' := \{w \in \widehat{\mathbb{C}}_w : |w| \geq 1\}$). De esta manera construimos el mosaico

$$\mathfrak{M}_\gamma = \tau \cup \tau' = \widehat{\mathbb{C}}_w.$$

De igual forma la imagen inversa de la gráfica γ , bajo g , determina el mosaico $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$ esbozado en la Figura 1.1(b). Hay que mencionar además que todas las caras de $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$ son triángulos topológicos.

El Algoritmo 1.1.1 y la equivalencia expuesta en el Cuadro 1, dado en la introducción, se pueden generalizar a funciones singulares complejo analíticas $g : S_{hol} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, siempre y cuando los conjuntos de valores de ramificación y singularidades esenciales de g sean finitos. Recordemos que S_{hol} denota cualquier superficie de Riemann, no necesariamente compacta. Evidentemente en este caso, la gráfica $g^{-1}(\gamma)$ no necesariamente es plana.

Un ejemplo sencillo de una función singular complejo analítica, con al menos una singularidad esencial, es la función exponencial. En el siguiente ejemplo construimos un mosaico para $S_{hol} = \mathbb{C}$, a partir de la función exponencial, usando el algoritmo de Klein.

Ejemplo 1.1.3. Consideremos la función singular complejo analítica

$$h : \mathbb{C}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad h(z) = e^z.$$

Se propone presentar este ejemplo con la finalidad de mostrar que aunque el conjunto de valores de ramificación R_h de $h(z)$ es vacío, las singularidades esenciales $0, \infty \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ de h^{-1} juegan un papel similar a los valores de ramificación de las funciones racionales. El concepto de singularidad esencial es delicado, para un tratamiento meticoloso ver [8], [27, pág. 53], [4, pág. 145–146]. En esa medida, elegimos a $\gamma = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como la curva de Jordan orientada que pasa por las dos singularidades esenciales, generando el mosaico

$$\mathfrak{M}_\gamma = \overline{\mathbb{H}}_+ \cup \overline{\mathbb{H}}_- = \tau \cup \tau' = \widehat{\mathbb{C}}_w.$$

Convenimos la asignación de colores en las dos caras de $\mathfrak{M}_\gamma$ como en el Ejemplo 1.1.1. De nuevo la imagen inversa de γ , bajo h , engendra el mosaico $\mathfrak{M}_{h^{-1}(\gamma)}$, expuesto en la Figura 1.1(c). No hay dificultad alguna en notar que $\mathfrak{M}_{h^{-1}(\gamma)}$ está formado por las franjas horizontales

$$\underbrace{2\pi k \leq \Im(z) \leq \pi(2k+1)}_{\text{caras azules}} \quad \text{y} \quad \underbrace{\pi(2k+1) \leq \Im(z) \leq 2\pi(k+1)}_{\text{caras grises}},$$

respectivamente, con $k = 0, 1, \dots$

Como una motivación analítica para la elección de $\gamma = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, recordemos que a finales del siglo XIX, la siguiente versión del teorema de representación conforme de Riemann fue estudiada. Consideremos un polígono cerrado $\Pi \subset \widehat{\mathbb{C}}_z$ y asumamos la existencia de una función conforme $g_0 : \Pi^\circ \rightarrow \mathbb{H}_+$, donde $\partial\mathbb{H}_+ = \gamma$. Esta función g_0 admite una extensión analítica por reflexiones a través de los lados del polígono Π , generando una superficie de Riemann S y una función conforme $g : S = \bigcup_\alpha \Pi_\alpha \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$. Para un tratamiento cuidadoso de esta construcción, consulte [19, Capítulo 10, Sección 2]. La superficie de Riemann S tiene un mosaico $\mathfrak{M}$ dado por la unión de los polígonos topológicos $\{\Pi_\alpha\}$. En casos muy especiales el mosaico $\mathfrak{M}$ es como el establecido en la Ecuación (1.6).

Observación 1.1.1. Dada una función racional o singular complejo analítica $g : S_{top} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, es fundamental resaltar que el algoritmo de Klein depende de la elección de la curva de Jordan. Concretamente, la topología del mosaico $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$ depende del orden en que γ pasa por los valores de ramificación de g , como se ilustra en el siguiente ejemplo.

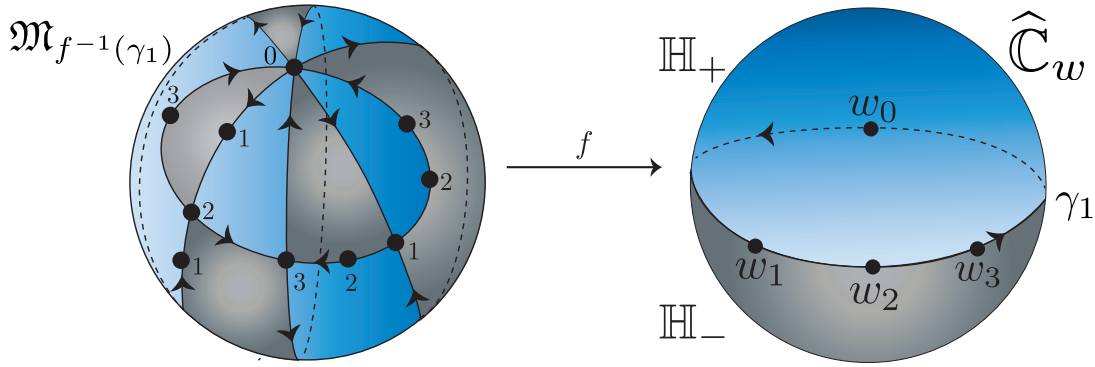


Figura 1.2: Mosaico $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma_1)}$ determinado por el polinomio $f(z) = z^4 - 4z^3 - 4z^2$ y la curva de Jordan orientada $\gamma_1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Ejemplo 1.1.4 (Dependencia del mosaico $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma)}$ con respecto a la curva γ). Consideremos el polinomio

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad f(z) = z^4 - 4z^3 - 4z^2.$$

Los puntos críticos de f son

$$C_f = \{\infty, z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 2\},$$

con multiplicidades $\{3, 1, 1, 1\}$, respectivamente. Los valores de ramificación son

$$R_f = \{\infty, w_1 = -32, w_2 = -7, w_3 = 0\}.$$

Seleccionemos primero la curva de Jordan orientada

$$\gamma_1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Esta curva pasa por los valores de ramificación en el siguiente orden cíclico ∞, w_1, w_2, w_3 , tal como se indica a la derecha de la Figura 1.2. La orientación de γ_1 y los colores de las caras $\tau = \mathbb{H}_+$ y $\tau' = \mathbb{H}_-$, son tales como se estableció en el Ejemplo 1.1.1, dando origen al mosaico

$$\mathfrak{M}_{\gamma_1} = \overline{\mathbb{H}}_+ \cup \overline{\mathbb{H}}_- = \tau \cup \tau' = \widehat{\mathbb{C}}_w.$$

El mosaico $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma_1)}$ determinado por la gráfica plana $f^{-1}(\gamma_1)$ se bosqueja a la izquierda de la Figura 1.2.

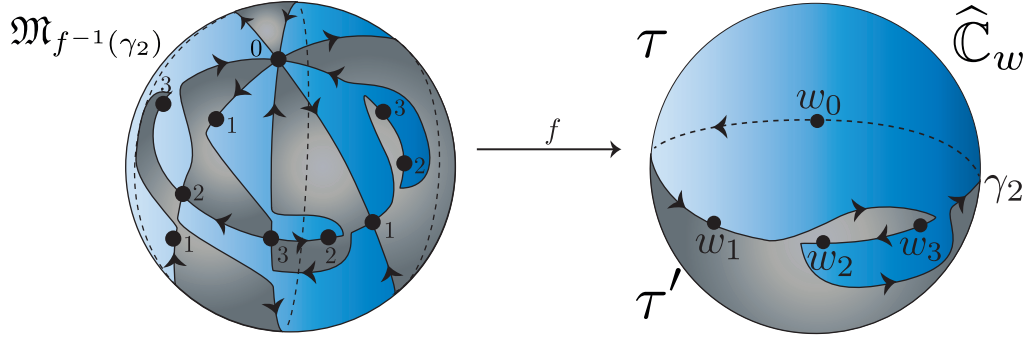


Figura 1.3: Mosaico $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma_2)}$ determinado por el polinomio $f(z) = z^4 - 4z^3 - 4z^2$ y la curva de Jordan orientada γ_2 .

Consideremos ahora la curva de Jordan orientada γ_2 , indicada a la derecha de la Figura 1.3. Esta curva pasa por los elementos de R_f en el orden cíclico ∞, w_1, w_3, w_2 . Al calcular la imagen inversa de la curva γ_2 , bajo f , obtenemos el mosaico $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma_2)}$, ilustrado a la izquierda de la Figura 1.3.

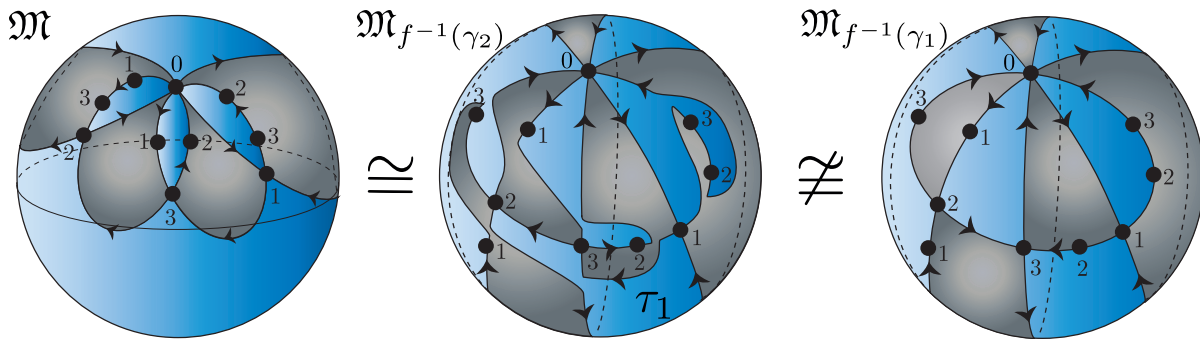


Figura 1.4: Mosaicos $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma_1)}$ y $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma_2)}$, topológicamente no equivalentes, para el polinomio $f(z) = z^4 - 4z^3 - 4z^2$.

La Figura 1.4 deja intuir que no podemos hacer ninguna deformación continua, que preserve orientación, para ir del mosaico $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma_1)}$ al mosaico $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma_2)}$. Dicho de otra manera, los mosaicos $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma_1)}$ y $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma_2)}$ no tienen las mismas topologías o no son homeomorfos. Es fácil convencernos de esto al observar lo siguiente:

- i) los mosaicos $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma_2)}$ y $\mathfrak{M}$ tienen la misma topología o son homeomorfos (ver a la izquierda de la Figura 1.4);
- ii) la cara τ_1 del mosaico $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma_2)}$ (o equivalentemente el mosaico $\mathfrak{M}$) tiene todos los puntos críticos de f en su frontera, cosa que no ocurre con ninguna cara en $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma_1)}$.
- Por todo lo dicho concluimos que los mosaicos $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma_1)}$ y $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma_2)}$ no son homeomorfos.

1.2. Gráficas de Speiser para funciones singulares complejo analíticas.

El matemático suizo A. Speiser [39] introdujo los objetos que hoy se conocen como *gráficas de Speiser*. Para nuestros fines, definimos estas gráficas en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}_z$ provista con mosaicos $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$, obtenidos a partir del Algoritmo 1.1.1.

Definición 1.2.1. Consideremos una función racional $g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ con k valores de ramificación. La *gráfica de Speiser* $\mathcal{S}_g$ asociada a g , es la gráfica dual (en el sentido de Poincaré) de la gráfica $g^{-1}(\gamma)$.

La definición anterior se puede extender para superficies de Riemann arbitrarias S .

Observación 1.2.1. Es instructivo fijarse en las siguientes características de las gráficas de Speiser.

1. La gráfica de Speiser $\mathcal{S}_g$ es una gráfica conexa.
2. Los vértices de $\mathcal{S}_g$ son bipartitos; asignamos el color rojo (resp. amarillo) a los vértices de $\mathcal{S}_g$ en las caras azules (resp. grises) de $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$.
3. La imagen de $\mathcal{S}_g$, bajo g , es la gráfica dual de γ . Dicha gráfica tiene exactamente dos vértices: uno rojo (de valencia k) en la cara azul τ de $\mathfrak{M}_\gamma$ y uno amarillo (de valencia k) en la cara gris τ' .
4. Cada vértice de $\mathcal{S}_g$ tiene valencia k (recordemos que k denota el número de valores de ramificación de g).
5. Por construcción, el interior de cada cara de $\mathcal{S}_g$ contiene un elemento de la forma $f^{-1}(w_j)$, donde w_j es un valor de ramificación de g .
6. Para cada cara de $\mathcal{S}_g$, el número de aristas que conforma su frontera es $2(\nu_j + 1)$, donde ν_j es el índice de ramificación del punto $f^{-1}(w_j)$ mencionado en el punto anterior.

La dualidad entre las gráficas de Speiser $\mathcal{S}_g$ y las gráficas completas $g^{-1}(\gamma)$ generan el diagrama siguiente, análogo al dado en (1.7) del Lema 1.1.1.

Lema 1.2.1. El mosaico $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)}$ está totalmente determinado por la gráfica de Speiser $\mathcal{S}_g$, y viceversa.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Función racional } g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \\
 \text{y curva de Jordan orientada } \gamma \text{ adecuada} \\
 \downarrow \\
 \text{Gráfica de Speiser } \mathcal{S}_g \longleftrightarrow \text{Mosaico } \mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)} \text{ de } \widehat{\mathbb{C}}_z \longleftrightarrow \text{Gráfica plana, orientada,} \\
 \text{por } k\text{-ágonos, para una única } k \longleftrightarrow \text{conexa y etiquetada } g^{-1}(\gamma).
 \end{array} \tag{1.8}$$

Ejemplo 1.2.1. La Figura 1.5 exhibe las gráficas de Speiser de las funciones

$$f(z) = z^3 - 3z, \quad g(z) = \frac{1 + 3z - 3z^2 + 3z^3}{3 - 3z + 3z^2 + z^3} \quad \text{y} \quad h(z) = e^z,$$

estudiadas en los Ejemplos 1.1.1–1.1.3.

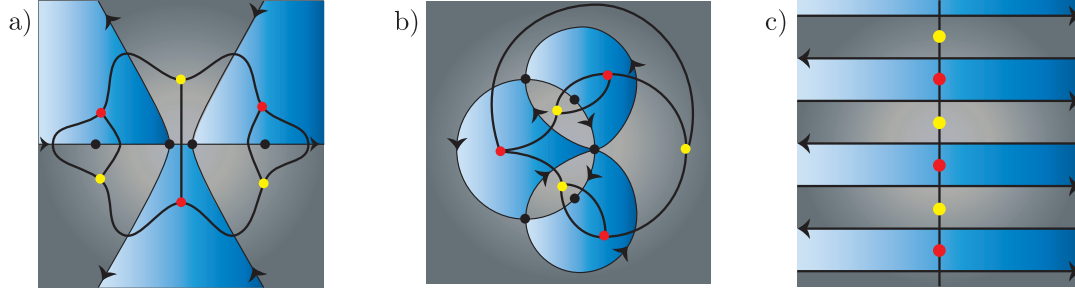


Figura 1.5: Gráficas de Speiser asociadas al polinomio $f(z) = z^3 - 3z$, la función racional $g(z) = (1+3z-3z^2+3z^3)/(3-3z+3z^2+z^3)$ y la función trascendente $h(z) = e^z$, respectivamente.

Ejemplo 1.2.2. Consideremos la función trascendente

$$p : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad p(z) = \cos z.$$

La pretensión de este ejemplo es evidenciar que incluso para funciones singulares complejo analíticas, con un conjunto infinito de puntos críticos, el Algoritmo 1.1.1 funciona y por ende la gráfica de Speiser queda también determinada. Un cálculo sencillo arroja que el conjunto de puntos críticos finitos de p es

$$\{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

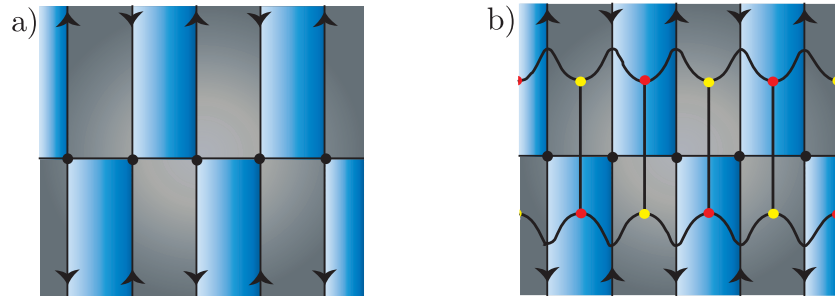


Figura 1.6: Mosaico $\mathfrak{M}_{p^{-1}(\gamma)}$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$ y gráfica de Speiser $\mathcal{S}_p$ determinados por $p(z) = \cos z$.

El valor de ramificación correspondiente al conjunto $\{\pi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ es $w_1 = -1$ y el pertinente al conjunto $\{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ es $w_2 = 1$. Bajo estas condiciones podemos elegir a $\gamma = \mathbb{R} \cup \infty$ como

la curva de Jordan orientada que pasa por todos los valores de ramificación de $p(z)$ (incluyendo a ∞). Nuevamente asignamos el color azul (resp. gris) a $\tau = \overline{\mathbb{H}}_+$ (resp. $\tau' = \overline{\mathbb{H}}_-$) produciendo el mosaico

$$\mathfrak{M}_\gamma = \overline{\mathbb{H}}_+ \cup \overline{\mathbb{H}}_- = \tau \cup \tau' = \widehat{\mathbb{C}}_w.$$

La imagen inversa de γ bajo p produce el mosaico $\mathfrak{M}_{p^{-1}(\gamma)}$ bosquejado en la Figura 1.6(a). La gráfica de Speiser $\mathcal{S}_p$ asociada a p se ilustra en la Figura 1.6(b).

Recientemente estas gráficas han sido aplicadas como una herramienta para determinar el tipo de superficie cubriente S de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}_w$ con k ponchaduras $w_0, \dots, w_{k-1}$. El lector puede consultar los trabajos de D. Masoero [27], y S. A. Merenkov [29], entre otros. Por otro lado, en 1984, P.G. Doyle [12] consideró el problema de determinar el tipo conforme hiperbólico o parabólico de una superficie cubriente de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}_w$ con k ponchaduras a través de las propiedades de su gráfica de Speiser. Asimismo, R. Nevanlinna [36, pág. 291] y G. Elfving [13] trabajaron en la clasificación, vía gráficas de Speiser, de las superficies de Riemann. Por ejemplo, la sub-familia de superficies que vienen de las funciones $g(z) = \int_z e^{-P(\zeta)} d\zeta$, donde $P(z)$ es polinomio. Ver A. Álvarez *et al.* [4], para relaciones con campos vectoriales complejo analíticos.

1.3. Correspondencia natural entre funciones singulares complejo analíticas y algunos objetos analíticos, geométricos.

Finalmente, en superficies de Riemann existe una correspondencia natural entre:

- i) funciones $g(z)$,
- ii) 1-formas $g'(z)dz$,
- iii) campos vectoriales $\frac{1}{g'(z)} \frac{\partial}{\partial z}$ y
- iv) diferenciales cuadráticas $(g'(z))^2 dz \otimes dz$.

Dicha correspondencia se expresa con el siguiente diagrama (ver [40], [32], [31], [4])

$$\begin{array}{ccc} g(z) & \longleftrightarrow & g'(z)dz \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \frac{1}{g'(z)} \frac{\partial}{\partial z} & \longleftrightarrow & (g'(z))^2 dz \otimes dz. \end{array} \tag{1.9}$$

Debido a la equivalencia expuesta en (1.9), los resultados usados en teoría de gráficas para las funciones $\{g(z)\}$ tienen sus interpretaciones correspondientes para todas estas clases de objetos.

Ejemplo 1.3.1. Consideremos el polinomio del Ejemplo 1.1.1

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad f(z) = z^3 - 3z.$$

En este caso el Diagrama (1.9) toma la forma siguiente.

$$\begin{array}{ccc} z^3 - 3z & \longleftrightarrow & 3(z-1)(z+1)dz \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \frac{1}{3(z-1)(z+1)} \frac{\partial}{\partial z} & \longleftrightarrow & 9(z^2-1)^2 dz \otimes dz. \end{array}$$

El diagrama anterior asocia de manera canónica el campo $\frac{1}{3(z-1)(z+1)} \frac{\partial}{\partial z}$ al mosaico $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma)}$. Las curvas de nivel singulares del campo $\frac{1}{3(z-1)(z+1)} \frac{\partial}{\partial z}$ coinciden con la gráfica completa $f^{-1}(\gamma)$, determinada por el mosaico $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma)}$. Los vértices de valencia 4 de $f^{-1}(\gamma)$ (puntos críticos finitos de f) coinciden con los dos polos simples del campo.

Por otra parte, la teoría de gráficas y los métodos combinatorios son integrados con ideas numéricas y analíticas, para enriquecer el estudio de los objetos en (1.9), como lo muestra J. C. Langer en [25].

W. M. Boothby [9], [10] estudió cuando una foliación singular real $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{C}$, viene de las curvas de nivel de una función armónica $\Re(g(z))$. Estas foliaciones deben tener singularidades del tipo topológico $\Re(z^n)$ para $n \geq 2$. Como era de esperarse estas foliaciones determinan gráficas planas Λ (y su respectivo mosaico $\mathfrak{M}_\Lambda$) teniendo como vértices las singularidades de $\mathcal{F}$, incluyendo a ∞ , y como aristas las curvas de nivel por las singularidades). En el Ejemplo 1.3.2, presentamos una foliación polinomial donde la gráfica plana determinada Λ no viene de la imagen inversa de una única curva de Jordan orientada que pasa por los valores de ramificación del polinomio. Este ejemplo viola una de las hipótesis de nuestro resultado principal (enunciado más adelante en el Teorema 3.1.2), pero muestra que hay diversas formas de construir mosaicos en la esfera a partir de funciones racionales.

Ejemplo 1.3.2. En la Figura 1.7(a), consideramos una foliación real $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{C}_z$ con singularidades

$$\{z_1 = -1, z_2 = 1, z_3 = -i\}.$$

Existe una función armónica $\Re(g(z))$ cuyas curvas de nivel coinciden con $\mathcal{F}$ (como en [9], [10]). Es más, podemos reconocer a $g(z)$ como sigue

$$g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad g(z) = \int_z (z+1)(z-1)(z+i)dz.$$

La foliación $\mathcal{F}$ determina una gráfica plana $\Lambda \subset \widehat{\mathbb{C}}_z$ (y un mosaico respectivo $\mathfrak{M}_\Lambda$) con tres vértices de valencia 4 en $-1, 1, -i$ y un vértice de valencia 10 en ∞ ; ver la Figura 1.7(b).

Si examinamos detenidamente la gráfica Λ podemos concluir que esta es la imagen inversa de dos curvas de Jordan orientadas $\gamma_1, \gamma_2 \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ bajo g , que se intersectan en ∞ ; γ_1 que pasa por los valores de ramificación $g(-1)$ y $g(1)$ and γ_2 pasa por $g(-i)$, *i.e.*

$$\Lambda = g^{-1}(\gamma_1) \cup g^{-1}(\gamma_2).$$

1.3. Correspondencia entre funciones, 1-formas, campos vectoriales y diferenciales cuadráticas

Ciertamente la frontera $\partial\tau_1$ de la cara azul τ_1 de $\mathfrak{M}_\Lambda$ es una curva cerrada que se auto-intersecta en ∞ ; ver la curva roja en la Figura 1.7. Por esta razón, la gráfica Λ no pertenece a las descritas en el Teorema 3.1.2.

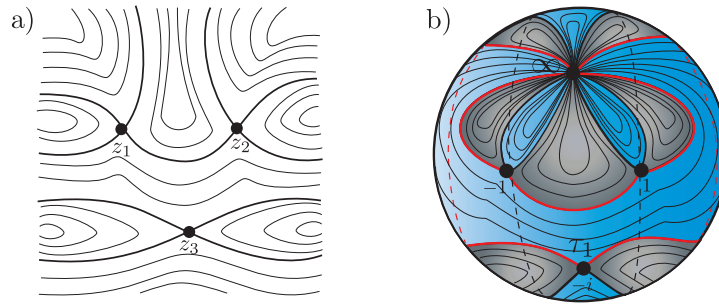


Figura 1.7: a) Foliación real $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{C}_z$, b) mosaico $\mathfrak{M}_\Lambda$ asociado a $\mathcal{F}$.

Capítulo 2

Una correspondencia entre mosaicos $\mathfrak{M}$ dados por k -ágonos topológicos y funciones singulares complejo analíticas

El objetivo central en este Capítulo es la construcción de un morfismo “ $\uparrow$ ” de superficies topológicas y orientadas S_{top} , provistas con mosaicos $\mathfrak{M}$ dados por k -ágonos topológicos, con $k \geq 3$ fija, a funciones singulares complejo analíticas $g : S_{top} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$.

2.1. Mosaicos a la H. A. Schwarz, R. Nevanlinna y G. V. Belyĭ.

Como punto de partida, podemos plantearnos el Problema 1, ya mencionado en la introducción de este documento.

Problema 1. *Determinar bajo qué condiciones un mosaico $\mathfrak{M}$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$ proviene de una función racional $g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ y una curva de Jordan orientada γ adecuada.*

Para dar una respuesta al Problema 1 es importante primero, recordar los siguientes hechos. Consideremos un k -ágono topológico $\tau \subset \mathbb{C}$, coloreado de azul, con vértices $\{w_0, w_1, \dots, w_{k-1}\}$, cuya frontera está orientada en sentido antihorario. Denotemos con τ' una copia de τ , coloreado de gris, cuya frontera está orientada en sentido horario. Al identificar τ con τ' a lo largo de sus fronteras $\gamma := \partial\tau = \partial\tau'$, a través de la isometría identidad, obtenemos una esfera topológica Σ_{top} , con k puntos marcados $\{w_0, w_1, \dots, w_{k-1}\}$, provista con un mosaico a dos colores

$$\mathfrak{M}_\gamma = \tau \cup \tau' = \Sigma_{top}, \quad (2.1)$$

tal como se exhibe a la izquierda de la Figura 2.1. Es posible dotar con una estructura compleja a la esfera Σ_{top} , como se constata a continuación.

Lema 2.1.1. *Existe para la esfera Σ_{top} una estructura de superficie de Riemann que la hace biholomorfa a la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}_w$.*

Esta situación se ejemplifica en la Figura 2.1.

Demostración. Consideremos el semiplano superior $\mathbb{H}_+$ y su frontera $\gamma = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con k puntos marcados $\{w'_0 = \infty, w'_1, \dots, w'_{k-1}\}$ tal que

$$w'_1 < w'_2 < \dots < w'_{k-1}.$$

Asignamos el color azul a $\mathbb{H}_+$ y la orientación de γ tal que $\mathbb{H}_+$ está a su izquierda; ver a la derecha de la Figura 2.1. Por el teorema del mapeo de Riemann existe un biholomorfismo

$$\psi_0 : \tau \subset \Sigma_{top} \longrightarrow \overline{\mathbb{H}}_+,$$

donde la imagen de los vértices de τ bajo ψ son los puntos marcados en la frontera γ de $\mathbb{H}_+$ cumpliendo que $\psi_0(w_j) = w'_j$, para cada $j = 0, \dots, k-1$. Usando el principio de reflexión de Schwarz podemos extender ψ_0 al biholomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : \Sigma_{top} &\longrightarrow \overline{\mathbb{H}}_+ \cup \overline{\mathbb{H}}_- \\ \tau &\mapsto \overline{\mathbb{H}}_+ \\ \tau' &\mapsto \overline{\mathbb{H}}_-, \end{aligned}$$

asignando el color gris a $\mathbb{H}_-$. Dado que la estructura compleja de $\overline{\mathbb{H}}_+ \cup \overline{\mathbb{H}}_-$ debe ser la de la esfera de Riemann, existe un biholomorfismo $\phi : \overline{\mathbb{H}}_+ \cup \overline{\mathbb{H}}_- \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$. El pull-back de la estructura compleja a través de la composición $\psi \circ \phi$ proporciona una estructura de superficie de Riemann para Σ_{top} . Finalmente, por el teorema de uniformización sabemos que cualquier superficie de Riemann (topológicamente una esfera) es biholomorficamente equivalente a la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}_w$. Para un examen más detallado de este resultado, el lector puede referirse a [37, Capítulo I, 1.8.3, pág. 74] y [1]. $\square$

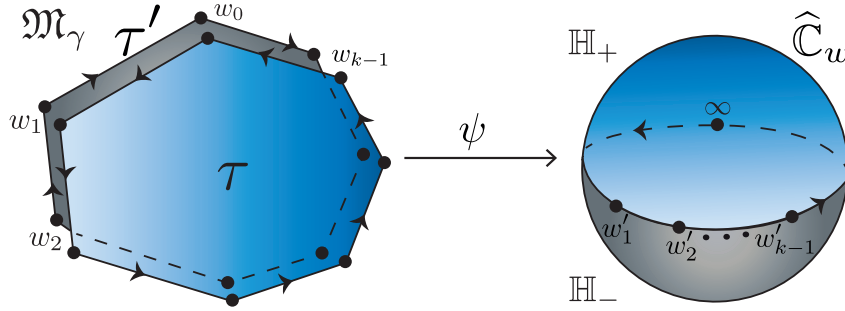


Figura 2.1: Esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}_w$ vista como el pegado de dos k -ágonos topológicos.

Observación 2.1.1. Resulta claro que $\widehat{\mathbb{C}}_w$ hereda el mosaico $\mathfrak{M}_\gamma$ de Σ_{top} , es decir,

$$\mathfrak{M}_\gamma = \overline{\mathbb{H}}_+ \cup \overline{\mathbb{H}}_- = \widehat{\mathbb{C}}_w. \quad (2.2)$$

La generalización del Lema 2.1.1 es posible en el siguiente caso.

Lema 2.1.2. Consideremos una superficie topológica y orientada S_{top} obtenida a través del pegado de k -ágonos topológicos, a lo largo de sus fronteras. Existe para S_{top} una estructura de superficie de Riemann. $\square$

El teorema siguiente nos proporciona una respuesta al Problema 1, para funciones singulares complejo analíticas, no solo para funciones racionales.

Teorema 2.1.1 (L. J. González Cely, J. Muciño-Raymundo [16]). *Consideremos una superficie topológica, orientada y sin frontera, no necesariamente compacta S_{top} provista con un mosaico*

$$\mathfrak{M} = \underbrace{\bigcup_{\mathfrak{t}=1}^m \tau_{\mathfrak{t}}}_{\text{caras azules}} \cup \underbrace{\bigcup_{\mathfrak{t}=1}^m \tau'_{\mathfrak{t}}}_{\text{caras grises}}$$

que satisface lo siguiente:

- i) $\mathfrak{M}$ está dado por una colección finita o numerable ($m \leq \infty$) de k -ágonos topológicos $\{\tau_{\mathfrak{t}}, \tau'_{\mathfrak{t}}\}$, con $k \geq 3$ fija;
 - ii) los k -ágonos están coloreados de manera alterna azul-gris en S_{top} (equivalentemente la valencia de cada vértice, en la gráfica asociada a $\mathfrak{M}$, es par o infinita);
 - iii) los k -ágonos de $\mathfrak{M}$ no tienen aristas sin identificar;
 - iv) para cada cara azul $\tau_{\mathfrak{t}}$, los k vértices en $\partial\tau_{\mathfrak{t}}$ están etiquetados con los números $0, 1, \dots, k-1$ tal que el orden cíclico de las etiquetas es $0, 1, \dots, k-1$, al recorrer $\partial\tau_{\mathfrak{t}}$ en sentido antihorario;
 - v) la etiqueta de cada vértice de S_{top} es la misma para todas las fronteras de sus caras adyacentes.
- Entonces, existen una estructura de superficie de Riemann S_{hol} (en S_{top}) y una función singular complejo analítica

$$g : S_{hol} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w,$$

con

$$\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)} = \mathfrak{M},$$

donde $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ es una curva de Jordan orientada que pasa por los k valores de ramificación $\{w_0, w_1, \dots, w_j, \dots, w_{k-1}\}$ de g .

Demostración. La idea general es identificar todas las caras azules $\tau_{\mathfrak{t}}$ con $\mathbb{H}_+$ y las grises con $\mathbb{H}_-$; obteniendo una función continua g_{top} . De esta manera se construye un diagrama conmutativo, como el que se indica a continuación.

$$\begin{array}{ccc} S_{hol} & \xrightarrow{g} & \widehat{\mathbb{C}}_w \\ \uparrow \Psi & & \uparrow \psi \\ S_{top} \cong \mathfrak{M} & \xrightarrow{g_{top}} & \mathfrak{M}_{\gamma} \cong \Sigma_{top} \end{array}$$

Para empezar, reconocemos a S_{top} como el pegado de los k -ágonos topológicos $\{\tau_{\mathfrak{t}}, \tau'_{\mathfrak{t}}\}$ de $\mathfrak{M}$, a lo largo de sus fronteras, según lo indique $\mathfrak{M}$. Por el Lema 2.1.2, existe para S_{top} una estructura de superficie de Riemann S_{hol} , es decir, existe un biholomorfismo

$$\Psi : S_{top} \cong \mathfrak{M} \longrightarrow S_{hol},$$

tal que S_{hol} está provista con el mosaico $\mathfrak{M}$, como se expone a la izquierda de la Figura 2.2.

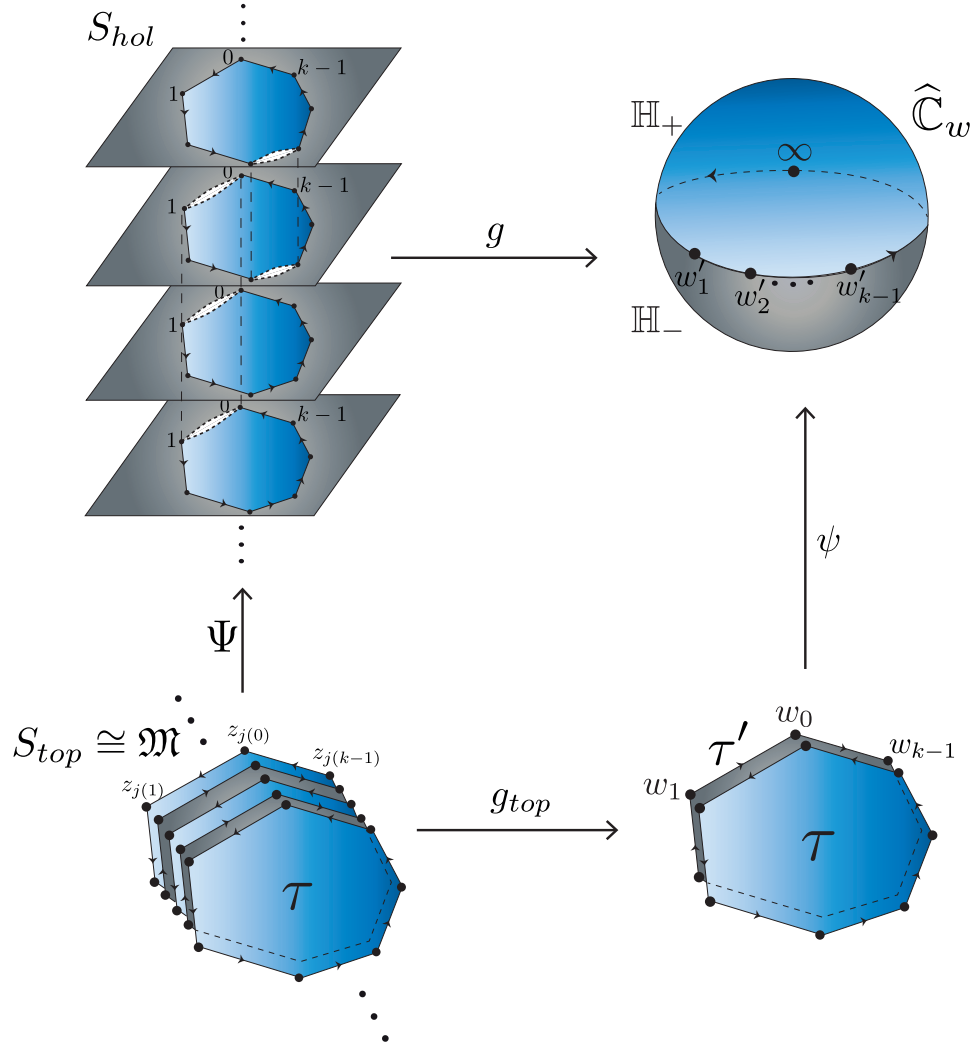


Figura 2.2: Diagrama conmutativo para superficies provistas con mosaicos por k -ágonos topológicos.

Posteriormente, consideremos la esfera topológica Σ_{top} dada por el pegado de dos k -ágonos topológicos τ y τ' a lo largo de su frontera, tal como se indicó en (2.1). El k -ágono τ (resp. τ') es una copia de algún τ_t (resp. τ'_t) en S_{top} . De esta manera obtenemos el mosaico $\mathfrak{M}_\gamma = \tau \cup \tau'$ de Σ_{top} . Ahora, como mencionamos en un inicio, podemos reconocer a $\hat{\mathbb{C}}_w$ como el pegado de $\mathbb{H}_+$ y $\mathbb{H}_-$, a través de $\gamma = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \hat{\mathbb{C}}_w$ con k puntos marcados $\{\infty, w_1, w_2, \dots, w_{k-1}\}$, con la isometría identidad. Por el Lema 2.1.1, existe un biholomorfismo

$$\psi : \mathfrak{M}_\gamma \cong \Sigma_{top} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}_w.$$

A la derecha de la Figura 2.1 se advierte tal situación.

A partir de ahora, nuestro objetivo será construir un cubriente topológico ramificado g_{top} , tal

que para cada $\mathbf{t}$

$$\begin{aligned} g_{top} : S_{top} \cong \mathfrak{M} &\longrightarrow \mathfrak{M}_\gamma \cong \Sigma_{top} \\ \tau_{\mathbf{t}} &\mapsto \tau \\ \tau'_{\mathbf{t}} &\mapsto \tau'. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Asignamos una orientación en $\mathfrak{M}$ tal que: la frontera de cada cara azul $\tau_{\mathbf{t}}$ está orientada en sentido antihorario y la frontera de cada cara gris en sentido horario.

Por la hipótesis (iv), todos los vértices de $\mathfrak{M}$ están etiquetados tal que el orden cíclico de las etiquetas, en cada cara azul $\tau_{\mathbf{t}}$, es $0, 1, \dots, k-1$, al recorrer $\partial\tau_{\mathbf{t}}$ en sentido antihorario. Este hecho implica que el orden cíclico de las etiquetas, en cada cara gris $\tau'_{\mathbf{t}}$, es $0, 1, \dots, k-1$, al recorrer $\partial\tau'_{\mathbf{t}}$ en sentido horario.

Para cada $\mathbf{t}$, requerimos una notación precisa de los vértices en $\partial\tau_{\mathbf{t}}$, que nos permita reconocer la etiqueta de cada vértice. Denotemos con el conjunto $\{z_{\mathbf{t}(0)}, z_{\mathbf{t}(1)}, \dots, z_{\mathbf{t}(k-1)}\}$ los vértices en la frontera $\partial\tau_{\mathbf{t}}$ de la cara azul $\tau_{\mathbf{t}}$ de $\mathfrak{M}$, donde la etiqueta de cada vértice $z_{\mathbf{t}(l)}$ es l . En la parte inferior izquierda de la Figura 2.2 se evidencia tal situación.

Para los vértices en cada $\partial\tau_{\mathbf{t}}$, definimos la siguiente biyección.

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{t}}^0 : \{z_{\mathbf{t}(0)}, z_{\mathbf{t}(1)}, \dots, z_{\mathbf{t}(l)}, \dots, z_{\mathbf{t}(k-1)}\} &\longrightarrow \{w_0, w_1, \dots, w_l, \dots, w_{k-1}\} \\ z_{\mathbf{t}(l)} &\longmapsto w_l. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por construcción, el orden cíclico de las etiquetas en los vértices de $\partial\tau_{\mathbf{t}}$, siguiendo su orientación, coincide con el orden de los subíndices de los vértices $\{w_0, w_1, \dots, w_{k-1}\}$ en γ .

Para cada $\mathbf{t}$, la biyección $g_{\mathbf{t}}^0$ extiende continuamente a un homeomorfismo de círculos,

$$\widehat{g_{\mathbf{t}}^0} : \partial\tau_{\mathbf{t}} \longrightarrow \gamma.$$

Continuando, cada homeomorfismo se extiende continuamente al interior de las caras azules,

$$\widehat{\widehat{g_{\mathbf{t}}^0}} : \tau_{\mathbf{t}} \longrightarrow \tau.$$

Todos los anteriores homeomorfismos en $\mathfrak{M}$ se extienden continuamente al interior de todas las caras grises, obteniendo de esta manera el cubriente topológico ramificado requerido en la Ecuación (2.3)

$$\begin{aligned} g_{top} : S_{top} \cong \mathfrak{M} &\longrightarrow \mathfrak{M}_\gamma \cong \Sigma_{top} \\ \tau_{\mathbf{t}} &\mapsto \tau \\ \tau'_{\mathbf{t}} &\mapsto \tau'. \end{aligned}$$

Cada vértice $z_{\mathbf{t}(l)}$ de $\mathfrak{M}$, con valencia $2(\nu_{\mathbf{t}(l)} + 1)$, tiene índice de ramificación $\nu_{\mathbf{t}(l)}$ en S_{top} . En la Figura 2.2 se pretende dar una representación de tal situación.

Finalmente, el cubriente topológico ramificado g_{top} y los biholomorfismos ψ, Ψ determinan una función singular complejo analítica

$$\begin{aligned} g : S_{hol} &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \\ \tau_{\mathbf{t}} &\mapsto \overline{\mathbb{H}}_+ \\ \tau'_{\mathbf{t}} &\mapsto \overline{\mathbb{H}}_-, \end{aligned}$$

como se revela en la Figura 2.2. □

Ejemplo 2.1.1 (Mosaicos por triángulos y función polinomial). Trivialmente una de las funciones determinadas por la esfera $\widehat{\mathbb{C}}_z$, provista con el mosaico por triángulos ilustrado en la Figura 1.1(a), es el polinomio del Ejemplo 1.1.1

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad f(z) = z^3 - 3z.$$

Ejemplo 2.1.2 (Mosaicos por triángulos y función racional). Si consideramos la esfera $\widehat{\mathbb{C}}_z$ con el mosaico esbozado en la Figura 1.1(b), entonces es fácil verificar que una función racional que realiza tal mosaico es la dada en el Ejemplo 1.1.2

$$g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad g(z) = \frac{1 + 3z - 3z^2 + 3z^3}{3 - 3z + 3z^2 + z^3}.$$

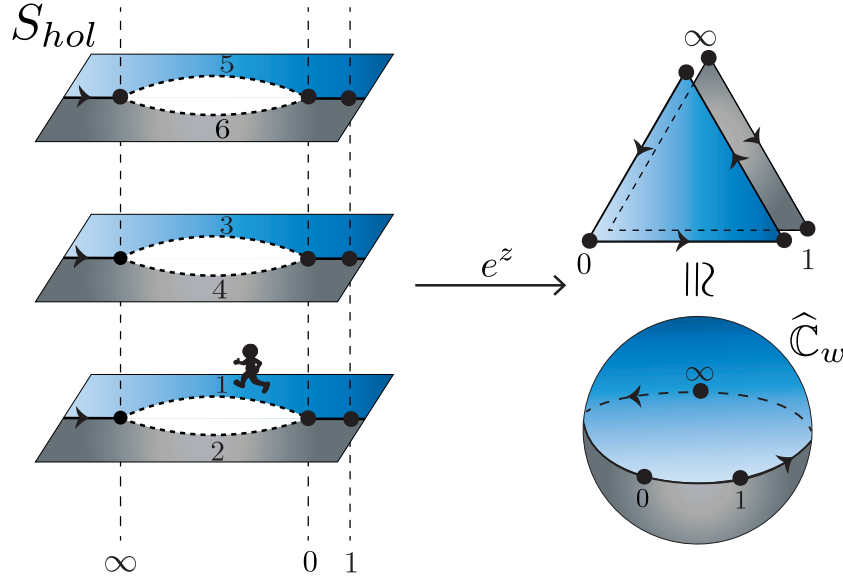


Figura 2.3: Mosaico por triángulos realizable por la función exponencial.

Ejemplo 2.1.3 (Mosaicos por triángulos y función exponencial). Consideremos la superficie S con el mosaico $\mathfrak{M}$ trazado a la izquierda de la Figura 2.3. La superficie S está conformada por un conjunto numerable de triángulos, donde las aristas $\{\infty 0\}$ de todos los triángulos en $\mathfrak{M}$ se identifican siguiendo el orden de los números naturales, como lo muestra la Figura 2.3.

Sorprendentemente la función meromorfa que realiza dicha superficie es la función exponencial.

Ejemplo 2.1.4 (Mosaicos por cuadrados y triángulos determinados por las funciones $\wp$, $\wp'$ de Weierstrass). Consideremos el plano complejo $\mathbb{C}$ provisto con un mosaico $\mathfrak{M}_1$ por cuadrados, tal como se traza en la parte superior de la Figura 2.4. El número complejo Λ , llamado *período*, es tal que

$$\Im(\Lambda) > 0, \quad -1/2 < \Re(\Lambda) \leq 1/2, \quad |\Lambda| \geq 1 \quad \text{y} \quad \Re(\Lambda) \geq 0 \quad \text{si} \quad |\Lambda| = 1.$$

Existe un único toro complejo

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &\longrightarrow \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z} \oplus \Lambda \mathbb{Z}} = \mathbb{T}^2 \\ z &\longmapsto [z].\end{aligned}$$

Para más detalles se puede consultar [2, pág. 268]. El dominio fundamental de $\mathbb{T}^2$ está compuesto por 4 cuadrados, tal como se señala en las Figuras 2.4 y 2.5. De esta manera obtenemos el mosaico $\mathfrak{M}_1$ para el toro $\mathbb{T}^2$.

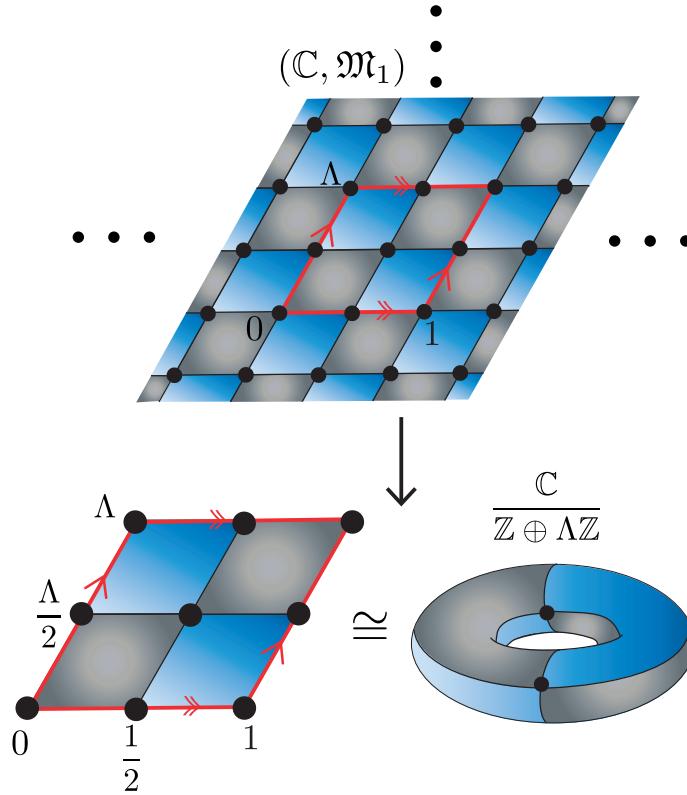


Figura 2.4: Toro complejo $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \Lambda \mathbb{Z})$.

El período Λ determina la función $\wp(z; \Lambda)$ de Weierstrass

$$\begin{aligned}\wp(z; \Lambda) : \mathbb{T}^2 &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z^2} + \sum_{w \neq 0} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right),\end{aligned}\tag{2.5}$$

donde la suma oscila sobre todos $w = m + s\Lambda \neq 0$, con $m, s \in \mathbb{Z}$. La función $\wp(z; \Lambda)$ tiene un polo doble en el origen, con residuo cero. Por otra parte, la derivada de $\wp(z; \Lambda)$ es la función elíptica dada por la expresión

$$\begin{aligned}\wp'(z; \Lambda) : \mathbb{T}^2 &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto -2 \sum_{w \in \mathbb{T}^2} \frac{1}{(z-w)^3}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

La función $\wp'(z; \Lambda)$ es meromorfa con un polo triple en el origen.

Una propiedad bastante interesante de las funciones $\wp(z; \Lambda)$ y su derivada $\wp'(z; \Lambda)$ es que existen $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ tal que $\wp$ y $\wp'$ satisfacen la ecuación diferencial

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3, \quad (2.7)$$

tal como se puede constatar en [2, pág. 276]. A partir de esta relación algebraica, se puede definir la aplicación

$$\begin{aligned} H : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) &\longmapsto \mathfrak{z}_2^2 - 4\mathfrak{z}_1^3 + g_2\mathfrak{z}_1 + g_3, \end{aligned}$$

a través de la cual se obtiene un encaje ϕ del toro $\mathbb{T}^2$ en el plano $\mathbb{C}^2$, como sigue

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{H} & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & [z] & \longmapsto & (\wp(z; \Lambda), \wp'(z; \Lambda)) & \longmapsto & 0. \end{array} \quad (2.8)$$

La función φ es un encaje holomorfo de $\mathbb{T}^2$ en la curva algebraica $\{H(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) = 0\}$. Adicionalmente, la función $\wp(z; \Lambda)$ determina una proyección meromorfa de la curva algebraica $\varphi(\mathbb{T}^2) \subset \mathbb{C}^2$ en las franjas horizontales $\mathbb{C} = \{\mathfrak{z}_1\}$ de $\mathbb{C}^2$.

La función $\wp(z; \Lambda)$ en (2.5) tiene cuatro puntos críticos

$$C_{\wp(z; \Lambda)} = \left\{ [0], \left[\frac{1}{2} \right], \left[\frac{\Lambda}{2} \right], \left[\frac{\Lambda}{2} + \frac{1}{2} \right] \right\} = \{(\wp')^{-1}(0)\} \subset \mathbb{T}^2,$$

que coinciden con los 4 vértices del mosaico $\mathfrak{M}_1$ de $\mathbb{T}^2$. El conjunto de valores de ramificación de $\wp(z; \Lambda)$ es el siguiente

$$R_{\wp(z; \Lambda)} = \left\{ \wp(0), e_1 = \wp\left(\frac{1}{2}\right), e_2 = \wp\left(\frac{\Lambda}{2}\right), e_3 = \wp\left(\frac{\Lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) \right\} \subset \widehat{\mathbb{C}},$$

cuyos puntos coinciden con los vértices del mosaico $\mathfrak{M}_\gamma = \tau \cup \tau'$ de la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$ por dos cuadrados. Desde luego, nosotros podemos escribir

$$\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3),$$

donde las raíces satisfacen las siguientes relaciones algebraicas

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = \frac{-g_2}{4}, \quad e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}.$$

Por lo tanto, el mosaico $\mathfrak{M}_1$ de $\mathbb{T}^2$ es la imagen inversa, bajo $\wp(z; \Lambda)$, del mosaico $\mathfrak{M}_\gamma = \tau \cup \tau'$ de $\widehat{\mathbb{C}}$. Este hecho se ejemplifica en la Figura 2.5. Resumiendo,

$$\begin{aligned} \wp : \mathbb{T}^2 &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ \mathfrak{M}_1 &\longmapsto \mathfrak{M}_\gamma. \end{aligned}$$

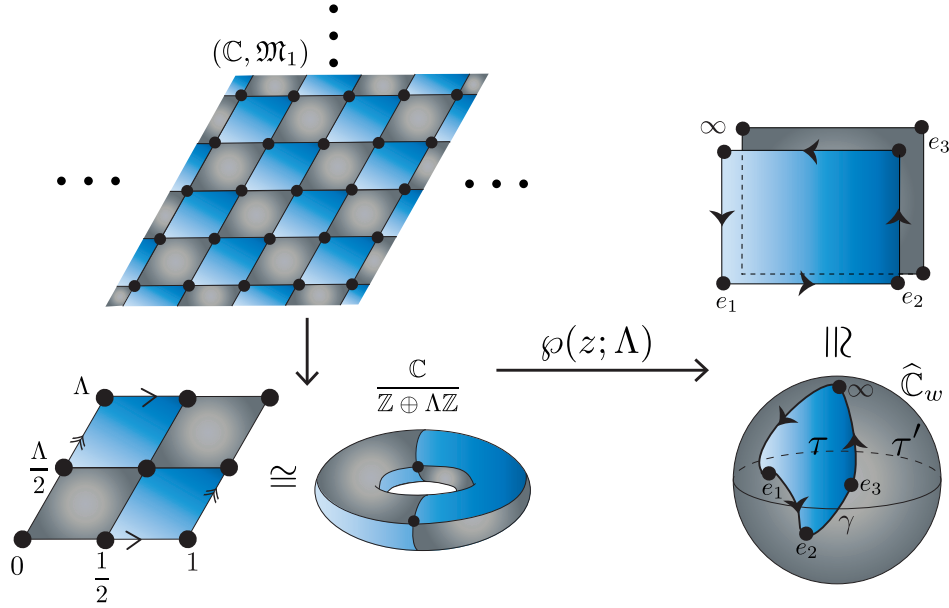


Figura 2.5: Función elíptica $\wp(z; \Lambda) : \mathbb{T}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

Consideremos ahora el plano complejo $\mathbb{C}$ provisto con el mosaico $\mathfrak{M}_2$ por triángulos equiláteros, tal como se muestra en la Figura 2.6. Ahora el dominio fundamental del toro $\mathbb{T}^2$ está compuesto por 6 triángulos equiláteros, tal como se señala en la Figura 2.6.

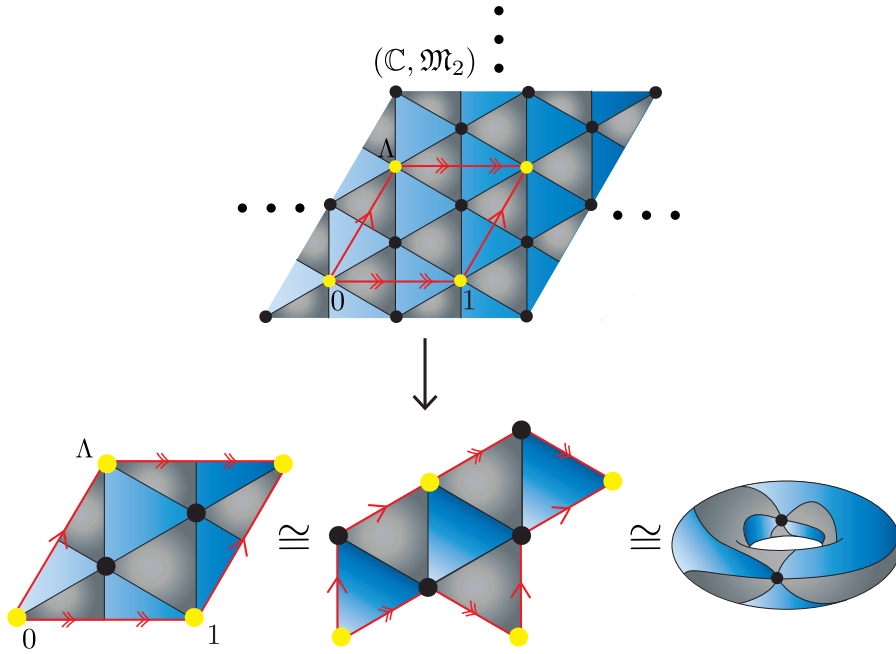


Figura 2.6: Mosaico $\mathfrak{M}_2$ del toro $\mathbb{T}^2$ por 6 triángulos equiláteros.

Nuestro objetivo ahora es mostrar que el mosaico $\mathfrak{M}_2$ de $\mathbb{T}^2$ es la imagen inversa, bajo $\wp'(z; \Lambda)$, del mosaico $\mathfrak{M}_{\mathbb{R} \cup \{\infty\}} = \mathbb{H}_+ \cup \mathbb{H}_-$ de $\widehat{\mathbb{C}}$ por dos triángulos.

La función $\wp'(z; \Lambda)$ en (2.6) tiene tres puntos críticos

$$C_{\wp'(z; \Lambda)} = \left\{ [0], \left[\frac{1+\Lambda}{3} \right], \left[-\frac{1+\Lambda}{3} \right] \right\} \subset \mathbb{T}^2,$$

que coinciden con los tres vértices del mosaico $\mathfrak{M}_2$ de $\mathbb{T}^2$. El conjunto de valores de ramificación de $\wp'(z; \Lambda)$ es el siguiente

$$R_{\wp'(z; \Lambda)} = \{ \wp'(0), \sqrt{-g_3}, -\sqrt{-g_3} \} \subset \widehat{\mathbb{C}},$$

cuyos puntos coinciden con los vértices del mosaico $\mathfrak{M}_{\mathbb{R} \cup \{\infty\}} = \mathbb{H}_+ \cup \mathbb{H}_-$ de la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$ por dos triángulos, tal como se esboza en la Figura 2.7. El vértice amarillo en $\mathfrak{M}_2$ es el polo de orden triple de $\wp'(z; \Lambda)$. Por lo tanto, el mosaico $\mathfrak{M}_2$ de $\mathbb{T}^2$ si determina la función $\wp'(z; \Lambda)$.

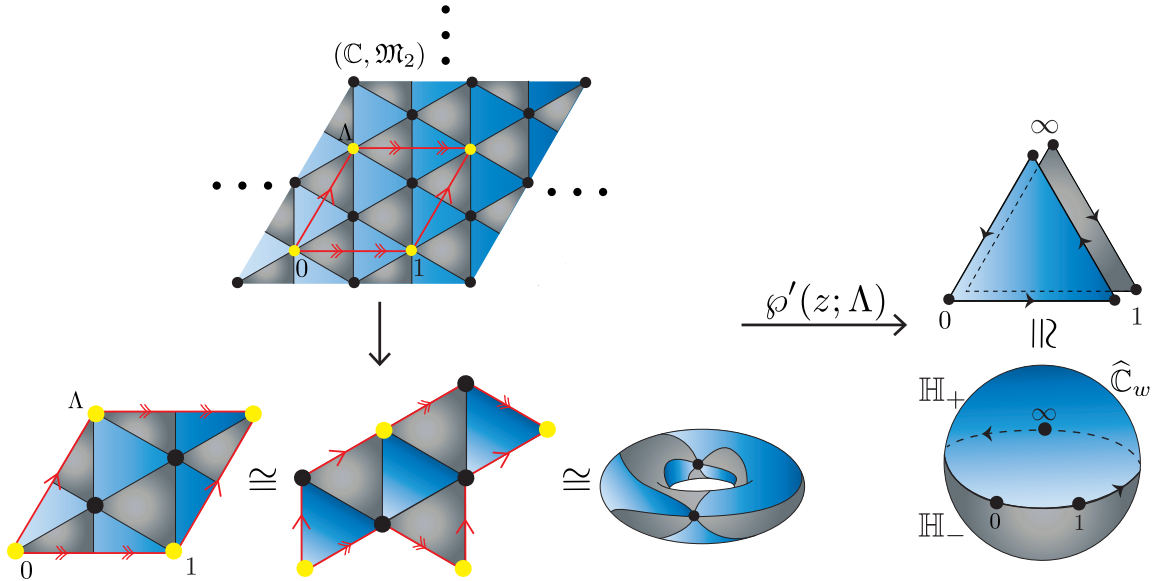


Figura 2.7: Función elíptica $\wp'(z; \Lambda) : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.

Por otra parte, si aplicamos el diagrama dado en (1.9) para la función $\wp$, obtenemos el diagrama siguiente.

$$\begin{array}{ccc} \wp = \Psi(z) & \longleftrightarrow & \wp'(z)dz \\ \uparrow & & \uparrow \\ \frac{1}{\wp'(z)} \frac{\partial}{\partial z} & \longleftrightarrow & [\wp'(z)]^2 dz \otimes dz. \end{array}$$

El diagrama anterior asocia de manera canónica una 1-forma meromorfa $\wp'(z)dz$ al toro $\mathbb{T}^2$ y un campo vectorial meromorfo $\frac{1}{\wp'(z)} \frac{\partial}{\partial z}$. Es más, del diagrama anterior se infiere lo siguiente.

$$\wp(z)^* \frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{1}{\wp'(z)} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Para mayor información sobre campos vectoriales el lector puede referirse a [3].

Ejemplo 2.1.5 (Mosaico por cuadrados topológicos). Consideremos la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}_z$ provisto con el mosaico señalado a la izquierda de la Figura 2.8. Este mosaico es realizable por el polinomio

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad f(z) = z^4 - \frac{4}{3}z^3(5+i) - 12z^2.$$

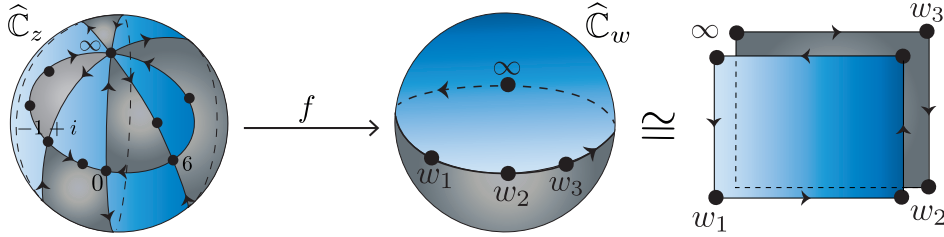


Figura 2.8: Mosaico por cuadrados topológicos realizable por el polinomio $f(z) = z^4 - \frac{4}{3}z^3(5+i) - 12z^2$.

Como era de esperarse, no todas las superficies provistas con un mosaico aleatorio determinan una función singular complejo analítica. A continuación presentamos una superficie con un mosaico que no satisface las condiciones del Teorema 2.1.1.

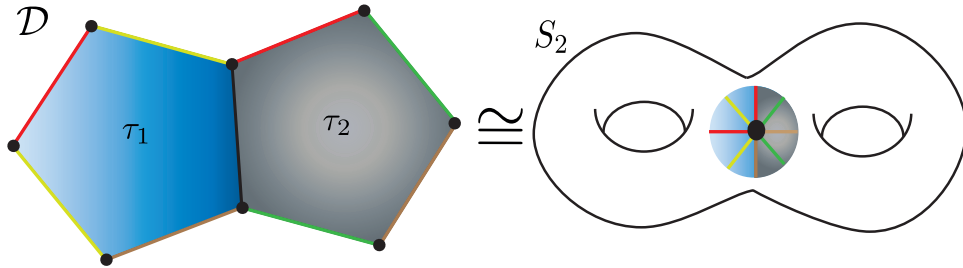


Figura 2.9: Superficie compacta S_2 de género 2 provista con un mosaico que no es a dos colores.

Ejemplo 2.1.6 (Negativo). Recordemos que la superficie compacta S_2 de género 2 puede obtenerse pegando un octágono $\mathcal{D} \subset \mathbb{H}_+$ por sus lados en pares, tal como se muestra a la izquierda de la Figura 2.9 (identificamos los lados de $\mathcal{D}$ con los mismos colores). Si dividimos el octágono $\mathcal{D}$ por un diámetro, obtenemos dos pentágonos

$$\mathcal{D} = \tau_1 \cup \tau_2 = S_2.$$

Esto provee un mosaico $\mathfrak{M} = \tau_1 \cup \tau_2$ de S_2 a dos colores, pero es posible que los colores no se alternan, tal como se evidencia a la derecha de la Figura 2.9. De todo esto se desprende que el mosaico $\mathfrak{M}$, construido de esta manera, no aplica al Teorema 2.1.1. Para mayores detalles es conveniente consultar [28].

Hasta donde tenemos entendido, todo el estudio de superficies dotadas con mosaicos cuyas caras admiten una coloración alterna, inició con H. A. Schwarz [38]. Su interés estaba en las superficies S_{top} provistas con mosaicos $\mathfrak{M}$, cuyas caras eran triángulos topológicos (coloreados de manera alterna, digamos azul-gris) y su herramienta de estudio eran las ecuaciones diferenciales lineales. Posteriormente, R. Nevanlinna estableció un cierto tipo de correspondencia entre funciones singulares complejo analíticas y superficies topológicas S_{top} provistas con mosaicos del estilo de $\mathfrak{M}$ (por triángulos). Un tratamiento minucioso de estos estudios se puede consultar en [38], [36], [35, Capítulo XI, §2].

Alrededor de los años 80, G. V. Belyĭ estableció un resultado análogo al Teorema 2.1.1, para $k = 3$. En este caso, establecer la existencia de g es mucho más sencillo debido a que todas las caras de los mosaicos son triángulos. Para un estudio pormenorizado de todo lo anterior podemos referirnos a [7], [24, Capítulo 2], [19, Capítulo 10, Sección 2].

Es importante mencionar que aunque todo funciona bastante bien en la esfera de Riemann, y en las funciones racionales, la generalidad del Teorema 2.1.1 nos permite trabajar con superficies de Riemann arbitrarias y mosaicos dados por colecciones infinitas de k -ágonos. Por tal motivo nace nuestro interés por funciones con singulares esenciales, es decir, con funciones singulares complejo analíticas (tal como se evidenció en los ejemplos anteriores).

Sintetizamos todo lo discutido en esta sección para el caso racional, generalizando el diagrama dado en (1.8). En efecto, con el Teorema 2.1.1 se logra construir un morfismo “ $\uparrow$ ” de mosaicos a funciones racionales. El morfismo $\uparrow$ está punteado dado que un mosaico $\mathfrak{M}$ no determina una única función racional (recordemos que la construcción depende fuertemente de la elección de γ).

Lema 2.1.3. *Un mosaico $\mathfrak{M}$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$ por k -ágonos topológicos, para una misma k , admitiendo una coloración alterna en sus caras, determina una función racional $g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ y una curva de Jordan orientada γ .*

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Función racional } g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w & & \\
 \text{y curva de Jordan orientada } \gamma \text{ adecuada} & & \\
 \uparrow \text{---} \downarrow & & \\
 \text{Gráfica de Speiser } S_g \xrightleftharpoons{\text{por } k\text{-ágonos, para una única } k} \text{Mosaico } \mathfrak{M} \text{ de } \widehat{\mathbb{C}}_z \xrightleftharpoons{\text{orientada y conexa } g^{-1}(\gamma)} \text{Gráfica plana,} & &
 \end{array} \tag{2.9}$$

□

Capítulo 3

Caracterización del espacio de polinomios genéricos

Todos los mosaicos contruidos en el Capítulo 1, a través del algoritmo de Klein y los permitidos por el Teorema 2.1.1, en el Capítulo 2, están dados por k -ágonos topológicos, para un mismo valor de k . El objetivo de este Capítulo es considerar mosaicos que no cumplan con esta condición y determinar qué tipo de propiedades deben satisfacer para garantizar la existencia de una función racional o polinomial que los realice. Para distinguir los mosaicos que cumplan o no la condición antes mencionada, establecemos lo siguiente.

Definición 3.0.1. Un mosaico $\mathfrak{M}$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$ es *homogéneo* si todas sus caras son k -ágonos topológicos, para una misma k , y *no homogéneo* en caso contrario.

El problema puntual que queremos abordar en este Capítulo es el siguiente.

Problema 2. *Caracterizar cuándo un mosaico $\mathfrak{M}$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$ no homogéneo, con sus caras coloreadas de manera alterna azul-gris, proviene de una función racional $g : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ y una curva de Jordan orientada adecuada γ , es decir, cuando $\mathfrak{M}_{g^{-1}(\gamma)} = \mathfrak{M}$.*

3.1. Una correspondencia entre mosaicos, gráficas planas y polinomios genéricos.

Una respuesta parcial al Problema 2, en un subcaso no homogéneo, se la debemos a W. P. Thurston [22]. Hasta donde tenemos entendido, en otoño de 2010, Thurston condujo un grupo de discusión en lo que él llamó: *la forma de las funciones racionales*. Este grupo encontró condiciones específicas bajo las cuales una *gráfica plana balanceada* en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ viene de una función racional genérica. Precisemos cuáles son estas funciones.

Definición 3.1.1. Una función racional $g : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 2$, es *genérica* si tiene $2n - 2$ valores de ramificación distintos.

En 2015, S. Koch y T. Lei [22] reportaron el trabajo hecho con Thurston, donde el resultado principal fue el siguiente.

Teorema 3.1.1 (W. Thurston, S. Koch, T. Lei, 2010). *Una gráfica plana, orientada y conexa Γ con $2n - 2$ vértices de valencia 4 es igual a $g^{-1}(\gamma)$ (omitiendo los vértices de valencia 2) para alguna función racional genérica $g : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 2$, y una curva de Jordan orientada $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ que pasa por los valores de ramificación de g , sí y sólo si*

- a) cada cara de $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$ es un dominio de Jordan;
- b) (balance global) para una coloración alterna azul-gris de las caras de $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$, hay n caras grises, n caras azules;
- c) (balance local) si un ciclo orientado Γ_0 en Γ , que al recorrerlo con la orientación heredada de Γ , contiene caras azules a su izquierda, entonces el ciclo orientado Γ_0 deja exactamente más caras azules que grises a su izquierda.

Una gráfica plana, orientada y conexa Γ que satisface las condiciones del teorema anterior es llamada *balanceada*. La Figura 3.1 exhibe un ejemplo de gráfica plana balanceada y un ciclo orientado Γ_0 (en color rojo), que satisface la condición de balance local.

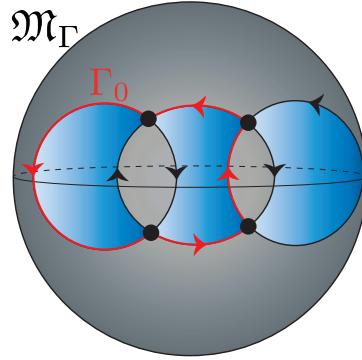


Figura 3.1: Ciclo orientado Γ_0 cumpliendo la condición de balance local.

Algunos otros resultados interesantes y ejemplos son ilustrados por S. Koch y T. Lei en [22]. Por otra parte, J. Tomasini también enriqueció estos resultados en [41].

Observación 3.1.1. Es importante resaltar que los mosaicos $\mathfrak{M}_\Gamma$, asociados a las gráficas planas balanceadas Γ , son no homogéneos. Esta situación genera una dificultad topológica a la hora de garantizar la existencia de la función racional. Thurston y compañía, a través de la prueba del Teorema 3.1.1, cuyo argumento usa fuertemente el teorema del matrimonio, garantizan que existe una manera de homogeneizar el mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$.

A partir del trabajo realizado por W. Thurston y sus colegas, los resultados del Teorema 3.1.1 establecen las siguientes equivalencias.

Lema 3.1.1. *Un mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$ determinado por una gráfica plana balanceada establece la existencia de una función racional genérica $g : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ y una curva de Jordan orientada γ*

adecuada.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Función racional genérica } g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \\
 \text{y curva de Jordan orientada } \gamma \text{ adecuada} \\
 \updownarrow \\
 \text{Gráfica de Speiser } \mathcal{S}_g & \xleftrightarrow{\quad} & \text{Mosaico no homogéneo } \mathfrak{M}_\Gamma \text{ de } \widehat{\mathbb{C}}_z, \\
 & & \text{con vértices de valencia 4} \\
 & \xleftrightarrow{\quad} & \text{Gráfica plana } \Gamma \\
 & & \text{como en Teorema 3.1.1.}
 \end{array} \tag{3.1}$$

□

El morfismo “ $\uparrow$ ” está punteado dado que un mosaico no homogéneo $\mathfrak{M}_\Gamma$ no determina una única función racional genérica.

Los polinomios $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 3$, siempre tienen un punto crítico de ramificación maximal $(n-1)$ en ∞ . Este hecho implica que ningún polinomio es una función racional genérica. En efecto, recordemos que todos los puntos críticos de una función racional genérica tienen ramificación 1. Teniendo presente lo antes mencionado, la parte medular de esta tesis es dar respuesta al Problema 2, en una familia de polinomios, llamados *genéricos*; especifiquemos cuáles son estos polinomios.

Definición 3.1.2. Un polinomio $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 2$, es *genérico* si tiene n valores de ramificación distintos, incluyendo a ∞ .

Dada la equivalencia entre mosaicos y gráficas, expuesta en el Cuadro 1, enunciamos el Problema 2 en la siguiente versión.

Problema 4. *Caracterizar topológicamente cuándo una gráfica plana $\Gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_z$ está determinada por un polinomio genérico $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ de grado $n \geq 2$, y una curva de Jordan orientada γ adecuada.*

Consideremos un polinomio genérico $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 3$. A partir de la gráfica $f^{-1}(\gamma)$, olvidando los vértices de valencia 2, obtenemos una gráfica plana Γ que tiene $(n-1)$ vértices de valencia 4 (puntos críticos de f) y un vértice de valencia $2n$ en ∞ . El resultado fundamental es la implicación inversa, cualquier gráfica plana del tipo Γ puede ser realizada, topológicamente, como una gráfica $f^{-1}(\gamma)$, para algún polinomio genérico f y una curva de Jordan orientada γ adecuada. La dificultad inicial, al igual que en el caso estudiado por Thurston, radica en la no homogeneidad del mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$. Una dificultad adicional, en nuestro caso, se gesta en tener mosaicos con vértices de distintas valencias. Estas dificultades están ilustradas más adelante, en el Ejemplo 3.1.1.

El teorema de caracterización que obtenemos para los polinomios genéricos se enuncia abajo. A diferencia de la prueba dada por Thurston, nuestra prueba da un algoritmo para homogeneizar el mosaico y así garantizar la existencia del polinomio genérico.

Teorema 3.1.2 (L. González Cely [15]). *Una gráfica plana, orientada y conexa Γ con $n - 1$ vértices de valencia 4 y un vértice de valencia $2n$ en ∞ es igual a $f^{-1}(\gamma)$ (omitendo los vértices de valencia 2) para algún polinomio genérico $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 2$, y una curva de Jordan orientada $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ que pasan por los valores de ramificación de f sí y sólo si*

- a) *la frontera de cada componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$ es una curva de Jordan orientada;*
- b) *para una coloración alterna azul-gris de las caras de $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$, hay n caras grises, n caras azules.*

Nuestro resultado en el Teorema 3.1.2 es de naturaleza topológica, en el siguiente sentido. Dado un polinomio genérico f y una curva de Jordan γ pasando por los valores de ramificación de f , la gráfica Γ está totalmente determinada, esto se desprende del Algoritmo 1.1.1. Por el contrario, dada una gráfica Γ como la requerida, solo la existencia de un polinomio genérico f y una curva de Jordan orientada adecuada γ es garantizada. Si permitimos perturbaciones continuas, suficientemente pequeñas, de un polinomio genérico f_0 y su correspondiente γ_0 , entonces el conjunto $\{(f_\epsilon, \gamma_\epsilon)\}$ determina topológicamente la misma Γ . Ver la afirmación del párrafo final del Ejemplo 3.1.1.

Usando las equivalencias del Diagrama (3.1), el teorema anterior tiene su versión en términos de mosaicos.

Corolario 3.1.1. *Una mosaico orientado $\mathfrak{M}_\Gamma$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$ con $n - 1$ vértices de valencia 4 y un vértice de valencia $2n$ en ∞ es igual a $\mathfrak{M}_{f^{-1}(\gamma)}$ (omitendo los vértices de valencia 2) para algún polinomio genérico $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 2$, y una curva de Jordan orientada $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ que pasan por los valores de ramificación de f sí y sólo si*

- a) *la frontera de cada cara de $\mathfrak{M}_\Gamma$ es una curva de Jordan orientada;*
- b) *para una coloración alterna azul-gris de las caras de $\mathfrak{M}_\Gamma$, hay n caras grises, n caras azules.*

3.1.1. Esquema general de la caracterización de gráficas realizables por polinomios genéricos.

El caso de grado $n = 2$ es trivial, debido a un resultado de A. Cayley, cualquier polinomio de grado 2 es esencialmente $\{z \mapsto z^2\}$.

A lo largo de la prueba, asumimos grado $n \geq 3$.

Prueba de la implicación “ $\rightarrow$ ” en el Teorema 3.1.2.

Consideremos un polinomio genérico $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ de grado $n \geq 3$ y una curva de Jordan orientada $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ que pasa por los valores de ramificación $R_f = \{\infty, w_1, \dots, w_j, \dots, w_{n-1}\}$. Al aplicar el Algoritmo 1.1.1 obtenemos la gráfica orientada $f^{-1}(\gamma) \subset \widehat{\mathbb{C}}_z$ tal que $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus f^{-1}(\gamma)$ tiene n caras azules y n caras grises cuyas fronteras están orientadas. Para cada $j = 1, \dots, n - 1$, $f^{-1}(w_j)$ contiene puntos $\{\zeta_j\}$ donde f es un biholomorfismo local; estos corresponden a vértices de valencia 2 en $f^{-1}(\gamma)$. Por ejemplo, ver los vértices ζ_1, ζ_2 en la Figura 1.1(a). Si no consideramos estos vértices en $f^{-1}(\gamma)$, entonces obtenemos una gráfica plana, orientada, conexa y etiquetada Γ con $n - 1$ vértices de valencia 4 con etiquetas $1, 2, \dots, n - 1$, que coinciden con los puntos críticos de f , y un vértice de valencia $2n$ en ∞ con etiqueta 0 (esto se debe a que f es genérico).

Los siguientes dos hechos implican que la frontera de cada componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$ es una curva de Jordan orientada.

- i) La imagen de la frontera orientada de cada componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$, bajo f , es la curva de Jordan orientada γ .
- ii) Al recorrer la frontera de cada componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$, partiendo de ∞ y siguiendo la orientación determinada por el Algoritmo 1.1.1, pasamos exactamente una vez por los vértices de valencia 4 en dicha frontera. $\square$

Una descripción de las gráficas Γ en el Teorema 3.1.2.

Consideremos una gráfica plana, orientada y conexa $\Gamma = \{V; A\}$, con n vértices

$$V = \left\{ \underbrace{\infty}_{\substack{\text{vértice de} \\ \text{valencia } 2n}}, \underbrace{z_1, \dots, z_j, \dots, z_{n-1}}_{\substack{\text{vértices de valencia } 4}} \right\}, \quad (3.2)$$

$3n - 2$ aristas

$$A = \{\overline{z_j z_\nu}\} \quad \text{donde } j, \nu \in \{0, \dots, n-1\}, \quad (3.3)$$

y $2n$ caras (k -ágonos topológicos, para distintos valores de k)

$$\mathfrak{M}_\Gamma = \underbrace{\tau_1 \cup \dots \cup \tau_t \cup \dots \cup \tau_n}_{\text{caras azules}} \cup \underbrace{\tau'_1 \cup \dots \cup \tau'_t \cup \dots \cup \tau'_n}_{\text{caras grises}} = \widehat{\mathbb{C}}_z, \quad (3.4)$$

determinado un mosaico.

Dado que todos los vértices de la gráfica Γ son pares, entonces el mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$ admite una coloración alterna azul-gris en sus caras. La orientación de Γ satisface la siguiente regla: la frontera de cada cara azul τ_t está orientada en sentido antihorario; la frontera de cada cara gris τ'_t en sentido horario.

Observemos que si Γ no fuera orientada, a priori existirían dos posibles orientaciones. Por ejemplo, las gráficas Γ y Γ' en la Figura 3.3, están determinadas por dos orientaciones distintas en la misma gráfica Γ_0 .

La orientación de Γ determina un orden en sus vértices, recorriendo la frontera de cada cara de $\mathfrak{M}_\Gamma$. Este orden, definido a continuación, es un componente importante para nuestro estudio.

Definición 3.1.3. Consideremos una cara τ_t de $\mathfrak{M}_\Gamma$, y dos vértices z_j, z_ν en $\partial\tau_t$. El *orden topológico* $\prec$ es como sigue: si recorremos $\partial\tau_t$ (usando la orientación de Γ) partiendo de ∞ y encontramos primero a z_j , entonces $z_j \prec z_\nu$.

A continuación enfatizamos algunas propiedades importantes de Γ .

Lema 3.1.2. *Consideremos una gráfica plana, orientada y conexa $\Gamma = \{V; A\}$ como antes.*

1. Todas las caras del mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$ intersectan a ∞ .
2. Si seleccionamos dos caras azules (resp. grises) τ_t y τ_q de $\mathfrak{M}_\Gamma$, entonces

$$\partial\tau_t \cap \partial\tau_q = \begin{cases} \infty \in V, \\ \infty, z_j \in V. \end{cases}$$

Demostración. Para la Afirmación 1, procedemos por contradicción. Supongamos que existe una gráfica plana Υ , como antes, tal que una cara azul τ_1 de $\mathfrak{M}_\Upsilon$ no intersecta a ∞ ; para visualizar lo anterior tomemos como ejemplo la cara τ_1 en la Figura 3.2.

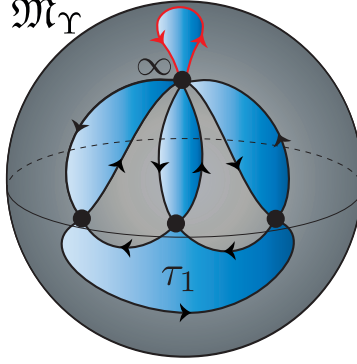


Figura 3.2: Mosaico de $\widehat{\mathbb{C}}_z$ con un lazo anclado en ∞ .

Paso 1. Nos gustaría mostrar que Υ admite al menos un lazo anclado en ∞ . Para advertir esto, construimos la sub-gráfica Λ , removiendo de Υ el vértice ∞ y todas las aristas incidentes a ∞ . Denotamos el conjunto de aristas de Λ por A_Λ ; es fácil observar que $\partial\tau_1 \subseteq A_\Lambda$. La Figura 1.7(c) evidencia un ejemplo donde la igualdad se alcanza.

Seleccionamos un sub-árbol $\mathcal{T} = \{V_{\mathcal{T}}; A_{\mathcal{T}}\}$ en Λ , con vértices $V_{\mathcal{T}} = V \setminus \{\infty\}$ y cualquier conjunto de aristas $A_{\mathcal{T}} \subsetneq A_\Lambda$. Cabe mencionar que $\mathcal{T}$ no es necesariamente único y $A_\Lambda \setminus A_{\mathcal{T}}$ es un conjunto no vacío.

Para abreviar y facilitar la escritura establecemos los siguientes convenios de notación.

- $\mathcal{J}$ es el número de aristas en Υ de tipo $\overline{\infty z_j}$, donde $z_j \in V_{\mathcal{T}}$.
- $|A_\Lambda|$ es el número de aristas en A_Λ .
- $|A_\Lambda \setminus A_{\mathcal{T}}|$ es el número de aristas en $A_\Lambda \setminus A_{\mathcal{T}}$.
- $|A_{\mathcal{T}}| := n - 2$ es el número de aristas en $A_{\mathcal{T}}$.

Por lo tanto, usando el hecho de que cada vértice finito z_j en Υ tiene valencia 4, es sencillo ver

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= 4(n-1) - 2|A_\Lambda| \\ &= 4(n-1) - 2(|A_{\mathcal{T}}| + |A_\Lambda \setminus A_{\mathcal{T}}|) \\ &= 2n - 2|A_\Lambda \setminus A_{\mathcal{T}}|. \end{aligned}$$

Dado que la valencia del vértice ∞ es $2n$, entonces existen $|A_\Lambda \setminus A_{\mathcal{T}}|$ lazos en Υ anclados en ∞ .

Paso 2. Cada lazo hipotético $\Theta = \partial\tau'_\lambda \cap \partial\tau_t$ está contenido en la frontera de dos caras de $\mathfrak{M}_\Upsilon$: una cara gris τ'_λ a su derecha y una cara azul τ_t a su izquierda. Podemos considerar como un ejemplo el lazo rojo Θ en la Figura 3.2. Dado que $n \geq 3$, al menos una de estas dos fronteras, sin pérdida de generalidad digamos $\partial\tau'_\lambda$, tiene dos o más aristas y $\Theta \subset \partial\tau'_\lambda$. Todo esto nos permite concluir que $\partial\tau'_\lambda$ no es una curva de Jordan, lo que nos lleva de forma inmediata a una contradicción dado que Υ pertenece a las descritas en el Teorema 3.1.2.

La Afirmación 2 es abordada por contradicción. Supongamos que existen dos caras azules τ_t

y τ_q tal que $\partial\tau_t \cap \partial\tau_q = \{\infty, z_j, z_\nu\}$. Esto implica la existencia de una cara gris τ'_λ de $\mathfrak{M}_\Gamma$ tal que $z_j, z_\nu \in \partial\tau'_\lambda$ y la frontera $\partial\tau'_\lambda$ no interseca a ∞ . Esto contradice la Afirmación 1. $\square$

Obstrucción topológica para garantizar la existencia del polinomio genérico f .

Seleccionemos la curva de Jordan orientada $\gamma = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ tal que el semiplano superior $\mathbb{H}_+$ está a su izquierda. Reconocemos a $\overline{\mathbb{H}}_+$ y $\overline{\mathbb{H}}_-$ como dos n -ágonos topológicos con vértices $\{\infty, w_1, \dots, w_j, \dots, w_{n-1}\} \subset \gamma$, donde $w_1 < \dots < w_{n-1}$. Las posiciones particulares de w_j en $\mathbb{R}$ no son significantes. Reconocemos el mosaico

$$\mathfrak{M}_\gamma = \overline{\mathbb{H}}_+ \cup \overline{\mathbb{H}}_- = \widehat{\mathbb{C}}_w. \quad (3.5)$$

Dado Γ , con el fin de construir un polinomio genérico f , enviaremos continuamente las caras azules τ_t de $\mathfrak{M}_\Gamma$ sobre $\overline{\mathbb{H}}_+$ y las caras grises τ'_t sobre $\overline{\mathbb{H}}_-$, obteniendo un *cubriente topológico ramificado*

$$f_{top} : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad (3.6)$$

siguiendo la idea de la demostración del Teorema 2.1.1. El cubriente esperado f_{top} debe enviar los vértices de Γ sobre los vértices de γ . Denotemos los valores de f_{top} , restringidos a los vértices en una frontera $\partial\tau_t \subset \Gamma$, por f_t^0 . Al examinar detenidamente los valores de f_t^0 se genera la siguiente pregunta.

¿Cómo debemos definir f_t^0 en los vértices de $\partial\tau_t$?

Cada frontera $\partial\tau_t$ contiene naturalmente $d(t) = d$ vértices finitos de Γ , para $1 \leq d \leq n-1$. Si $d < n-1$, entonces la cara τ_t no es un n -ágono topológico.

Requerimos una notación precisa para los subíndices de los vértices finitos en $\partial\tau_t$. Consideremos una función inyectiva $\alpha : \{1, \dots, d\} \longrightarrow \{1, \dots, n-1\}$ tal que $\{\infty, z_{\alpha(1)}, \dots, z_{\alpha(l)}, \dots, z_{\alpha(d)}\}$ son los vértices en $\partial\tau_t$, siguiendo la orientación de Γ . La pregunta es

$$\begin{array}{ccc} f_t^0 : \{\infty, z_{\alpha(1)}, \dots, z_{\alpha(l)}, \dots, z_{\alpha(d)}\} & \longrightarrow & \{\infty, w_1, \dots, w_j, \dots, w_{n-1}\} \\ \infty & \longmapsto & \infty \\ z_{\alpha(l)} & \longmapsto & ? \end{array} \quad (3.7)$$

A priori, no cualquier elección para $f_t^0(z_{\alpha(l)})$ es permitida. Antes de exponer las condiciones necesarias para la buena definición de f_t^0 , tengamos en mente los siguientes hechos.

1. La orientación de Γ determina un orden topológico $\prec$ en $\{z_{\alpha(1)}, \dots, z_{\alpha(d)}\}$; ver Definición 3.1.3.
2. Los vértices $\{\infty, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ de γ tienen el orden natural $<$ en $\mathbb{R}$.

Por lo tanto, una buena definición de f_t^0 en (3.7) debe preservar los ordenes anteriores, *i.e.*

$$\text{si } z_{\alpha(l)} \prec z_{\alpha(\nu)} \text{ entonces } f_t^0(z_{\alpha(l)}) < f_t^0(z_{\alpha(\nu)}), \text{ donde } f_t^0(z_{\alpha(l)}), f_t^0(z_{\alpha(\nu)}) \in \{w_1, \dots, w_{n-1}\}. \quad (3.8)$$

Obtener la condición de la Ecuación (3.8) es la obstrucción topológica para garantizar la existencia de un polinomio genérico f .

Un detalle que merece destacarse es que dicha obstrucción se debe a la no homogeneidad del mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$. En el Ejemplo 3.1.1, mostramos definiciones buenas y malas para algún f_t^0 . Esto muestra la no trivialidad de la construcción de (3.7).

Para fijar las ideas diremos que, una buena definición para $f_{\mathbf{t}}^0$ es lograda por un *etiquetado realizable* $\mathcal{L}$ para Γ (ver Definición 3.2.10), donde

$$\mathcal{L} : z_{\alpha(l)} \mapsto (z_{\alpha(l)}, \mathcal{L}(\alpha(l))). \quad (3.9)$$

El lado derecho da una notación explícita para los pares vértice-etiqueta. Un etiquetado realizable $\mathcal{L}$ en Γ determina la posición de los *vértices ocultos* $\{\zeta\}$ (definidos abajo) que deben añadirse a Γ para homogeneizar el mosaico $\mathfrak{M}_{\Gamma}$.

Definición 3.1.4. Los *vértices ocultos* $\{\zeta\}$ de Γ son vértices de valencia 2 añadidos a Γ tal que todas las caras de $\mathfrak{M}_{\Gamma \cup \{\zeta\}}$ son n -ágonos topológicos.

Un etiquetado realizable $\mathcal{L}$ para Γ nos permite dar una respuesta a la pregunta expuesta en la Ecuación (3.7), como sigue

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{t}}^0 : \{\infty, z_{\alpha(1)}, \dots, z_{\alpha(d)}, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1-d}\} &\longrightarrow \{\infty, w_1, \dots, w_{n-1}\} \\ z_{\alpha(l)} &\longmapsto w_{\mathcal{L}(\alpha(l))}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

para todo $\mathbf{t}$. El etiquetado realizable garantiza que el orden topológico $\prec$ en el dominio de $f_{\mathbf{t}}^0$ en (3.10) coincide con el orden $<$ en $\{w_j\}$, como es requerido en (3.8); ver el Ejemplo 3.1.1. La adición de los vértices ocultos a Γ resuelve la obstrucción topológica, ya que al homogeneizar el mosaico $\mathfrak{M}_{\Gamma}$ nos encontramos en las condiciones del Teorema 2.1.1.

Ejemplo 3.1.1. *Etiquetados realizables no triviales.* Consideremos una gráfica plana no orientada $\Gamma_0 \subset \widehat{\mathbb{C}}_z$ con vértices

$$V = \{\infty, z_1 = -1 + i, z_2 = 0, z_3 = 6\},$$

como en la Figura 3.3. Es fácil ver que Γ_0 tiene dos posibles orientaciones; denotemos por Γ y Γ' la gráfica inicial Γ_0 dotada con cada una de sus orientaciones.

Trabajaremos en un inicio con la gráfica Γ . Hay que hacer notar que en este caso,

$$\mathfrak{M}_{\Gamma} = \underbrace{\tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3 \cup \tau_4}_{\text{caras azules}} \cup \underbrace{\tau'_1 \cup \tau'_2 \cup \tau'_3 \cup \tau'_4}_{\text{caras grises}} = \widehat{\mathbb{C}}_z.$$

Por otro lado, la curva de Jordan orientada $\gamma = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$, reconocida como un cuadrado topológico con vértices $\{\infty, w_1, w_2, w_3\} \subset \gamma$, determina el mosaico

$$\mathfrak{M}_{\gamma} = \overline{\mathbb{H}}_+ \cup \overline{\mathbb{H}}_- = \widehat{\mathbb{C}}_w.$$

La orientación de Γ determina que las caras azules (resp. grises) de $\mathfrak{M}_{\Gamma}$ son enviadas continuamente sobre $\overline{\mathbb{H}}_+$ (resp. $\overline{\mathbb{H}}_-$). Fijando la etiqueta $0 \in \mathbb{Z}_4$ para el vértice $\infty \in \Gamma$, los seis etiquetados posibles

$$\mathcal{L} : z_j \mapsto (z_j, \mathcal{L}(j)),$$

son

	$(z_1 = -1 + i, \mathcal{L}(1))$	$(z_2 = 0, \mathcal{L}(2))$	$(z_3 = 6, \mathcal{L}(3))$
1	$(-1 + i, 1)$	$(0, 2)$	$(6, 3)$
2	$(-1 + i, 1)$	$(0, 3)$	$(6, 2)$
3	$(-1 + i, 2)$	$(0, 1)$	$(6, 3)$
4	$(-1 + i, 2)$	$(0, 3)$	$(6, 1)$
5	$(-1 + i, 3)$	$(0, 1)$	$(6, 2)$
6	$(-1 + i, 3)$	$(0, 2)$	$(6, 1)$

El pregunta que nos gustaría contestar es ¿cuáles de estos etiquetados son realizables para Γ ? Analicemos el primer etiquetado y centremos nuestra atención en la cara τ_1 de $\mathfrak{M}_\Gamma$, ilustrada al lado izquierdo en la Figura 3.3.

Según el orden $\prec$ en $\partial\tau_1$, $z_3 = 6 \prec z_2 = 0$,
según el orden $<$ en $\mathbb{R} \subset \gamma$, $\mathcal{L}(3) = 3 > \mathcal{L}(2) = 2$.

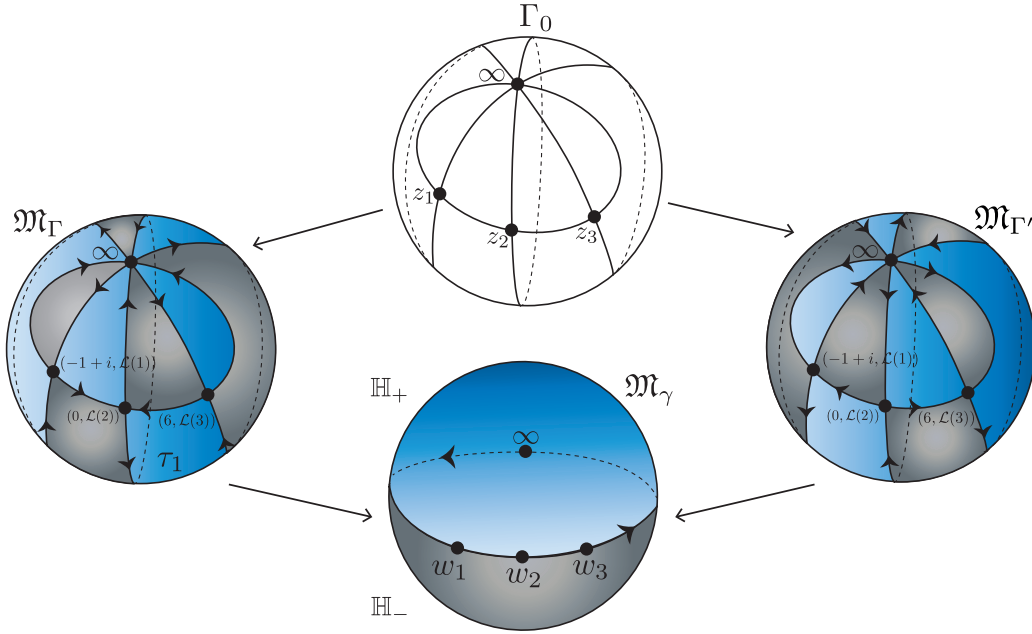


Figura 3.3: Etiquetados para las gráficas planas y orientadas Γ y Γ' .

Por lo tanto, los ordenes no coinciden en $\partial\tau_1$. Esto implica que no podemos enviar continuamente la cara τ_1 sobre $\mathbb{H}_+$, de tal forma que la condición de la Ecuación (3.8) Resulta sencillo verificar que solo los etiquetados 2 y 4 son *realizables*.

Un etiquetado realizable en la gráfica Γ , nos permite añadir los vértices ocultos $\{\zeta \in \partial\tau_1\}$ (junto con sus etiquetas), con el fin de homogeneizar el mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$, preservando los ordenes expuestos en la Ecuación (3.8). Por ejemplo, si consideramos a Γ con el etiquetado realizable 4, la función (3.10) en $\partial\tau_1$ es

$$f_1^0 : \{\infty, z_3 = 6, \zeta, z_2 = 0, \} \subset \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \{\infty, w_1, w_2, w_3\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$$

$$f_1^0(\infty) = \infty, f_1^0(6) = w_1, f_1^0(\zeta) = w_2, f_1^0(0) = w_3.$$

Bajo estas condiciones no tendremos dificultad en reconocer que $\zeta \in \partial\tau_1$ es un vértice oculto de Γ . Igualmente, podemos añadir los vértices ocultos en las caras restantes, con sus respectivas etiquetas, obteniendo un nuevo mosaico homogéneo $\mathfrak{M}_{\Gamma \cup \{\zeta\}}$.

Un análisis similar para Γ' concluye que sus etiquetados *realizables* son

$$\begin{array}{llll} 1 & (-1+i, 2) & (0, 1) & (6, 3) \\ 2 & (-1+i, 3) & (0, 1) & (6, 2). \end{array}$$

Como primera medida enfatizamos que cada etiquetado realizable para Γ determina un polinomio genérico.

Por otro lado, un trabajo cuidadoso con cada parte de la construcción nos permite reconocer lo siguiente, si $f(z)$ es un polinomio determinado por Γ , entonces el conjugado $\overline{f(z)}$ es determinado por Γ' .

3.2. Construcción de un polinomio genérico f a partir de una gráfica plana Γ .

En un esquema general, la prueba de que un polinomio genérico f puede construirse a partir de un gráfica Γ adecuada, está basada en los siguientes hechos.

Idea principal. Construir un cierto cubriente topológico ramificado $f_{top} : \mathfrak{M}_\Gamma \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, donde $\widehat{\mathbb{C}}_w$ es identificada como el pegado de dos n -ágonos topológicos τ y τ' con vértices $\{\infty, w_1, \dots, w_{n-1}\}$. La idea es enviar, de manera adecuada, las caras azules (resp. grises) de $\mathfrak{M}_\Gamma$, bajo f_{top} , a τ (resp. τ'). El cubriente f_{top} tiene puntos de ramificación 1 en los vértices finitos de Γ y un punto de ramificación de orden n en ∞ .

Dificultad principal. Las caras de $\mathfrak{M}_\Gamma$ son k -ágonos, para distintos valores de $k \leq n$.

Estrategia. Nuestro objetivo es transformar todas las caras de $\mathfrak{M}_\Gamma$ en n -ágonos. Para nuestro propósito es suficiente encontrar un *etiquetado realizable* $\mathcal{L}$ para los vértices de Γ , definiendo una asignación global de los valores de ramificación $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ a los vértices finitos de Γ (∞ va a ∞). El etiquetado $\mathcal{L}$ determina cómo se pueden insertar los *vértices ocultos* (puntos no críticos en cada frontera $\partial\tau_t$) para que todas las caras τ_t de $\mathfrak{M}_\Gamma$ sean n -ágonos. De esta manera podemos definir f_{top} en los n vértices (incluyendo los vértices ocultos) de cada $\partial\tau_t$. Acto seguido, podemos definir consistentemente f_{top} en las fronteras $\partial\tau_t$ y luego extender f_{top} al interior de cada τ_t . Para encontrar un etiquetado realizable para Γ , construimos un *árbol de prueba* T asociado a Γ y traducimos el problema inicial a etiquetar las aristas de T . Esto es una ventaja debido a que los árboles tienen una estructura más simple y es más fácil contruir un algoritmo de etiquetado.

3.2.1. La noción de árbol de prueba.

Consideremos una gráfica plana, orientada y conexa $\Gamma = \{V; A\}$ como en el Teorema 3.1.2. Recordemos que por las Ecuaciones (3.2)–(3.4), la gráfica Γ tiene:

n vértices

$$V = \left\{ \underbrace{\infty}_{\substack{\text{vértice de} \\ \text{valencia } 2n}}, \underbrace{z_1, \dots, z_j, \dots, z_{n-1}}_{\substack{\text{vértices de valencia } 4}} \right\},$$

$3n - 2$ aristas

$$A = \{\overline{z_j z_\nu}\} \quad \text{donde } j, \nu \in \{0, \dots, n-1\},$$

y $2n$ caras (k -ágonos topológicos, para distintos valores de k)

$$\mathfrak{M}_\Gamma = \underbrace{\tau_1 \cup \dots \cup \tau_t \cup \dots \cup \tau_n}_{\text{caras azules}} \cup \underbrace{\tau'_1 \cup \dots \cup \tau'_t \cup \dots \cup \tau'_n}_{\text{caras grises}} = \widehat{\mathbb{C}}_z.$$

Un objeto auxiliar, que nos permitirá construir un etiquetado realizable para Γ es el siguiente.

Definición 3.2.1. Un árbol de prueba $T = \{V_T; A_T\}$ asociado a Γ tiene:

n vértices

$$V_T = \{v_1, \dots, v_{\mathfrak{t}}, \dots, v_n\} \subset \mathbb{C}_z,$$

tal que cada $v_{\mathfrak{t}}$ pertenece al interior de la cara azul $\tau_{\mathfrak{t}}$ de $\mathfrak{M}_{\Gamma}$ y

$n - 1$ aristas

$$A_T = \{\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\lambda}}\} \subset \mathbb{C}_z,$$

tal que cada $\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\lambda}}$ pasa por el vértice finito $z_j \in \partial\tau_{\mathfrak{t}} \cap \tau_{\lambda}$ de Γ .

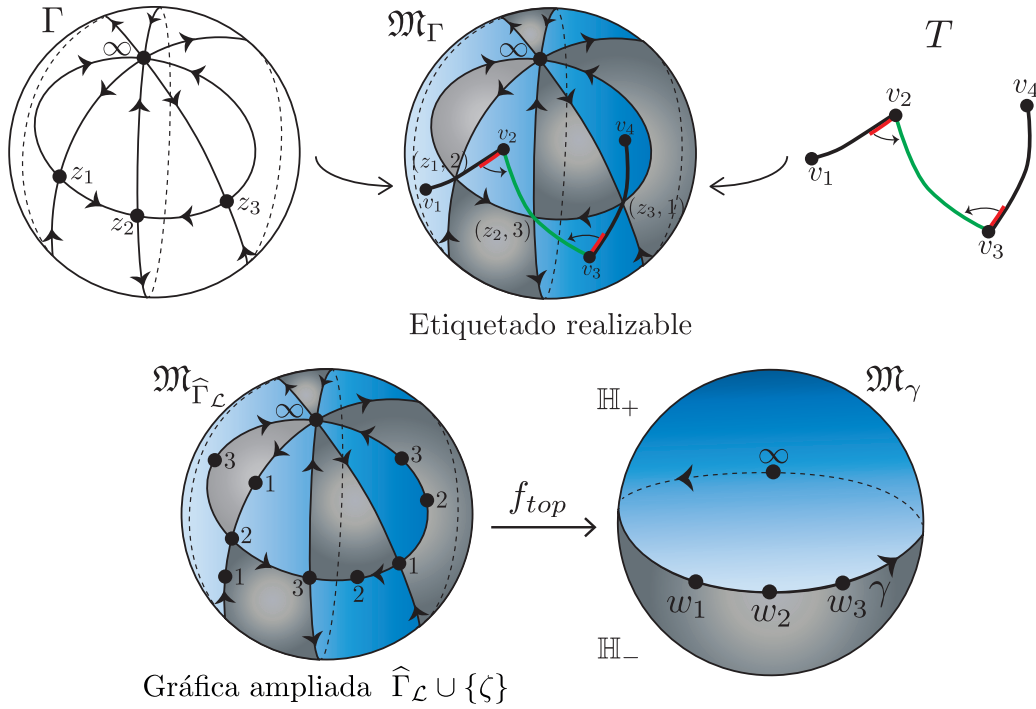


Figura 3.4: Árbol de prueba T y etiquetado realizable $\mathcal{L}$ para Γ .

La primera fila de la Figura 3.4 ilustra un ejemplo de un árbol de prueba T , asociado a una gráfica plana Γ .

Para tener un panorama general de las propiedades de T y establecer ciertos convenios de notación y terminología, que se utilizarán a lo largo de este escrito, es necesario recordar algunas definiciones de teoría de gráficas.

1. Una arista $\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\lambda}}$ de T es una *hoja* si uno de sus vértices extremos tiene valencia 1.
2. Una arista $\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\lambda}}$ de T es un *punte* si al removerla desconecta a T . Claramente un puente de T satisface que sus dos vértices extremos tienen valencia mayor o igual a 2.

Definición 3.2.2. Consideremos un vértice $v_{\mathfrak{t}}$ de T de valencia $d := d(\mathfrak{t}) \geq 2$; la *estrella* de $v_{\mathfrak{t}}$,

$$star(v_{\mathfrak{t}}) = [\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(1)}}^I, \overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(2)}}, \dots, \underbrace{\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j)}}, \dots, \overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(\kappa)}}}_{\text{un abanico}}, \dots, \overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(d)}}], \quad (3.11)$$

es el sub-árbol de T formado por las aristas incidentes a $v_{\mathfrak{t}}$.

Por abuso de notación en la Ecuación (3.11), la colección $\mathfrak{t}(1), \dots, \mathfrak{t}(d)$ toma valores en los subíndices originales $\{1, \dots, n\} \setminus \{\mathfrak{t}\}$ de los vértices de T (como se muestra en la Figura 3.5). Por otra parte, la notación $[\dots]$ significa lo siguiente.

i) El orden $[\dots]$ en las aristas de $star(v_{\mathfrak{t}})$ coincide con el orden topológico $\prec$ en los vértices de $\partial\tau_{\mathfrak{t}}$.

ii) La *arista inicial* $\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(1)}}^I$ de $star(v_{\mathfrak{t}})$ es aquella que intersecta el primer vértice finito $z_{\mathfrak{t}(1)}$ en $\partial\tau_{\mathfrak{t}}$, respecto al orden topológico $\prec$; esta idea se esboza en la Figura 3.5(b).

En nuestras figuras, la arista inicial de cada $star(v_{\mathfrak{t}})$ es marcada por media arista roja, partiendo de $v_{\mathfrak{t}}$; esto puede apreciarse en las Figuras 3.4 y 3.5. Es realmente importante advertir que cada estrella $star(v_{\mathfrak{t}})$ tiene exactamente una arista inicial, sin embargo una arista $\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\lambda}}$ puede ser inicial de sus dos estrellas extremas $star(v_{\mathfrak{t}})$ y $star(v_{\lambda})$, respectivamente.

El orden $[\dots]$ en cada estrella es señalado con un pequeño arco de círculo orientado; esto puede observarse en la Figura 3.5.

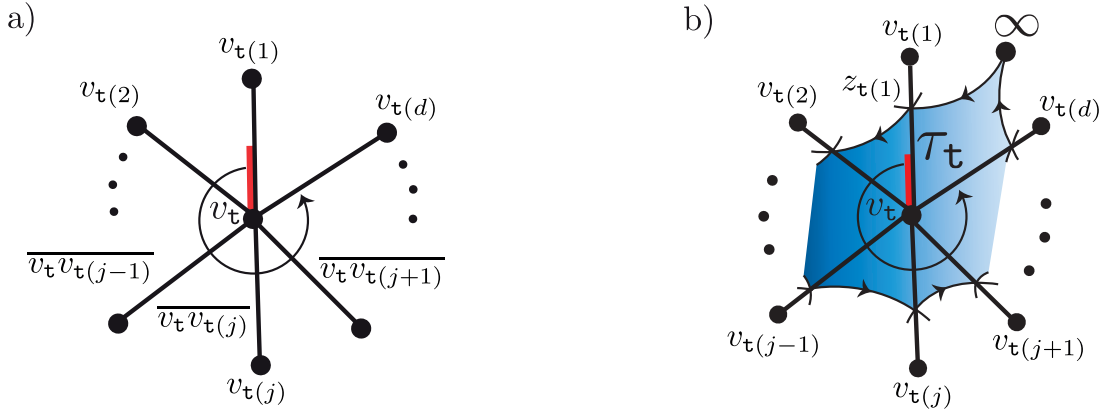


Figura 3.5: a) Una $star(v_{\mathfrak{t}})$ de T , b) su orden $[\dots]$ y arista inicial $\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(1)}}^I$.

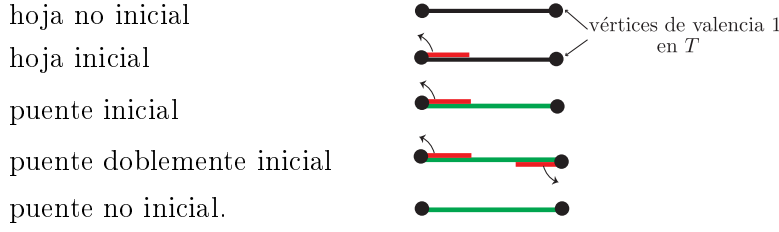
Recordemos que un *abanico* de $star(v_{\mathfrak{t}})$ es una sub-colección consecutiva de aristas, con respecto al orden $[\dots]$, como se muestra en la Ecuación (3.11).

Definición 3.2.3. Consideremos una arista $\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j)}}$ $\in star(v_{\mathfrak{t}})$ de T .

1. La *arista predecesora* (resp. *sucesora*) de $\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j)}}$, respecto a $star(v_{\mathfrak{t}})$, es $\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j-1)}}$ (resp. $\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j+1)}}$).
2. El *abanico predecesor* (resp. *sucesor*) de $\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j)}}$, respecto a $star(v_{\mathfrak{t}})$, es

$$star(v_{\mathfrak{t}}) = \underbrace{[\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(1)}}^I, \dots, \overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j-1)}}]}_{\text{abanico predecesor}}, \overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j)}}, \underbrace{[\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j+1)}}, \dots, \overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(d)}}]}_{\text{abanico sucesor}}. \quad (3.12)$$

Observación 3.2.1. Establecemos los siguientes convenios de notación y clasificación, a través de colores, para las clases de aristas que pueden aparecer en cualquier árbol de prueba T .

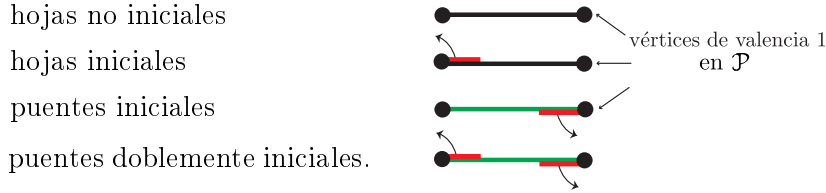


3.2.2. Noción de árbol primo y su etiquetado de prueba.

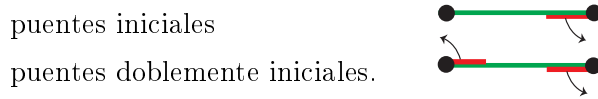
Como un primer acercamiento a la construcción de un etiquetado realizable para Γ , es conveniente centrar nuestra atención en los siguientes sub-árboles de T . La topología de estos sub-árboles determinará de manera inmediata un orden canónico de recorrerlos, que a su vez, será un punto clave para construir el etiquetado deseado.

Definición 3.2.4. Un *árbol primo* de T es un par $(\mathcal{P}, \overline{v_t v_{t(1)}}^{IP})$ como sigue.

1. $\mathcal{P}$ es un sub-árbol conexo de T tal que sus hojas son de las siguientes clases:



Además, sus puentes son de las siguientes clases:



2. La *arista principal* $\overline{v_t v_{t(1)}}^{IP}$ de $\mathcal{P}$ es de una de las siguientes clases: hoja inicial o puente doblemente inicial de T .



3. El árbol $(\mathcal{P}, \overline{v_t v_{t(1)}}^{IP})$ es maximal respecto a las Condiciones 1–2.

No tendremos dificultad alguna en construir muchos ejemplos de árboles primos y deducir las siguientes afirmaciones.

1. Los puentes de T pueden ser hojas de $\mathcal{P}$; podemos observar algunos ejemplos en la Figura 3.6(b)–(c).
2. Los árboles primos más simples son como los trazados en la Figura 3.6(a)–(b).
3. La igualdad $T = \mathcal{P}$ es posible.

Lema 3.2.1. Cada hoja inicial o puente doblemente inicial $\overline{v_t v_{t(1)}}$ de T determina un único árbol primo $\mathcal{P} \subset T$, y la arista $\overline{v_t v_{t(1)}}$ es la correspondiente arista principal de $\mathcal{P}$.

Demostración. Por simple inspección. □

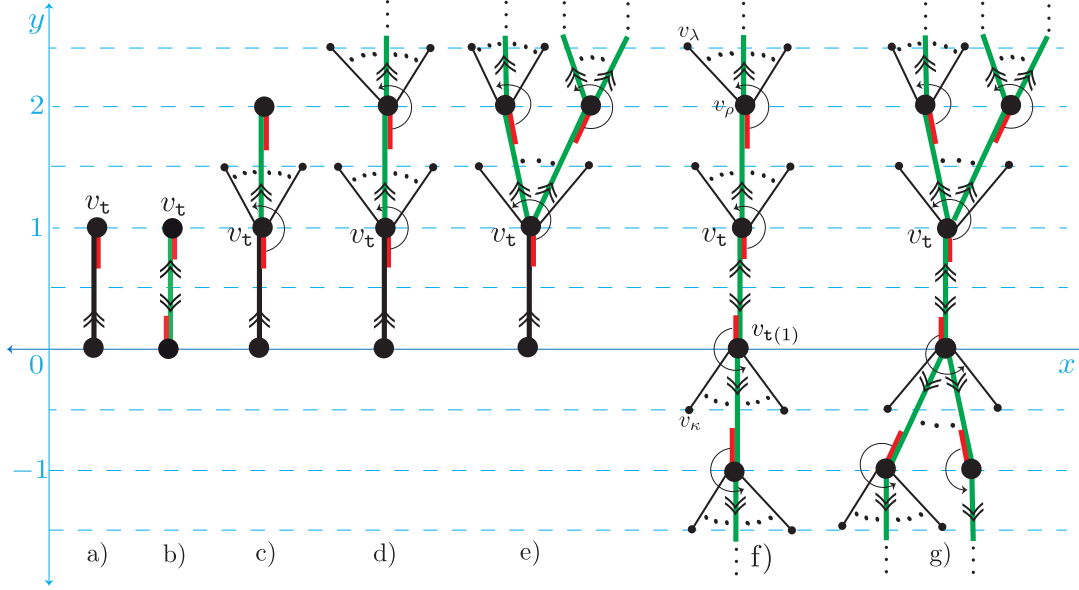


Figura 3.6: Árboles primos $\{\mathcal{P}\}$.

Observación 3.2.2. Si centramos nuestra atención solamente en un árbol primo $\mathcal{P}$ de T , salvo isotopía, $\mathcal{P}$ admite un encaje en $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ como se ilustra en la Figura 3.6, cumpliendo las siguientes propiedades.

1. La arista principal $\overline{v_t v_{t(1)}}^{IP}$ de $\mathcal{P}$ está encajada en la franja horizontal $\{0 \leq y \leq 1\}$. Es fácil ver la existencia de las siguientes dos familias.

Si $\overline{v_t v_{t(1)}}^{IP}$ es una hoja inicial, entonces $\mathcal{P}$ es llamado *positivo* y es encajado en el primer cuadrante; esto se evidencia en la Figura 3.6(a)–(d).

Si $\overline{v_t v_{t(1)}}^{IP}$ es un puente doblemente inicial de $\mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P}$ es llamado *positivo-negativo* y es encajado en el primer y cuarto cuadrante; esto se esboza en la Figura 3.6(e)–(f).

2. Las aristas de $\mathcal{P}$ tienen las siguientes coordenadas Cartesianas

$$\{\overline{v_t v_\lambda} = \overline{(x_t, y_t)(x_\lambda, y_\lambda)}\},$$

cumpliendo:

$$y_\lambda = \begin{cases} y_t + 1 & \text{si } \overline{v_t v_\lambda} \text{ es un puente inicial en el primer cuadrante,} \\ y_t + \frac{1}{2} & \text{si } \overline{v_t v_\lambda} \text{ es una hoja no inicial en el primer cuadrante,} \\ y_t - 1 & \text{si } \overline{v_t v_\lambda} \text{ es un puente inicial en el cuarto cuadrante,} \\ y_t - \frac{1}{2} & \text{si } \overline{v_t v_\lambda} \text{ es una hoja no inicial en el cuarto cuadrante.} \end{cases}$$

3. Un lector cuidadoso advertirá que para un árbol primo positivo-negativo existen en realidad dos maneras distintas de elegir los sub-árboles encajados en el primer y cuarto cuadrante, *i.e.* estos pueden ser intercambiados, sin perder las propiedades ya mencionadas.

4. Los puentes son ilustrados como en la Figura 3.6 si y sólo si pertenecen a $\mathcal{P}$.

El encaje de $\mathcal{P}$ nos proporciona una orden conveniente que nos permitirá encontrar un etiquetado realizable para $\mathcal{P}$, de una manera natural.

Definición 3.2.5. El *orden lexicográfico* $<_{lex}$ en las aristas $A_{\mathcal{P}}$ de un árbol primo $\mathcal{P}$ cumple las siguientes condiciones.

1. La arista principal es el menor elemento del orden

$$\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}^{IP} <_{lex} \overline{v_{\rho}v_{\lambda}} \text{ para todo } \overline{v_{\rho}v_{\lambda}} \in A_{\mathcal{P}}.$$

2. Para cualquiera dos aristas $\overline{v_{\rho}v_{\kappa}}$ y $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\lambda}}$ en el primer cuadrante

$$\overline{v_{\rho}v_{\kappa}} <_{lex} \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\lambda}} \text{ si y sólo si } \begin{cases} y_{\rho} < y_{\mathbf{t}} \text{ o} \\ y_{\mathbf{t}} = y_{\rho} \text{ y } x_{\lambda} < x_{\kappa}. \end{cases}$$

3. Para cualquiera dos aristas $\overline{v_{\rho}v_{\kappa}}$ y $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\lambda}}$ en el cuarto cuadrante

$$\overline{v_{\rho}v_{\kappa}} <_{lex} \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\lambda}} \text{ si y sólo si } \begin{cases} y_{\mathbf{t}} < y_{\rho} \text{ o} \\ y_{\mathbf{t}} = y_{\rho} \text{ y } x_{\kappa} < x_{\lambda}. \end{cases}$$

4. Para $\overline{v_{\rho}v_{\kappa}}$ en el primer cuadrante y $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\lambda}}$ en el cuarto cuadrante

$$\overline{v_{\rho}v_{\kappa}} <_{lex} \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\lambda}}.$$

Observación 3.2.3. Un hecho que será de gran utilidad más adelante es que el orden lexicográfico coincide con el orden $[\dots]$ de las aristas, en cada estrella de $\mathcal{P}$.

Corolario 3.2.1. 1. Consideremos dos estrellas $star(v_{\mathbf{t}})$ y $star(v_{\lambda})$ de $\mathcal{P}$, con aristas iniciales $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}^I$ y $\overline{v_{\lambda}v_{\lambda(1)}}^I$, respectivamente. Entonces,

$$star(v_{\mathbf{t}}) <_{lex} star(v_{\lambda}) \text{ si } \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}^I <_{lex} \overline{v_{\lambda}v_{\lambda(1)}}^I. \quad (3.13)$$

2. El orden lexicográfico nos permite extender la Definición 3.2.3 a estrella predecesora (resp. sucesora) para cada estrella de $\mathcal{P}$. $\square$

Como enfatizamos al inicio de esta Sección, nuestro objetivo es construir un etiquetado realizable para Γ . Persiguiendo este fin, definimos un etiquetado de prueba para T , siguiendo el orden lexicográfico.

Definición 3.2.6. Consideremos un árbol de prueba T con $n-1$ aristas. Un *etiquetado de prueba* para T con etiquetas $\{1, \dots, n-1\}$ es una biyección

$$\begin{aligned} L : A_T &\longrightarrow A_T \times \{1, \dots, n-1\} \\ \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\lambda}} &\longmapsto (\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\lambda}}, \iota_{\mathbf{t}\lambda}), \end{aligned}$$

tal que el orden $[\dots]$ en cada $star(v_{\mathbf{t}})$ coincide con el orden natural de $\mathbb{N}$ en $\{1, \dots, n-1\}$, i.e. para cada $star(v_{\mathbf{t}}) = [\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}^I, \dots, \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(d)}}^I]$ las etiquetas respectivas de sus aristas satisfacen

$$\iota_{\mathbf{t}\mathbf{t}(1)} < \dots < \iota_{\mathbf{t}\mathbf{t}(d)}.$$

Esperamos resulte claro que la definición de etiquetado de prueba tiene sentido para cualquier sub-árbol conexo S de T , en particular para los árboles primos.

Lema 3.2.2. *Consideremos un árbol primo $(\mathcal{P}, \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}^{IP})$ de T con $\nu - 1$ ($\leq n - 1$) aristas. Existe un etiquetado de prueba L para $\mathcal{P}$ con etiquetas $\{1, \dots, \nu - 1\}$.*

Para iniciar, exponemos dos ejemplos que ilustran la idea de la demostración del Lema 3.2.2, Estos ejemplos serán útiles (asumiendo que $\mathcal{P} \subsetneq T$) para definir un etiquetado de prueba en todo T .

Ejemplo 3.2.1. *Etiquetado de prueba para un árbol primo positivo $(\mathcal{P}, \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}^{IP})$ con $\nu - 1$ aristas. Consideremos la estrella*

$$star(v_{\mathbf{t}}) = [\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}^{IP}, \dots, \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(d)}}],$$

donde $d(\mathbf{t}) := \mathbf{t}(d) \leq \nu - 1$ es la valencia de $v_{\mathbf{t}}$ en $\mathcal{P}$; algunos ejemplos se ilustran en la Figura 3.6(a)–(c). Definimos las etiquetas para las aristas de $star(v_{\mathbf{t}})$ como sigue.

$$\left\{ \begin{array}{ll} L(\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}^{IP}) &= (\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}^{IP}, 1) \\ &\vdots \\ L(\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}) &= (\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}, j) \\ &\vdots \\ L(\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(d)}}) &= (\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(d)}}, d(\mathbf{t})). \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Si $\mathcal{P} = star(v_{\mathbf{t}})$, entonces el etiquetado de prueba es concluido; algunos ejemplos de esta situación se muestran en la Figura 3.6(a)–(b). El punto crucial se presenta cuando $star(v_{\mathbf{t}}) \subsetneq \mathcal{P}$. Consideremos la estrella sucesora $star(v_{\mathbf{t}(j)}) = [\overline{v_{\mathbf{t}(j)}v_{j(1)}}^I := \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}, \dots, \overline{v_{\mathbf{t}(j)}v_{j(d)}}]$ de la estrella $star(v_{\mathbf{t}})$ en $\mathcal{P}$ (recordemos que este concepto tiene sentido gracias al Corolario 3.2.1.2), donde $d(j)$ denota la valencia de $v_{\mathbf{t}(j)}$. Entonces, siguiendo el orden lexicográfico definimos las etiquetas para las aristas de $star(v_{\mathbf{t}(j)})$, como sigue.

$$\left\{ \begin{array}{ll} L(\overline{v_{\mathbf{t}(j)}v_{j(1)}}^I) &= (\overline{v_{\mathbf{t}(j)}v_{j(1)}}^I, d(\mathbf{t}) + 1) \\ &\vdots \\ L(\overline{v_{\mathbf{t}(j)}v_{j(d)}}) &= (\overline{v_{\mathbf{t}(j)}v_{j(d)}}^I, d(\mathbf{t}) + d(j)). \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Procedemos de manera inductiva sobre el número de estrellas de $\mathcal{P}$, usando el orden lexicográfico $<_{lex}$. Esto concluye el ejemplo.

Ejemplo 3.2.2. *Etiquetado de prueba para un árbol primo positivo–negativo $(\mathcal{P}, \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}^{IP})$. Etiquetamos todas las aristas del primer cuadrante, tal como lo hicimos en el ejemplo anterior. Antes de continuar con el etiquetado es importante mencionar que existe una arista mayor $\overline{v_{\lambda}v_{\rho}}$ en el primer cuadrante, con respecto al orden lexicográfico. Si $L(\overline{v_{\lambda}v_{\rho}}) = (\overline{v_{\lambda}v_{\rho}}, k)$ entonces $k < \nu - 1$ es la etiqueta más grande asignada en el primer cuadrante.*

El punto crucial en este caso es precisar la arista sucesora $\overline{v_{\lambda'}v_{\rho'}}$ de $\overline{v_{\lambda}v_{\rho}}$ en el cuarto cuadrante. El orden lexicográfico $<_{lex}$ determina esta arista, como indica el Corolario 3.2.1.2; esta situación se plantea en la Figura 3.6(e). Siguiendo el argumento anterior definimos

$$L(\overline{v_{\lambda'}v_{\rho'}}) = (\overline{v_{\lambda'}v_{\rho'}}, k + 1).$$

Continuamos con el etiquetado de las aristas restantes, en el cuarto cuadrante, de manera inductiva sobre el número de estrellas, usando el orden lexicográfico $<_{lex}$. Esto finaliza el ejemplo.

Demostración. El etiquetado de prueba para $\mathcal{P}$ coincide con el orden lexicográfico $<_{lex}$ en el árbol completo $\mathcal{P}$. En efecto, el etiquetado de prueba asigna la etiqueta 1 a la arista principal $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}^{IP}$. El encaje de $\mathcal{P}$ determina una orientación en sus puentes $\{\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\lambda}}\}$; en nuestras figuras esta orientación es indicada por flechas dobles (tipo flujo) en los puentes.

Usando el Corolario 3.2.1 y la orientación de los puentes, L asigna las etiquetas $2, \dots, d(\mathbf{t})$ a las aristas de $star(v_{\mathbf{t}})$, donde $d(\mathbf{t}) \leq \nu - 1$ es la valencia de $v_{\mathbf{t}}$ en $\mathcal{P}$. Continuamos de manera inductiva sobre el número de estrellas de $\mathcal{P}$, usando el orden lexicográfico $<_{lex}$. $\square$

Recordemos que $\mathcal{P} = T$ es posible. Sin embargo, como era de esperarse, generalmente T no es un árbol primo, *i.e.* $\mathcal{P} \subsetneq T$. Bajo estas circunstancias la idea es descomponer a T , parcialmente, en árboles primos conectados por puentes no iniciales e ir extendiendo el etiquetado de prueba en cada uno de ellos. Es de suma importancia resaltar que los puentes no iniciales de T (recordemos la Observación 3.2.1), no pertenecen a ningún árbol primo.

En este punto, se genera otra dificultad; la descomposición mencionada para T da origen a una nueva familia de sub-árboles llamados *árboles semi-primos*. En la siguiente Sección daremos la definición formal y un estudio concienzudo de esta nueva familia.

3.2.3. Noción de árbol semi-primo y su etiquetado de prueba.

Definición 3.2.7. Un *árbol semi-primo* de T es un par $(\mathcal{S}, \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j+1)}}^P)$ como sigue.

1. $\mathcal{S}$ es un sub-árbol propio y conexo de T tal que sus hojas son de las siguientes clases:



Además, todos sus puentes son puentes iniciales.

2. La *arista principal* $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j+1)}}^P$ de $\mathcal{S}$ es de una de las siguientes clases: hoja no inicial o puente inicial, cuya arista predecesora es un puente no inicial $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}$ de T , *i.e.*

$$star(v_{\mathbf{t}}) = [\dots, \underbrace{\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}}_{\text{puente no inicial}}, \underbrace{\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j+1)}}^S, \dots, \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j+d')}}}_{\text{estrella de } v_{\mathbf{t}} \text{ en } \mathcal{S}}, \dots, \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(d)}}]. \quad (3.16)$$

La estrella de $v_{\mathbf{t}}$ en $\mathcal{S}$ es un abanico propio de $star(v_{\mathbf{t}}) \subset T$ y d' denota la valencia de $v_{\mathbf{t}}$ en $\mathcal{S}$.

3. El árbol $(\mathcal{S}, \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j+1)}}^P)$ es maximal respecto a las Condiciones 1–2.

Probablemente resulte evidente que uno de los árboles semi-primos más simple es como el señalado en la Figura 3.7(a).

Lema 3.2.3. *Cada hoja no inicial o puente inicial $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j+1)}}^P$ de T cuya arista predecesora es un puente no inicial $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}$, como en la Ecuación (3.16), determina un único árbol semi-primo $\mathcal{S} \subset T$, y la arista $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j+1)}}^P$ es la correspondiente arista principal de $\mathcal{S}$.*

Demostración. Consideremos cualquier estrella $star(v_{\mathbf{t}})$ de T con al menos un puente no inicial $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}$, donde $j < d$, como se mencionó en la Ecuación (3.16).

Caso 1. La estrella $star(v_t)$ solo tiene un puente no inicial. En este caso la Ecuación (3.16) asume la forma

$$star(v_t) = \underbrace{[\overline{v_tv_{t(1)}}^I, \dots, \overline{v_tv_{t(j-1)}}]}_{\text{abanico 1}}, \underbrace{\overline{v_tv_{t(j)}}}_{\substack{\text{puente} \\ \text{no inicial}}}, \underbrace{[\overline{v_tv_{t(j+1)}}, \dots, \overline{v_tv_{t(d)}}]}_{\text{abanico 2}}.$$

Es fácil observar que el abanico 1 está contenido en un árbol primo; consecuencia inmediata del Lema 3.2.1. Recordemos que por las Definiciones 3.2.4 y 3.2.7, el puente no inicial $\overline{v_tv_{t(j)}}$ no pertenece a ningún árbol primo o semi-primo. Por otro lado, las aristas del abanico 2 son hojas no iniciales o puentes iniciales; recordemos las clases de aristas dadas en la Observación 3.2.1. Como consecuencia de todos estos hechos existe un único árbol semi-primo $\mathcal{S}$, donde $\overline{v_tv_{t(j+1)}}$ es la arista principal $\overline{v_tv_{t(j+1)}}^P$ y el abanico 2 es $\mathcal{S} \cap star(v_t)$.

Caso 2. La estrella $star(v_t)$ tiene dos o más puentes no iniciales.

Los puentes no iniciales de $star(v_t)$ dividen la estrella en abanicos, como los ilustrados en el Caso 1. En este caso aplicamos el Caso 1 a cada abanico sucesor de un puente no inicial. $\square$

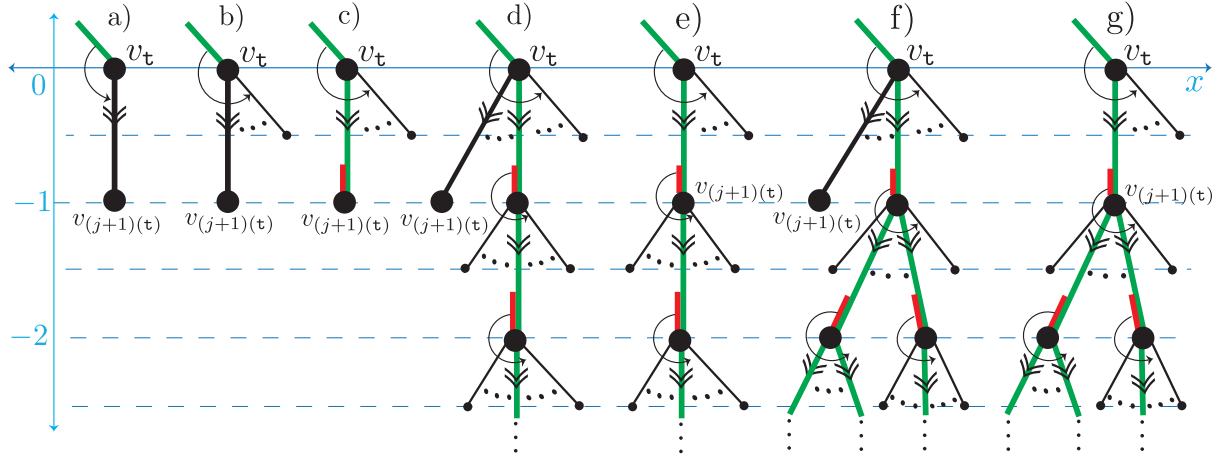


Figura 3.7: Árboles semi-primos $\{\mathcal{S}\}$.

Observación 3.2.4. Si centramos nuestra atención solamente en un árbol semi-primo $\mathcal{S}$ de T , salvo isotopía, $\mathcal{S}$ admite un encaje en $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ como se muestra en la Figura 3.7, cumpliendo las siguientes propiedades.

1. La arista principal $\overline{v_tv_{t(j+1)}}^P$ de $\mathcal{S}$ está encajada en la franja horizontal $\{-1 \leq y \leq 0\}$ y su arista predecesora $\overline{v_tv_{t(j)}} \in T \setminus \mathcal{S}$ es un puente no inicial encajado en la franja $\{0 \leq y \leq 1\}$, como se bosqueja en la Figura 3.7.
2. Las aristas de $\mathcal{S}$ tienen las siguientes coordenadas Cartesianas

$$\{\overline{v_tv_\lambda} = \overline{(x_t, y_t)(x_\lambda, y_\lambda)}\},$$

cumpliendo:

$$y_\lambda = \begin{cases} y_t - 1 & \text{si } \overline{v_tv_\lambda} \text{ es un puente inicial,} \\ y_t - \frac{1}{2} & \text{si } \overline{v_tv_\lambda} \text{ es una hoja no inicial.} \end{cases}$$

Observación 3.2.5. El encaje de $\mathcal{S}$ nos permite definir el orden lexicográfico en sus aristas, como en la Definición 3.2.5, Caso 3. Este orden coincide con el orden $\lfloor \dots \rfloor$ en las aristas de cada estrella de $\mathcal{S}$.

Corolario 3.2.2. 1. Consideremos dos estrellas de $\mathcal{S}$

$$\text{star}(v_{\mathfrak{t}}) = \lfloor \overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j+1)}} \dots \rfloor \quad \text{y} \quad \text{star}(v_{\lambda}) = \lfloor \overline{v_{\lambda}v_{\lambda(\rho+1)}} \dots \rfloor.$$

Entonces,

$$\text{star}(v_{\mathfrak{t}}) <_{\text{lex}} \text{star}(v_{\lambda}) \quad \text{si} \quad \overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j+1)}} <_{\text{lex}} \overline{v_{\lambda}v_{\lambda(\rho+1)}}.$$

2. El orden lexicográfico nos permite extender la Definición 3.2.3 a estrella predecesora (resp. sucesora) para cada estrella de $\mathcal{S}$. $\square$

Necesitamos asumir, por un momento, que el conjunto (no vacío) de todos los árboles primos de T ha sido etiquetado. Bajo este supuesto, la existencia de una *etiqueta mayor ya asignada* $k \in \{2, \dots, n-1\}$ en T tiene sentido. Consideremos un árbol semi-primo $(\mathcal{S}, \overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j+1)}}^P)$ tal que la arista predecesora $\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j)}}$ de $\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j+1)}}^P$, con respecto a la estrella $\text{star}(v_{\mathfrak{t}})$, está ya etiquetada. Los distintos hechos aquí mencionados generan el siguiente resultado, análogo al Lema 3.2.2.

Lema 3.2.4. Consideremos un árbol semi-primo $(\mathcal{S}, \overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j+1)}}^P)$ de T con $\mu-1$ ($\leq n-3$) aristas. Existe un etiquetado de prueba L para $\mathcal{S}$ con etiquetas $\{k+1, k+2, \dots, k+\mu-1\}$.

Demostración. El etiquetado de prueba para $\mathcal{S}$ coincide con el orden lexicográfico $<_{\text{lex}}$ en el árbol completo $\mathcal{S}$. En efecto, el etiquetado de prueba L asigna la etiqueta $k+1$ a la arista principal $\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\mathfrak{t}(j+1)}}^P$. De igual forma que en el caso de árboles primos, el encaje de $\mathcal{S}$ determina una orientación en sus puentes $\{\overline{v_{\mathfrak{t}}v_{\lambda}}\}$; en nuestras figuras esta orientación es indicada por flechas dobles en los puentes.

Usando el Corolario 3.2.2 y la orientación de los puentes, L asigna las etiquetas $k+2, \dots, \mathfrak{t}(d')$ a las aristas de $\text{star}(v_{\mathfrak{t}})$ en $\mathcal{S}$, donde $d' \leq k+\mu-1$ es la valencia de $v_{\mathfrak{t}}$ en $\mathcal{S}$. Procedemos de manera inductiva sobre el número de estrellas de $\mathcal{S}$, usando el orden lexicográfico $<_{\text{lex}}$. $\square$

3.2.4. Descomposición de un árbol de prueba.

En esta Sección nuestro objetivo es lograr una descomposición de un árbol de prueba T en árboles primos y semi-primos. Nuevamente resaltamos que los puentes no iniciales jugarán un papel crucial en alcanzar este objetivo, puesto que son precisamente ellos quienes conectan los árboles primos y semi-primos de T . Recordemos que por definición, los puentes no iniciales no pertenecen a ningún árbol primo o semi-primo.

Las estrellas de T con puentes no iniciales serán de gran utilidad en el momento de construir la descomposición deseada. Necesitamos, por lo tanto, establecer el siguiente convenio de notación para distinguirlas.

Definición 3.2.8. Una *estrella no inicial* de T , denotada por $\text{star}_{ni}(v_{\mathfrak{t}})$, es tal que tiene al menos un puente no inicial.

Para tener en mente algún ejemplo de estrella no inicial, podemos fijarnos en la estrella $\text{star}(v_3)$ del árbol de prueba T trazado en la Figura 3.8.

Es necesario percatar que los puentes no iniciales de una estrella no inicial $\text{star}_{ni}(v_{\mathfrak{t}})$ la dividen en abanicos. Este hecho origina el siguiente concepto.

Definición 3.2.9. Un *abanico primo* (resp. *semi-primo*) es la intersección de un árbol primo $\mathcal{P}$ (resp. semi-primo $\mathcal{S}$) con una estrella no inicial $star_{ni}(v_t)$, i.e.

$$\underbrace{\mathcal{P} \cap star_{ni}(v_t)}_{\text{abanico primo}} \quad (\text{resp.} \quad \underbrace{\mathcal{S} \cap star_{ni}(v_t)}_{\text{abanico semi-primo}}).$$

Cada uno de los abanicos de una estrella no inicial $star_{ni}(v_t)$, determinados por los puentes no iniciales, pertenecen a un árbol primo o semi-primo, como veremos a continuación.

Lema 3.2.5. *Cada estrella no inicial $star_{ni}(v_t)$ de T está dividida en abanicos como sigue:*

$$star_{ni}(v_t) = \underbrace{[\overline{v_tv_{t(1)}}^I, \dots]}_{\text{abanico primo o semi-primo}}, \underbrace{[\overline{v_tv_{t(j)}}, \dots]}_{\text{abanico de puentes no iniciales}}, \underbrace{[\overline{v_tv_{t(\beta+1)}}, \dots, \overline{v_tv_{t(d)}}]}_{\text{abanico semi-primo}}. \quad (3.17)$$

Cabe mencionar que cada estrella no inicial admite a lo más un abanico primo (que en el caso de existir debe ser el primero respecto al orden $[\dots]$). En esa medida, los puntos seguidos a la derecha en la Ecuación (3.17), solo admite abanicos de puentes no iniciales o abanicos semi-primos.

Antes de iniciar con la demostración de este Lema, un detalle que merece destacarse es que el conjunto de abanicos semi-primos en $star_{ni}(v_t)$ puede ser vacío. Por ejemplo, si $star_{ni}(v_t)$ solo tiene dos abanicos; un primer abanico primo seguido de un abanico de puentes no iniciales.

Demostración. Consideremos una estrella no inicial

$$star_{ni}(v_t) = [\overline{v_tv_{t(1)}}^I, \dots, \overline{v_tv_{t(j)}}, \dots, \overline{v_tv_{t(d)}}],$$

donde $\overline{v_tv_{t(j)}}$ es su primer puente no inicial, respecto al orden $[\dots]$.

Caso 1. La arista inicial $\overline{v_tv_{t(1)}}^I$ es una hoja inicial o un puente doblemente inicial.

El Lema 3.2.1 confirma la existencia de un único árbol primo $\mathcal{P}$ tal que su arista principal es $\overline{v_tv_{t(1)}}^I$ y

$$[\overline{v_tv_{t(1)}}^{IP}, \dots, \overline{v_tv_{t(j-1)}}] = \mathcal{P} \cap star_{ni}(v_t).$$

En vista de esta circunstancia, seleccionamos el abanico maximal de puentes no iniciales

$$[\overline{v_tv_{t(j)}}, \dots, \overline{v_tv_{t(\beta)}}] \subset star_{ni}(v_t),$$

en (3.17). Si se llega a dar el caso que $\beta = d$, entonces concluimos que solo dos abanicos como los deseados conforman a $star_{ni}(v_t)$, i.e. la Ecuación (3.17) toma la forma

$$star_{ni}(v_t) = \underbrace{[\overline{v_tv_{t(1)}}^I, \dots, \overline{v_tv_{t(j-1)}}]}_{\text{abanico primo}}, \underbrace{[\overline{v_tv_{t(j)}}, \dots, \overline{v_tv_{t(d)}}]}_{\text{abanico de puentes no iniciales}},$$

obteniendo lo que queríamos probar.

En el caso contrario, consideramos el abanico $[\overline{v_tv_{t(\beta+1)}}, \dots, \overline{v_tv_{t(s)}}]$ tal que ninguna de sus aristas son puentes no iniciales, es decir, todas las aristas deben ser hojas no iniciales o puentes

iniciales. Ahora bien, resulta claro que la arista $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(\beta+1)}}$ es la arista sucesora del puente no inicial $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(\beta)}}$. Debido a este panorama, el Lema 3.2.3 garantiza la existencia de un único árbol semi-primo $\mathcal{S}$ cuya arista principal es $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(\beta+1)}}$ y

$$[\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(\beta+1)}}^P, \dots, \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(s)}}] = \mathcal{S} \cap \text{star}_{ni}(v_{\mathbf{t}}).$$

Lo dicho hasta aquí implica que la Ecuación (3.17) adopta la forma

$$\text{star}_{ni}(v_{\mathbf{t}}) = \underbrace{[\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}^I, \dots, \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j-1)}}]}_{\text{abanico primo}} \underbrace{[\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}, \dots, \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(\beta)}}]}_{\text{abanico de puentes no iniciales}} \underbrace{[\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(\beta+1)}}^P, \dots, \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(s)}}]}_{\text{abanico semi-primo}},$$

Continuamos con un razonamiento análogo hasta reconocer todas los abanicos que conforman a la estrella no inicial $\text{star}_{ni}(v_{\mathbf{t}})$.

Caso 2. La arista inicial $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}$ es un puente inicial.

Por construcción el abanico

$$[\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}, \dots, \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j-1)}}],$$

puede venir de la intersección de la estrella no inicial $\text{star}_{ni}(v_{\mathbf{t}})$ con un árbol primo $\mathcal{P}$ o semi-primo $\mathcal{S}$. En cualquier caso la arista principal del correspondiente árbol $\mathcal{P}$ o $\mathcal{S}$ no pertenece al abanico $[\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(1)}}, \dots, \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j-1)}}]$.

Procedemos de manera análoga al Caso 1, para reconocer los demás abanicos que conforman la estrella no inicial $\text{star}_{ni}(v_{\mathbf{t}})$. $\square$

Finalmente tenemos todas las herramientas necesarias para realizar la descomposición de un árbol de prueba por árboles primos y semi-primos, como habíamos prometido en un inicio.

Lema 3.2.6. *Cada árbol de prueba T asume exactamente una de las siguientes descomposiciones topológicas.*

Tipo I. T es la unión de árboles primos y puentes no iniciales:

$$T = \bigcup \mathcal{P}_{\chi} \bigcup \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}, \quad \chi \geq 1. \quad (3.18)$$

Tipo II. T es la unión de árboles primos, semi-primos y puentes no iniciales:

$$T = \bigcup \mathcal{P}_{\chi} \bigcup \mathcal{S}_{\varrho} \bigcup \overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}, \quad \chi, \varrho \geq 1. \quad (3.19)$$

Antes de empezar a exponer la demostración del Lema observemos algunos ejemplos concretos de la descomposición mencionada.

Ejemplo 3.2.3. Consideremos el árbol de prueba T bosquejado a la izquierda de la Figura 3.8. Este árbol admite la siguiente descomposición

$$T = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \overline{v_2v_3},$$

donde $\mathcal{P}_1 = \overline{v_1v_2}$, $\mathcal{P}_2 = \overline{v_3v_4}$ son árboles primos (contenidos en vecindades color magenta a la derecha de la Figura 3.8), y $\overline{v_2v_3}$ es un puente no inicial.

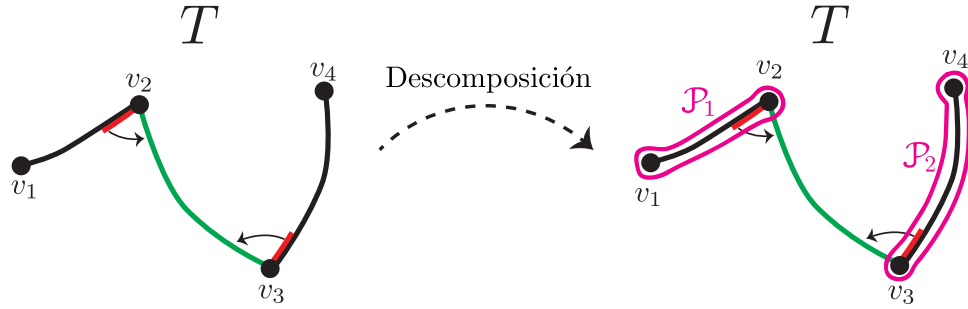


Figura 3.8: Descomposición topológica de un árbol de prueba Tipo I.

Ejemplo 3.2.4. Consideremos el árbol de prueba T esbozado a la izquierda de la Figura 3.9. Este caso especial será suficiente para evidenciar la descomposición y etiquetado de cualquier árbol de prueba del Tipo II. La descomposición en este caso es la siguiente:

$$T = \bigcup_{\chi=1}^4 \mathcal{P}_{\chi} \bigcup_{\varrho=1}^3 \mathcal{S}_{\varrho} \cup \overline{v_1 v_2} \cup \overline{v_3 v_4} \cup \overline{v_4 v_5}.$$

A la derecha de la Figura 3.9 se representa dicha descomposición; los árboles primos $\mathcal{P}_{\chi}$ están contenidos en vecindades color magenta y los árboles semi-primos $\mathcal{S}_{\varrho}$ en vecindades color cian. Este ejemplo permite ver claramente como los puentes no iniciales conectan los árboles primos y semi-primos de T .

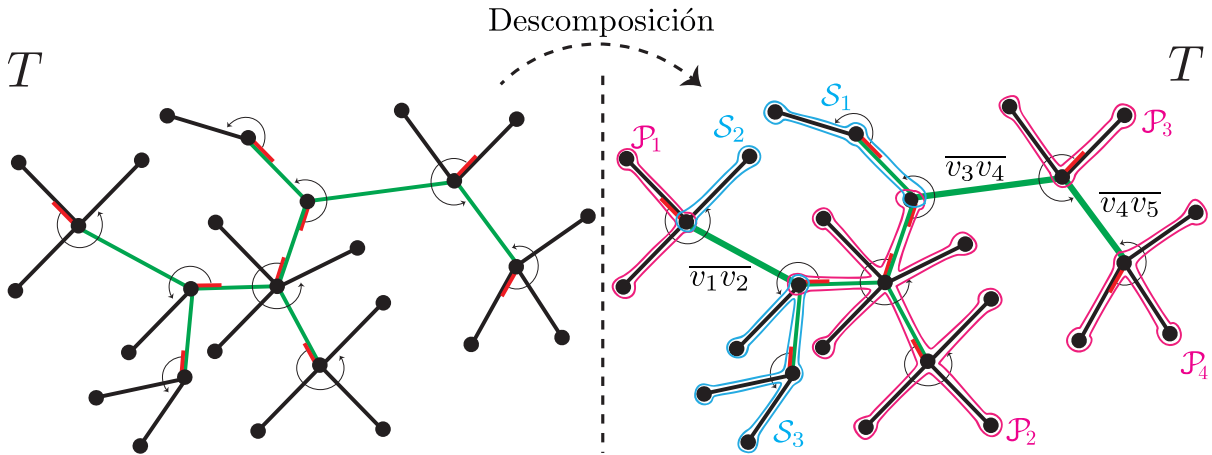


Figura 3.9: Descomposición topológica de un árbol de prueba Tipo II.

Demostración. Caso 1. El árbol T no tiene puentes no iniciales. Mostrar esta situación es análogo a probar que T es un árbol primo $\mathcal{P}$; procedemos por contradicción.

- Supongamos que T es la unión de al menos dos árboles primos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.

Por construcción T es conexo, esto hecho implica que existe un puente $\overline{v_t v_{t(j)}}$ que conecta a $\mathcal{P}_1$ con $\mathcal{P}_2$. Dicho puente $\overline{v_t v_{t(j)}}$ solo tiene dos posibilidades: ser un puente inicial o un puente no

inicial. En cualquiera de los dos casos generamos una contradicción. En efecto, Si $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}$ es un puente inicial, entonces $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ no son maximales; esto contradice la Definición 3.2.4. Por otro lado, si $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}$ es un puente no inicial, entonces estamos negando la hipótesis.

- Ahora, supongamos que T es la unión de al menos un árbol primo $\mathcal{P}$ y un árbol semi-primo $\mathcal{S}$. Como una consecuencia inmediata de la Definición 3.2.7, la arista principal de $\mathcal{S}$ es la arista sucesora de un puente no inicial; esto implica una contradicción.

Se infiere de las dos situaciones anteriores que T es un árbol primo.

Caso 2. El árbol T tiene puentes no iniciales. Si cada estrella no inicial $star_{ni}(v_{\mathbf{t}})$ tiene un abanico primo, como se ilustró en la Ecuación (3.17) del Lema 3.2.5, entonces T asume la topología Tipo I.

Si por el contrario, existe al menos una estrella no inicial $star_{ni}(v_{\mathbf{t}})$ sin abanicos primos, entonces por lo indicado en la Ecuación (3.17) T asume la topología Tipo II. $\square$

3.2.5. Un etiquetado de prueba para un árbol de prueba.

Finalmente estamos preparados para construir un etiquetado de prueba L para un árbol de prueba T . Nuestra construcción está basada en la descomposición de T , detallada en la sección anterior.

Proposición 3.2.1. *Un árbol de prueba T admite un etiquetado de prueba L .*

Antes de iniciar con la demostración de la Proposición presentaremos algunos ejemplos de etiquetados de prueba para árboles dados, que nos darán una idea general de la demostración a construir.

Ejemplo 3.2.5. Consideremos el árbol de prueba del Ejemplo 3.2.3,

$$T = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \overline{v_2v_3}.$$

El etiquetado de prueba L para T es

$$L : E_T \longrightarrow E_T \times \{1, 2, 3\}$$

$$\underbrace{L(\overline{v_1v_2}) = (\overline{v_1v_2}, 1)}_{\text{etiqueta de } \mathcal{P}_1}, \underbrace{L(\overline{v_3v_4}) = (\overline{v_3v_4}, 2)}_{\text{etiqueta de } \mathcal{P}_2}, \underbrace{L(\overline{v_2v_3}) = (\overline{v_2v_3}, 3)}_{\text{etiqueta del puente no inicial}}.$$

Ejemplo 3.2.6. Consideremos el árbol de prueba mostrado en la Figura 3.9,

$$T = \bigcup_{\chi=1}^4 \mathcal{P}_{\chi} \bigcup_{\varrho=1}^3 \mathcal{S}_{\varrho} \cup \overline{v_1v_2} \cup \overline{v_3v_4} \cup \overline{v_4v_5}.$$

El etiquetado de prueba L para T se muestra en la Figura 3.10.

Como pronto notaremos, el orden para las etiquetas en ambos ejemplos coincide esencialmente con el orden de los pasos en la prueba de la Proposición 3.2.1.

Demostración. Consideremos un árbol de prueba T con $n \geq 3$ vértices. La idea central para la construcción de un etiquetado de prueba L para T es extender el orden lexicográfico en los árboles primos y semi-primos a T completo.

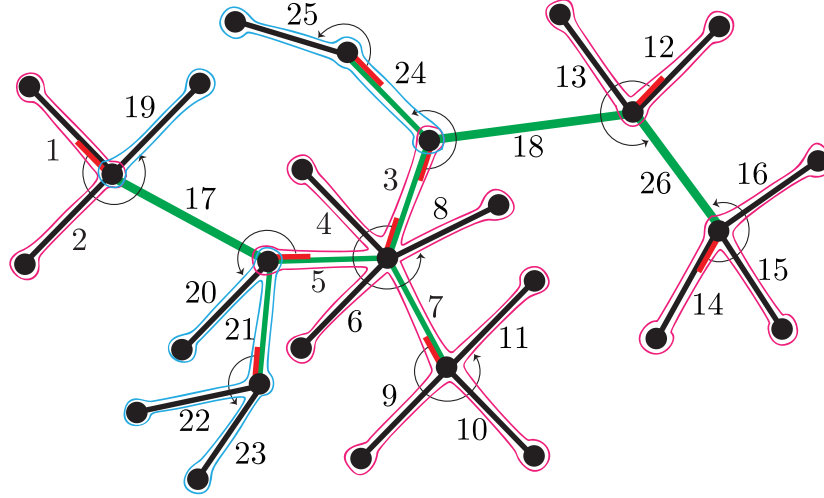


Figura 3.10: Etiquetado de prueba para un árbol de prueba Tipo II.

T es del Tipo I.

Etiquetado de los árboles primos. Consideremos un árbol primo $(\mathcal{P}_\chi, \overline{v_t v_{t(1)}}^{IP})$ de T dado en la descomposición (3.18). Por el Lema 3.2.2, existe un etiquetado de prueba, digamos L_χ , para $\mathcal{P}_\chi$. Si llegara ser el caso que $\mathcal{P}_\chi = T$, entonces el etiquetado de prueba está terminado.

En el caso contrario, denotemos con $k_1 \in \mathbb{N}$ la etiqueta mayor ya asignada en $\mathcal{P}_\chi$. Elegimos un segundo árbol primo $(\mathcal{P}_\theta, \overline{v_\rho v_{\rho(1)}}^{IP})$ en (3.18). De nuevo el Lema 3.2.2 nos permite extender el etiquetado de prueba L_χ para el árbol primo $\mathcal{P}_\theta$, iniciando con la etiqueta $k_1 + 1$. En este punto ya podemos remitirnos a los Ejemplos 3.2.1, 3.2.5 y 3.2.6 para observar esta primera etapa de la construcción del etiquetado.

Continuamos de forma inductiva sobre el número χ de árboles primos expresada en la Ecuación (3.18), obteniendo un etiquetado de prueba L para $\bigcup \mathcal{P}_\chi$ y una etiqueta mayor ya asignada $1 \leq K \leq n - 3$ en todos los árboles primos.

Etiquetado de los puentes no iniciales. Consideremos el conjunto de los m puentes no iniciales $\{\overline{v_t v_{t(j)}}, \dots, \overline{v_\sigma v_{\sigma(s)}}\}$ señalados en la Ecuación (3.18), seleccionando cualquier orden en ellos. Definimos

$$\begin{cases} L(\overline{v_t v_{t(j)}}) &= (\overline{v_t v_{t(j)}}, K + 1) \\ &\vdots \\ L(\overline{v_\sigma v_{\sigma(s)}}) &= (\overline{v_\sigma v_{\sigma(s)}}, K + m). \end{cases}$$

En concordancia con el tipo de topología de T , expuesta en la Ecuación (3.18), $K + m = n - 1$ y el etiquetado L es definido en todo T .

T es del Tipo II.

Paso 1. Etiquetando los árboles primos.

Partimos etiquetando todos los árboles primos $\{\mathcal{P}_\chi\}$ establecidos en la Ecuación (3.19), justo como se ejecutó en el caso previo, obteniendo un etiquetado de prueba, digamos L_P , para la unión $\bigcup \mathcal{P}_\chi$, y una etiqueta mayor ya asignada $1 \leq K \leq n - 4$.

Antes de empezar a exponer el siguiente paso, necesitamos hacer un trabajo previo.

Es preciso recordar que los puentes no iniciales de T , exhibidos en la Ecuación (3.19), conectan los árboles primos y semi-primos. Entre todos los puentes no iniciales de T centraremos toda nuestra atención en los puentes $\{\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}\} \subset T$ que satisfacen la siguiente condición.

Lema 3.2.7. *Consideremos un árbol de prueba T Tipo II. Existe al menos un puente no inicial $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}$ tal que sus dos aristas predecesoras, respecto a las estrellas no iniciales $star_{ni}(v_{\mathbf{t}})$ y $star_{ni}(v_{\mathbf{t}(j)})$, respectivamente, pertenecen a árboles primos.*

Ejemplo 3.2.7. Consideremos el árbol de prueba T dado en el Ejemplo 3.2.6. Las dos aristas predecesoras del puente no inicial $\overline{v_1v_2}$, respecto a las estrellas no iniciales $star_{ni}(v_1)$ y $star_{ni}(v_2)$, pertenecen a los árboles primos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$. No obstante, el puente no inicial $\overline{v_4v_5}$ no satisface esta condición.

Demostración. Antes de iniciar debemos enfatizar que los puentes no iniciales no pertenecen a los árboles primos y semi-primos; recordemos que un árbol de prueba T asume alguna de las descomposiciones dadas en el Lema 3.2.6.

Procediendo por contradicción, suponemos que todos los puentes no iniciales $\{\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}\}$ de T tienen al menos una arista predecesora que no pertenece a un árbol primo. Para un tratamiento cuidadoso de esta situación adoptamos la notación de un puente no inicial y sus dos aristas predecesoras como sigue:

$$star_{ni}(v_{\mathbf{t}}) = [\dots, \underbrace{\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j-1)}}}_{\substack{\text{arista} \\ \text{predecesora}}}, \underbrace{\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}}_{\substack{\text{puente} \\ \text{no inicial de } T}}, \dots,], \quad (3.20)$$

$$star_{ni}(v_{\mathbf{t}(j)}) = [\dots, \underbrace{\overline{v_{\mathbf{t}-1}v_{\mathbf{t}(j)}}}_{\substack{\text{arista} \\ \text{predecesora}}}, \underbrace{\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}}_{\substack{\text{puente} \\ \text{no inicial de } T}}, \dots,]. \quad (3.21)$$

Bajo estas condiciones aparecen cinco topologías para los puentes no iniciales y sus dos aristas predecesoras. Sin pérdida de generalidad, si la arista $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j-1)}}$ en la Ecuación (3.20) es un puente no inicial, entonces la arista $\overline{v_{\mathbf{t}-1}v_{\mathbf{t}(j)}}$ en la Ecuación (3.21) es

- i) un puente no inicial o
- ii) pertenece a un árbol primo o
- iii) pertenece a un árbol semi-primo.

No obstante, si la arista $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j-1)}}$ en la Ecuación (3.20) pertenece a un árbol semi-primo, entonces la arista $\overline{v_{\mathbf{t}-1}v_{\mathbf{t}(j)}}$ en la Ecuación (3.21)

- iv) pertenece a un árbol primo ó
- v) pertenece a un árbol semi-primo.

Ahora analizaremos las topologías (i)–(iii) en el Caso 1 y las topologías (iv)–(v) en el Caso 2.

Caso 1. Supongamos que cada puente no inicial tiene al menos una arista predecesora que es un puente no inicial.

Bajo este supuesto basta observar que el orden $\lfloor \dots \rfloor$ en cada estrella no inicial implica lo siguiente.

- T tiene un camino infinito de puentes no iniciales. Esto ocurre si las aristas predecesoras emanan de distintas estrellas, como se ilustra en la Figura 3.11(a).

- T tiene una estrella no inicial $star_{ni}(v_t)$ con un número infinito de puentes no iniciales. Esto ocurre si todas las aristas predecesoras emanan de una misma estrella, como se ilustra en la Figura 3.11(b).

Dado que T es finito, estas dos situaciones implican una contradicción.

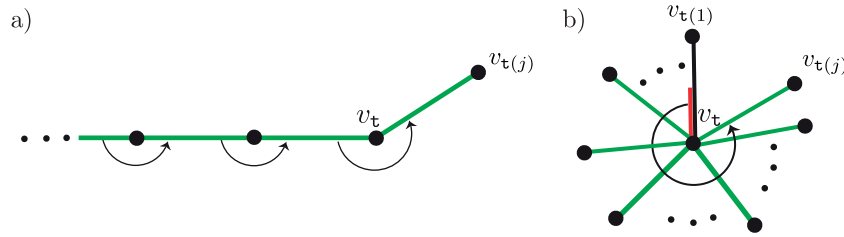


Figura 3.11: a) Camino infinito de puentes no iniciales, b) estrella no inicial con infinitos puentes no iniciales.

Caso 2. Supongamos que cada puente no inicial $\overline{v_t v_{t(j)}}$ tiene al menos una arista predecesora que pertenece a un árbol semi-primo.

Sin pérdida de generalidad asumamos que la arista predecesora $\overline{v_t v_{t(j-1)}}$ del puente no inicial $\overline{v_t v_{t(j)}}$, ilustrada en la Ecuación (3.20), pertenece a un árbol semi-primo $\mathcal{S}_\varrho$.

Caso 2.1. La arista principal $\overline{v_t v_{t(\kappa+1)}}^P$ de $\mathcal{S}_\varrho$ pertenece a la estrella no inicial $star_{ni}(v_t)$. Por el Lema 3.2.5,

$$star_{ni}(v_t) = \lfloor \dots, \underbrace{\overline{v_t v_{t(\kappa)}}}_{\text{puente no inicial}}, \underbrace{\overline{v_t v_{t(\kappa+1)}}^P, \dots, \overline{v_t v_{t(j-1)}}}_{\subset \mathcal{S}_\varrho}, \underbrace{\overline{v_t v_{t(j)}}}_{\text{puente no inicial}}, \dots \rfloor. \quad (3.22)$$

Por Definición 3.2.7, la arista $\overline{v_t v_{t(\kappa)}}$, en la Ecuación 3.22, es un puente no inicial. Nuevamente la arista predecesora de $\overline{v_t v_{t(\kappa)}}$, respecto a la estrella no inicial $star_{ni}(v_{t(\kappa)})$, pertenece al árbol semi-primo $\mathcal{S}_\varsigma$. Otra vez por Definición 3.2.7, la arista predecesora de la arista principal de $\mathcal{S}_\varsigma$ es un puente no inicial. Razonamos de manera análoga sobre la arista principal de $\mathcal{S}_\varsigma$ y continuando de esta forma, obtenemos un camino infinito de puentes no iniciales de T . Esto implica una contradicción.

Caso 2.2. La arista principal de $\mathcal{S}_\varrho$ no pertenece a la estrella no inicial $star_{ni}(v_t)$.

Denotemos por $\overline{v_\sigma v_{\sigma(s+1)}}^P$ la arista principal de $\mathcal{S}_\varrho$. Por Definición 3.2.7, la arista predecesora $\overline{v_\sigma v_{\sigma(s)}}$ de $\overline{v_\sigma v_{\sigma(s+1)}}^P$ es un puente no inicial. De nuevo por hipótesis, al menos una arista predecesora de $\overline{v_\sigma v_{\sigma(s)}}$ pertenece a un árbol semi-primo $\mathcal{S}_\varsigma$. Analizando de manera análoga la arista principal de $\mathcal{S}_\varsigma$ y procediendo de este modo obtenemos un camino infinito de puentes no iniciales de T . Otra vez, esto contradice que T es finito. $\square$

Ahora tenemos los argumentos necesarios para la segunda mitad del etiquetado.

Paso 2. Etiquetando los puentes no iniciales tal que sus dos aristas predecesoras pertenecen a árboles primos.

Por el Lema 3.2.7, existe un puente no inicial $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}$ de T tal que sus dos aristas predecesoras, respecto a las estrellas $star(v_{\mathbf{t}})$ y $star(v_{\mathbf{t}(j)})$, pertenecen a los árboles primos.

En el Paso 1, la arista predecesora de $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}$ se etiquetó. En este Paso, acordamos que un puente no inicial $\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}$ está *lista para etiquetar* si y sólo si sus dos aristas predecesoras están ya etiquetadas.

Consideremos el conjunto de todos los puentes no iniciales ya etiquetados $\{\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}, \dots, \overline{v_{\rho}v_{\rho(\kappa)}}\}$, considerando cualquier orden en ellos y denotando con l el cardinal de este conjunto. Bajo estas circunstancias el etiquetado de prueba L_P extiende a cada uno de los elementos del conjunto $\{\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}, \dots, \overline{v_{\rho}v_{\rho(\kappa)}}\}$, como sigue:

$$\begin{cases} L_P(\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}) &= (\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}, K+1) \\ &\vdots \\ L_P(\overline{v_{\rho}v_{\rho(\kappa)}}) &= (\overline{v_{\rho}v_{\rho(\kappa)}}, K+l), \end{cases} \quad (3.23)$$

donde K representa la etiqueta mayor ya asignada en los árboles primos.

Etiquetando los árboles semi-primos sucesores de los puentes no iniciales ya etiquetados en (3.23)

Nuestro foco ahora está en los puentes no iniciales $\{\overline{v_{\mathbf{t}}v_{\mathbf{t}(j)}}\}$ etiquetados en (3.23) tal que sus dos aristas sucesoras pertenecen a árboles semi-primos. Esto motiva la siguiente observación.

Observación 3.2.6. Es posible generalizar la Definición 3.2.3 a *árbol sucesor* de un puente no inicial (resp. *árbol predecesor*).

Denotemos por $ASPS$ el conjunto de todos los árboles semi-primos sucesores de los puentes no iniciales ya etiquetados en (3.23), y consideremos un árbol semi-primo $\mathcal{S}_{\varrho}$ en $ASPS$.

El Lema 3.2.4, nos permite extender el etiquetado de prueba L_P para el árbol semi-primo $\mathcal{S}_{\varrho}$ comenzando con la etiqueta $K+l+1$. Denotemos con K' la etiqueta mayor ya asignada en $\mathcal{S}_{\varrho}$. Continuando de manera inductiva sobre el número de árboles semi-primos en $ASPS$, empezando cada paso inductivo con la etiqueta mayor ya asignada más uno.

Paso 3. Aplicando el paso previo de forma inductiva sobre el número de puentes no iniciales ya etiquetados.

Indiquemos con K'' la etiqueta mayor ya asignada en el paso previo. En concordancia con la descomposición dada en la Ecuación (3.19), aplicamos cada paso inductivo partiendo con la etiqueta $K''+1$, definiendo el etiquetado de prueba L para T completo. $\square$

Observación 3.2.7. Para $n \geq 4$, casi todos los árboles de prueba T admiten más de un etiquetado de prueba.

Por ejemplo, si T es un árbol primo positivo-negativo como en la Figura 3.6(f)–(g), con sub-árboles asimétricos en el primer y cuarto cuadrante, entonces existen exactamente dos etiquetados de prueba.

No obstante, si T tiene dos o más árboles primos, ordenes distintos al etiquetar estos árboles generan etiquetados de prueba distintos.

El etiquetado de prueba previo L para el árbol de prueba T determina un etiquetado realizable $\mathcal{L}$ para la gráfica Γ .

Definición 3.2.10. Un *etiquetado realizable* $\mathcal{L}$ para Γ es una biyección

$$\mathcal{L} : V \longrightarrow V \times \mathbb{Z}_n, \quad z_j \longmapsto (z_j, \iota_j)$$

tal que $\mathcal{L}(\infty) = (\infty, 0)$ y el orden topológico $\prec$ en cada frontera $\partial\tau_{\mathbf{t}}$ para Γ coincide con el orden cíclico natural en $\mathbb{Z}_n$, i.e. para todo $z_j, z_\nu \in \partial\tau_{\mathbf{t}}$,

si $z_j \prec z_\nu$ entonces sus respectivas etiquetas satisfacen $\iota_j < \iota_\nu$.

Observación 3.2.8. Advirtamos que el orden topológico $\prec$ en $\partial\tau_{\mathbf{t}}$ coincide con el orden $[\dots]$ en $\text{star}(v_{\mathbf{t}}) \subset T$.

Es muy importante tener en mente que por construcción cada vértice z_j de Γ corresponde a una arista de T y la etiqueta en cada arista determina una etiqueta en el respectivo vértice z_j . Esto realmente quiere decir que un etiquetado de prueba L para T determina un etiquetado realizable $\mathcal{L}$ para Γ ; esta situación es expuesta en la Figura 3.4.

De esta manera hemos construido una *gráfica etiquetada* $\Gamma_{\mathcal{L}} = \{V_{\mathcal{L}}; E_{\mathcal{L}}\}$, teniendo vértices (como pares punto-etiqueta)

$$V_{\mathcal{L}} = \{(\infty, 0), (z_1, \iota_1), \dots, (z_j, \iota_j), \dots, (z_{n-1}, \iota_{n-1})\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_z \times \mathbb{Z}_n,$$

aristas

$$E_{\mathcal{L}} = \{(\overline{(z_j, \iota_j)})(\overline{(z_\nu, \iota_\nu)})\}_{j, \nu \in \mathbb{Z}_n}.$$

Cada cara $\tau_{\mathbf{t}}$ tiene $d(\mathbf{t})$ vértices de valencia 4 en su frontera etiquetados, denotados como sigue.

$$\{(z_{\mathbf{t}(1)}, \iota_{\mathbf{t}(1)}), \dots, (z_{\mathbf{t}(\kappa)}, \iota_{\mathbf{t}(\kappa)}) \dots (z_{\mathbf{t}(d)}, \iota_{\mathbf{t}(d)})\} \subset \partial\tau_{\mathbf{t}} \times \mathbb{Z}_n.$$

No olvidemos que $d = d(\mathbf{t})$ es la valencia de $v_{\mathbf{t}}$ en T .

Observación 3.2.9. La gráfica etiquetada $\Gamma_{\mathcal{L}}$ determina la posición en que los $n - 1 - d(\mathbf{t})$ vértices ocultos $\{\zeta\}$ deben ser colocados, junto con sus etiquetas, tal que:

- el mosaico $\mathfrak{M}_{\Gamma_{\mathcal{L}}} \cup \{\zeta\}$ es homogéneo, es decir, todas sus caras $\tau_{\mathbf{t}}$ son n -ágonos topológicos y
- el orden topológico $\prec$ en los n vértices de cada frontera $\partial\tau_{\mathbf{t}}$, coincide con el orden $<$ de sus etiquetas en $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Estas dos condiciones implican que el mosaico el dominio de $f_{\mathbf{t}}^0$ es completado, respondiendo la pregunta expuesta en la Ecuación (3.7).

Recopilando la anterior descripción, definimos la siguiente gráfica.

Definición 3.2.11. La *gráfica etiquetada ampliada* $\widehat{\Gamma}_{\mathcal{L}} = \Gamma_{\mathcal{L}} \cup \{\zeta\}$ es una gráfica plana etiquetada tal que el mosaico $\mathfrak{M}_{\widehat{\Gamma}_{\mathcal{L}}}$ es homogéneo y el orden topológico $\prec$ en los vértices de cada frontera coincide con el orden $<$ de sus etiquetas en $\mathbb{Z}_n$.

3.2.6. Construcción de un cubriente topológico ramificado f_{top} y por ende un polinomio genérico f .

Recapitulando, el resultado profundo de la Sección anterior fue la construcción del mosaico $\mathfrak{M}_{\widehat{\Gamma}_{\mathcal{L}}}$ homogéneo tal que el orden topológico $\prec$ en los vértices de cada $\partial\tau_{\mathbf{t}}$ coincide con el orden $<$ de sus etiquetas en $\mathbb{Z}_n$.

En esta Sección se propone argumentar como el mosaico $\mathfrak{M}_{\widehat{\Gamma}_{\mathcal{L}}}$ implica la existencia de un polinomio genérico $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ de grado n , donde $\mathfrak{M}_{\widehat{\Gamma}_{\mathcal{L}}} = \widehat{\mathbb{C}}_z$.

Para iniciar, consideremos el mosaico $\mathfrak{M}_{\gamma} = \overline{\mathbb{H}}_+ \cup \overline{\mathbb{H}}_- = \widehat{\mathbb{C}}_w$, dado en la Ecuación (3.5). Si $\{\infty, z_{\mathbf{t}(1)}, \dots, z_{\mathbf{t}(d)}, \zeta_{\mathbf{t}(1)}, \dots, \zeta_{n-1-\mathbf{t}(d)}\}$ denota los n vértices de la frontera $\partial\tau_{\mathbf{t}}$ de $\mathfrak{M}_{\widehat{\Gamma}_{\mathcal{L}}}$, definimos

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{t}}^0 : \{\infty, z_{\mathbf{t}(1)}, \dots, z_{\mathbf{t}(d)}, \zeta_{\mathbf{t}(1)}, \dots, \zeta_{n-1-\mathbf{t}(d)}\} &\longrightarrow \{\infty, w_1, \dots, w_{n-1}\} \\ \infty &\longmapsto \infty \\ z_{\mathbf{t}(\kappa)} &\longmapsto w_{\mathbf{t}(\kappa)} \\ \zeta_{\mathbf{t}(\ell)} &\longmapsto w_{\mathbf{t}(\ell)}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Por simplicidad, escribimos el dominio de cada $f_{\mathbf{t}}^0$ en un orden distinto al orden topológico $\prec$ en la frontera $\partial\tau_{\mathbf{t}}$.

Por el Teorema 2.1.1 existe una función singular complejo analítica

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \cong \mathfrak{M}_{\widehat{\Gamma}_{\mathcal{L}}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \cong \mathfrak{M}_{\gamma} \tag{3.25}$$

de grado n , tal que $f^{-1}(\gamma) \cong \Gamma$. Dado que $\mathfrak{M}_{\widehat{\Gamma}_{\mathcal{L}}}$ no tiene vértices de valencia infinita, entonces f es a priori racional. Sin embargo f tiene $n-1$ valores de ramificación en $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$, con ramificación 1 en todos ellos y un valor de ramificación maximal en ∞ , con ramificación $(n-1)$. Por todo lo dicho, f es un polinomio genérico.

Esto finaliza la demostración del Teorema 3.1.2.

Ejemplo 3.2.8. En la Figura 3.4 vemos un panorama general de nuestra construcción para la prueba de $(f, \gamma) \longleftarrow \Gamma$ en el Teorema 3.1.2. Por simplicidad, solo escribimos las etiquetas de los vértices en el mosaico $\mathfrak{M}_{\widehat{\Gamma}_{\mathcal{L}}}$ determinado por la gráfica $\widehat{\Gamma}_{\mathcal{L}} := \Gamma \cup \{\zeta\}$.

En otro orden de ideas, un lector cuidadoso puede percatar que si el polinomio

$$f(z) = \int (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)dz,$$

para $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$, es determinado por la gráfica Γ , entonces su conjugado $\overline{f(z)}$ es determinado por Γ con la orientación opuesta.

Sintetizando nuestro resultado principal, obtenemos el diagrama siguiente.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Polinomio genérico } f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \\
 \text{y curva de Jordan orientada } \gamma \text{ adecuada} \\
 \downarrow \text{---} \\
 \text{Gráfica de Speiser} & \xrightleftharpoons{S_f} & \text{Mosaico no homogéneo } \mathfrak{M}_\Gamma \text{ de } \widehat{\mathbb{C}}_z, \\
 & & \text{con vértices de valencia 4 en } \mathbb{C}_z \text{ y } 2n \text{ en } \infty \\
 & & \xrightleftharpoons{\text{como en Teorema 3.1.}} \text{Gráfica plana } \Gamma,
 \end{array} \tag{3.26}$$

3.3. Conteo de clases de polinomios genéricos.

Los propósitos de esta última sección son, primero definir una relación de equivalencia en el espacio de polinomios genéricos y determinar el número de clases.

Para empezar, consideramos el espacio de pares $(\Gamma, \mathcal{L})$, donde Γ es una gráfica plana, como en el Teorema 3.1.2 y $\mathcal{L}$ es un etiquetado realizable para Γ ; denotemos este espacio como sigue

$$\mathcal{GE}_n := \left\{ (\Gamma, \mathcal{L}) \mid \begin{array}{l} \Gamma \text{ gráfica plana, orientada y conexa con } (n-1) \text{ vértices de valencia 4} \\ \text{y un vértice de valencia } 2n; \mathcal{L} \text{ etiquetado realizable para } \Gamma \end{array} \right\}$$

Como consecuencia de las equivalencias expuestas en el Diagrama 3.26, el espacio $\mathcal{GE}_n$ tiene asociado, de manera natural, el espacio de pares $(\mathfrak{M}_\Gamma, \mathcal{L})$, donde $\mathfrak{M}_\Gamma$ es el mosaico asociado a Γ ; denotemos este espacio de pares como sigue

$$\mathcal{ME}_n := \left\{ (\mathfrak{M}_\Gamma, \mathcal{L}) \mid \begin{array}{l} \mathfrak{M}_\Gamma \text{ mosaico no homogéneo dado por } 2n, k\text{-ágonos topológicos,} \\ \text{coloreados de manera alterna azul-gris; } \mathcal{L} \text{ etiquetado realizable para } \Gamma \end{array} \right\}$$

Como consecuencia inmediata del Teorema 3.1.2, el diagrama dado en la Ecuación (3.26), olvidando las gráficas de Speiser, toma la forma siguiente.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Polinomio genérico } f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \\
 \text{y curva de Jordan orientada } \gamma \text{ adecuada} \\
 \downarrow \text{---} \\
 (\mathfrak{M}_\Gamma, \mathcal{L}) \in \mathcal{ME}_n & \xrightleftharpoons{\quad} & (\Gamma, \mathcal{L}) \in \mathcal{GE}_n.
 \end{array} \tag{3.27}$$

Es posible enriquecer las equivalencias dadas en el diagrama anterior, usando los árboles de prueba construidos en la demostración del Teorema 3.1.2. En efecto, consideremos el espacio siguiente

$$\mathcal{TE}_n := \{(T, L) \mid T \text{ es un árbol de prueba y } L \text{ un etiquetado de prueba para } T\}, \tag{3.28}$$

donde n indica que todos los árboles de prueba en $\mathcal{TE}_n$ tienen n vértices. Por construcción, cada par (T, L) en $\mathcal{TE}_n$ determina un único par $(\Gamma, \mathcal{L}) \in \mathcal{GE}_n$ (o equivalentemente $(\mathfrak{M}_\Gamma, \mathcal{L}) \in \mathcal{ME}_n$). Por lo tanto tenemos la equivalencia siguiente.

Lema 3.3.1. *Los espacios $\mathcal{TE}_n$, $\mathcal{GE}_n$ y $\mathcal{ME}_n$ son equivalentes, tal como se indica en el siguiente diagrama.*

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{l} \text{Polinomio genérico } f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \\ \text{y curva de Jordan orientada } \gamma \text{ adecuada} \end{array} & & (T, L) \in \mathcal{TE}_n \\
 \updownarrow \text{ (dashed)} & & \updownarrow \\
 (\mathfrak{M}_\Gamma, \mathcal{L}) \in \mathcal{ME}_n & \longleftrightarrow & (\Gamma, \mathcal{L}) \in \mathcal{GE}_n.
 \end{array} \tag{3.29}$$

□

Nuestro objetivo ahora será determinar el número de clases del espacio cociente de polinomios genéricos, bajo la relación de equivalencia por la izquierda (definida abajo). Para este nuevo objetivo, las equivalencias dadas en el diagrama (3.29) serán indispensables.

Definición 3.3.1. Dos polinomios $f_1 : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, $f_2 : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ de grado $n \geq 2$, son *topológicamente equivalentes por la izquierda*, denotados $f_1 \cong f_2$, si existe un homeomorfismo que preserva orientación $\phi : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_z$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{\mathbb{C}}_z & \xrightarrow{f_1} & \widehat{\mathbb{C}}_w \\
 \phi \downarrow & \nearrow f_2 & \\
 \widehat{\mathbb{C}}_z & &
 \end{array}$$

Las equivalencias dadas en el Diagrama (3.29) implican que la Definición 3.3.1 puede escribirse en términos de los demás objetos, como se menciona abajo.

Definición 3.3.2. Dos pares de gráficas planas etiquetadas $(\Gamma_1, \mathcal{L}_1)$ y $(\Gamma_2, \mathcal{L}_2)$ en $\mathcal{GE}_n$ son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo que preserva orientación $\phi : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_z$ tal que $\phi(\Gamma_1) = \Gamma_2$, preservando etiquetas.

Denotamos dos pares equivalentes $(\Gamma_1, \mathcal{L}_1)$ y $(\Gamma_2, \mathcal{L}_2)$ como $(\Gamma_1, \mathcal{L}_1) \cong (\Gamma_2, \mathcal{L}_2)$.

Definición 3.3.3. Dos pares de mosaicos etiquetados $(\mathfrak{M}_{\Gamma_1}, \mathcal{L}_1)$ y $(\mathfrak{M}_{\Gamma_2}, \mathcal{L}_2)$ en $\mathcal{ME}_n$ son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo que preserva orientación $\phi : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_z$ tal que $\phi(\mathfrak{M}_{\Gamma_1}) = \mathfrak{M}_{\Gamma_2}$, preservando etiquetas.

Denotamos dos pares equivalentes $(\mathfrak{M}_{\Gamma_1}, \mathcal{L}_1)$ y $(\mathfrak{M}_{\Gamma_2}, \mathcal{L}_2)$ como $(\mathfrak{M}_{\Gamma_1}, \mathcal{L}_1) \cong (\mathfrak{M}_{\Gamma_2}, \mathcal{L}_2)$.

Definición 3.3.4. Dos pares de árboles etiquetados (T_1, L_1) y (T_2, L_2) en $\mathcal{TE}_n$ son *topológicamente equivalentes* si existe una biyección ϕ entre los vértices de T_1 y T_2 , es decir, $\phi : V_{T_1} \rightarrow V_{T_2}$, preservando relación de adyacencia y etiquetas.

Denotamos dos pares equivalentes (T_1, L_1) y (T_2, L_2) como $(T_1, L_1) \cong (T_2, L_2)$.

Por otra parte, cada par (T, L) en $\mathcal{TE}_n$ determina un único árbol no encajado T , con $n - 1$ aristas, tal que las aristas de T están en biyección con los enteros $1, 2, \dots, n - 1$. El recíproco es verdadero.

Lema 3.3.2. Un árbol no encajado T , con $n \geq 2$ vértices, tal que sus aristas están en biyección con los enteros $1, 2, \dots, n - 1$ admite un encaje en $\mathbb{C}$ tal que $(T, L) \in \mathcal{TE}_n$.

Demostración. Consideremos un árbol no encajado T como en la hipótesis. Denotemos por $l : A_T \rightarrow \{1, 2, \dots, n - 1\}$ la biyección entre las aristas de T y el conjunto $\{1, 2, \dots, n - 1\}$. Para cada vértice $v_t \in T$, con valencia mayor o igual a 2, consideramos el conjunto de aristas incidentes a él, denotadas como

$$\text{star}(v_t) = [\overline{v_t v_{t(1)}}, \dots, \overline{v_t v_{t(j)}}, \dots, \overline{v_t v_{t(d)}}],$$

tal que $[\dots]$ indica que las aristas están ordenadas en sentido antihorario, según las etiquetas, es decir

$$l(\overline{v_t v_{t(1)}}) < \dots < l(\overline{v_t v_{t(j)}}) < \dots < l(\overline{v_t v_{t(d)}}). \quad (3.30)$$

Dado que todo árbol es una gráfica plana, existe un encaje $\xi : T \hookrightarrow \mathbb{C}_z$ tal que para cada $\text{star}(v_t)$ de T , $\xi(\text{star}(v_t))$ satisface (3.30). Designamos como arista inicial de $\xi(\text{star}(v_t))$ la arista con la menor etiqueta, es decir, $\xi(\overline{v_t v_{t(1)}})$. Señalamos cada arista inicial de $\xi(T)$ con media arista roja. Claramente $\xi(T)$ es un árbol de prueba. Finalmente definimos el etiquetado de prueba L para $\xi(T)$ como sigue.

$$\begin{aligned} L : A_T &\longrightarrow A_T \times \{1, \dots, n - 1\} \\ \overline{v_t v_\lambda} &\longmapsto (\overline{v_t v_\lambda}, l(\overline{v_t v_\lambda})). \end{aligned}$$

□

Diremos que un árbol no encajado es *arista-etiquetado* si sus aristas están en biyección con los enteros $1, 2, \dots, n - 1$.

Observación 3.3.1. No todos los encajes ξ de un árbol no encajado arista-etiquetado generan pares $(\xi(T), L)$ en $\mathcal{TE}_n$. Para $n = 4$, en la Figura 3.12(a) presentamos un encaje ξ_1 tal que $(\xi_1(T), L) \notin \mathcal{TE}_4$ y en la Figura 3.12(b) el encaje ξ_2 tal que $(\xi_2(T), L) \in \mathcal{TE}_4$.

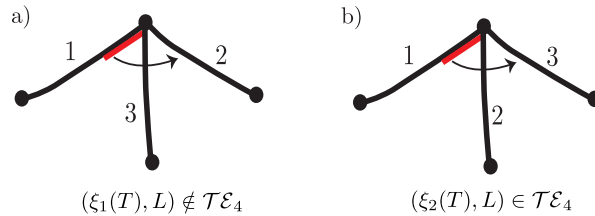


Figura 3.12: Dos encajes ξ_1 y ξ_2 para un árbol arista-etiquetado T tal que el etiquetado de $\xi_1(T)$ no es realizable y el etiquetado de $\xi_2(T)$ sí.

El Lema 3.3.2 añade una equivalencia más a las expuestas en el Diagrama (3.29), originando el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Polinomio genérico } f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, & (T, L) \in \mathcal{TE}_n & \longleftrightarrow \text{Árbol no encajado} \\
 \text{y curva de Jordan orientada } \gamma \text{ adecuada} & & \text{arista-etiquetados.} \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 (\mathfrak{M}_\Gamma, \mathcal{L}) \in \mathcal{ME}_n & \longleftrightarrow & (\Gamma, \mathcal{L}) \in \mathcal{GE}_n
 \end{array} \tag{3.31}$$

Usando las equivalencias del anterior diagrama y el Lema 3.3.3 (enunciado abajo), logramos una fórmula de conteo para las clases de equivalencia por la izquierda del espacio de polinomios genéricos, tal como se enuncia en el Corolario 3.3.1.

Lema 3.3.3. *El número de árboles no encajados arista-etiquetados es n^{n-3} .*

Corolario 3.3.1. *El número de clases de equivalencia por la izquierda del espacio de polinomios genéricos es n^{n-3} .*

Ejemplo 3.3.1. Para $n = 4$, el espacio $\mathcal{TE}_n$ tiene exactamente 4 clases de árboles de prueba, con sus respectivos etiquetados de prueba. En la Figura 3.13 se ilustra un representante de cada clase.

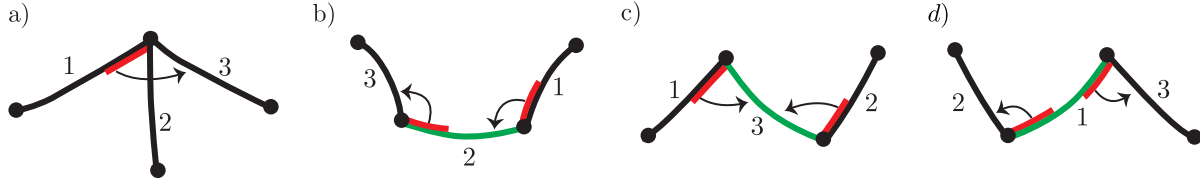


Figura 3.13: Representantes de las clases de árboles de prueba, para $n = 4$.

Las gráficas planas asociadas a cada clase de árboles se bosquejan en la Figura 3.14.

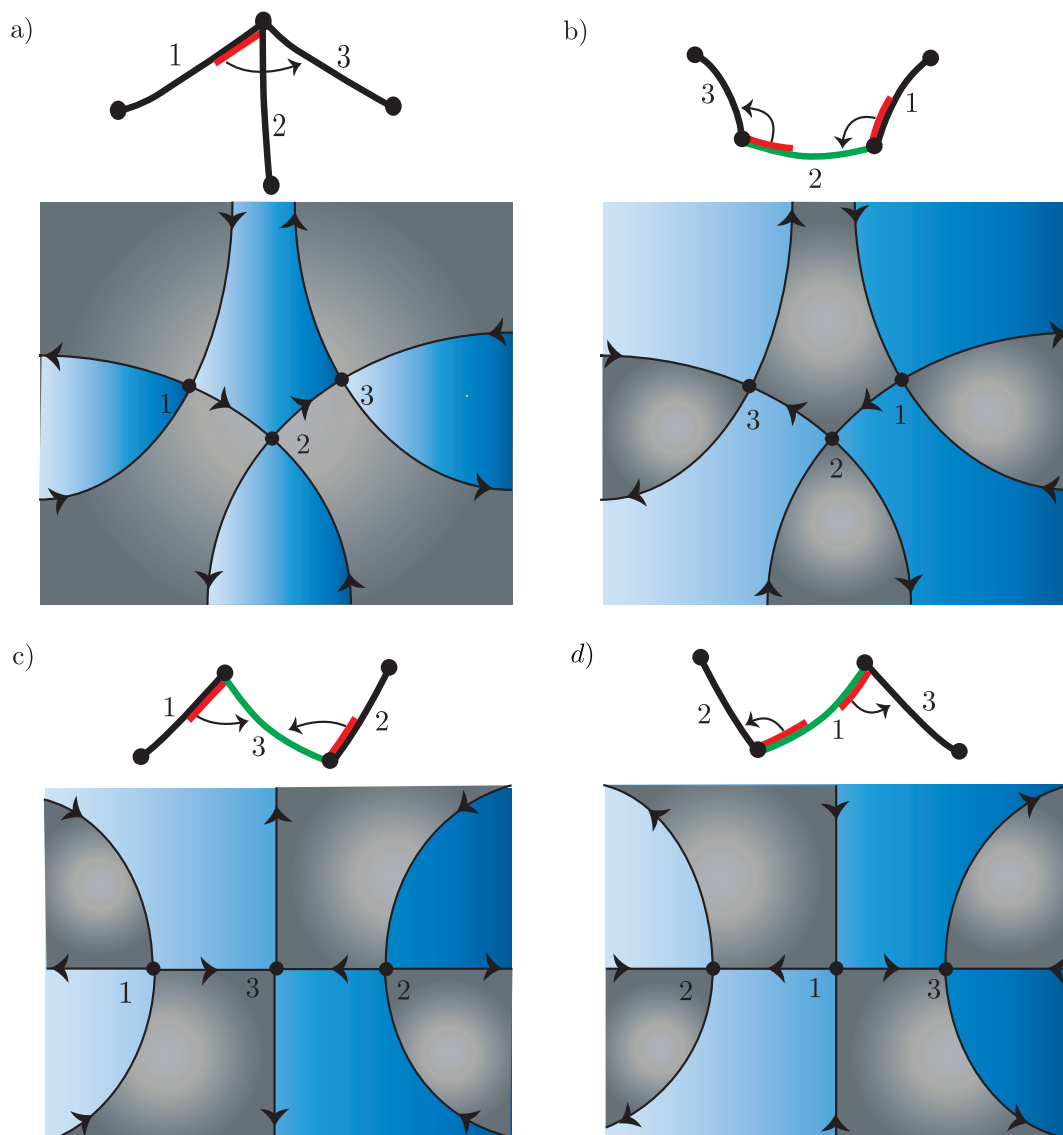


Figura 3.14:

Capítulo 4

Constelaciones de la esfera y aplicación de Lyashko–Looijenga

4.1. De polinomios genéricos a constelaciones de la esfera.

Hasta donde sabemos, A. Hurwitz trabajó en la clasificación de cubrientes ramificados finitos $g : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$,

con S una superficie conexa cerrada. Él abordó esta clasificación siguiendo una línea combinatoria, es decir, tradujo el problema en términos combinatorios sobre las multiplicidades de los puntos críticos y valores de ramificación de g , codificando estos datos a través de una sucesión de permutaciones llamada *constelación*, como puede apreciarse en [20]. Existen muchos trabajos de investigación que se han abordado siguiendo las mismas ideas, entre ellos K. Barański en [6] y S. Lando, A. Zvonkin en [23] y [24, Capítulos 1 y 5]. El propósito de esta Sección es dar un panorama general del problema de clasificación, vía la equivalencia por la izquierda dada en la Definición 3.3.1, de los polinomios genéricos, siguiendo las ideas de A. Hurwitz.

Los objetos combinatorios de interés se describen a continuación. Partamos denotando por S_n al grupo *simétrico* actuando en un conjunto E con $n \geq 2$ puntos.

Definición 4.1.1. Una sucesión $\mathcal{C}_k^n = [\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}]$, donde cada $\sigma_j \in S_n$, es una *k-constelación* si satisface las siguientes propiedades:

1. el grupo $G = \langle \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1} \rangle$ actúa transitivamente sobre el conjunto E de n puntos;
2. el producto de los σ_j es la permutación identidad: $\sigma_0 \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1} = id$.

El entero $n \geq 2$ es el *grado* de la constelación y k es la *longitud*.

Definición 4.1.2. Dos k -constelaciones $\mathcal{C}_k^n = [\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}]$ y $\hat{\mathcal{C}}_k^n = [\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{k-1}]$, actuando sobre un mismo conjunto E de cardinalidad n , son *conjugadas* si existe $h \in G = \langle \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1} \rangle$ tal que

$$\hat{\sigma}_j = h^{-1} \sigma_j h \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Observación 4.1.1. Cada permutación $\sigma_j \in S_n$ determina una partición del entero positivo n , denotada por $\mathbb{P}_j \vdash n$, conformada por las longitudes de los ciclos de σ_j .

Ejemplo 4.1.1. Consideremos el entero $n = 10$ y la permutación

$$\sigma_j = (1, 5, 7, 8)(2, 6)(3, 10).$$

En este caso, σ_j tiene en total 5 ciclos: 1 ciclo de longitud 4, 2 ciclos de longitud 2 y 2 ciclos de longitud 1 (estos son los puntos fijos de la permutación). Entonces, la partición es

$$\mathbf{P}_j \vdash 10 = 4 + 2 + 2 + 1 + 1.$$

Por simplicidad la representamos como $\mathbf{P}_j \vdash 10 = [4, 2^2, 1^2]$, donde la base de cada término representa la longitud del ciclo y la potencia el número de ciclos con esta longitud.

Definición 4.1.3. Dada una k -constelación $\mathcal{C}_k^n = [\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}]$, la sucesión

$$\mathbf{P}_k^n = [\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{k-1}],$$

de particiones de n , donde cada partición $\mathbf{P}_j$ es la asociada a la permutación σ_j , es el *pasaporte* de $\mathcal{C}_k^n$.

Ejemplo 4.1.2. En el Ejemplo 4.1.3 presentaremos una constelación cuyo pasaporte es

$$\mathbf{P}_3^3 = [[3], [2, 1], [2, 1]].$$

Observación 4.1.2. Calcular el número de clases de conjugación de constelaciones determinadas por un pasaporte dado es llamado comúnmente el *problema de Hurwitz*.

Finalmente tenemos las herramientas necesarias para iniciar con la construcción de una constelación a partir de una función racional $g : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 3$.

De funciones racionales a constelaciones.

Paso 1. Consideremos una función racional

$$g : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w,$$

de grado finito $n \geq 3$, con valores de ramificación $R_g = \{w_0, \dots, w_{k-1}\}$. Para nuestros propósitos es conveniente estudiar el levantamiento de los generadores del grupo fundamental de $\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus R_g$, bajo g .

Para iniciar, construimos los generadores de $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus R_g)$ de la siguiente manera.

1. Elegimos un punto base $w^* \in \widehat{\mathbb{C}}_w \setminus R_g$.
2. Por cada $j = 0, \dots, k-1$, trazamos un lazo simple orientado l_j , partiendo de w^* , dando una vuelta alrededor de w_j tal que éste quede a la izquierda de l_j .
3. Si identificamos a w^* como un vértice y a los lazos $l_0, l_1, \dots, l_{k-1}$ como las aristas incidentes a w^* , entonces la estrella de w^* es

$$star(w^*) = [l_0, \dots, l_{k-1}],$$

donde los lazos están ordenados como se denota en $[\dots]$.

De acuerdo a esta construcción, el producto $l_0 l_1 \dots l_{k-1}$ es un lazo retráctil a w^* , es decir, es la identidad en $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus R_g, w^*)$. En conclusión, el grupo fundamental de $\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus R_g$ admite la presentación

$$\pi_1(\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus R_g, w^*) = \langle l_0, l_1, \dots, l_{k-1} \mid l_0 l_1 \dots l_{k-1} = id \rangle.$$

Para ver un ejemplo del panorama anterior podemos mirar la esfera a la izquierda de la Figura 4.1.

Paso 2. Analicemos el levantamiento de cada generador de $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus R_g, w^*)$, bajo g .

Primero, recordemos que la fibra $E = f^{-1}(w^*) := \{z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*\}$ y tengamos en mente que el grupo simétrico S_n actúa sobre los n puntos de E .

El levantamiento de cada generador $l_j \in \pi_1(\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus R_g, w^*)$, bajo g , consta de n curvas

$$\alpha_{j,i} : [0, 1] \longrightarrow X, \text{ para } i = 1, \dots, n, \text{ tal que } \alpha_{j,i}(0), \alpha_{j,i}(1) \in E.$$

Como consecuencia de esto, cada generador l_j determina una permutación $\sigma_j \in S_n$, actuando en el conjunto E . El número de ciclos de σ_j corresponde al número de puntos críticos de g cuya imagen es w_j . El índice de ramificación de cada punto crítico es igual a la longitud del ciclo correspondiente, menos uno. Por ejemplo, fijemos un $w_j \in R_g$ y un ciclo de longitud $\nu + 1$ en la correspondiente permutación σ_j . Si z es el punto crítico de g , asociado al ciclo mencionado, entonces g se ve como $z \mapsto z^{\nu+1}$ en una vecindad de z .

Las permutaciones $\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}$ generan un subgrupo $G \leq S_n$, llamado *el grupo de monodromía del cubriente*. La asignación $[l_j] \mapsto \sigma_j$ se extiende a un homomorfismo de grupos, llamado *la monodromía*

$$\Psi : \pi_1(\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus R_g, w^*) \longrightarrow G \leq S_n.$$

Observación 4.1.3. 1. La igualdad $l_0 l_1 \cdots l_{k-1} = id$ en $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus R, w^*)$ implica la igualdad $\sigma_0 \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1} = id$ en el grupo de monodromía G .

2. Dado que $\widehat{\mathbb{C}}_z$ es conexa, entonces el grupo de permutaciones G es transitivo.

Proposición 4.1.1. *La sucesión de permutaciones $\mathcal{C}_k^n = [\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}]$ determinada por la función racional $g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ es una k -constelación.* $\square$

Ejemplo 4.1.3. Consideremos el polinomio genérico

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad f_0(z) = z^3 - 3z,$$

de grado 3, dado en el Ejemplo 1.1.1, donde $R_f = \{w_0 = \infty, w_1 = -2, w_2 = 2\}$.

Elegimos un punto $w^* \in \mathbb{H}_+$, ilustrado como un punto amarillo de $\widehat{\mathbb{C}}_w$ en la Figura 4.1. La fibra de w^* bajo f es $E = f_0^{-1}(w^*) = \{z_1^*, z_2^*, z_3^*\}$, trazados como puntos amarillos de $\widehat{\mathbb{C}}_z$ en la Figura 4.1.

Consideramos los lazos orientados l_0, l_1, l_2 , anclados en w^* , tal como se muestra a la izquierda de la Figura 4.1. Notemos que $l_0 = l_2^{-1} l_1^{-1}$. Estos lazos son los generadores del grupo fundamental

$$\pi_1(\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus R_f, w^*) = \langle l_0, l_1, l_2 \mid l_0 l_1 l_2 = id \rangle.$$

Asignamos el color rojo a l_0 , naranja a l_1 y verde a l_2 . El levantamiento de cada generador de $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus R_f, w^*)$ consta de 3 curvas (heredando el color), justo como se muestra en la Figura 4.1. Las permutaciones determinadas por los generadores del grupo $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus R_f, w^*)$ son las siguientes.

$$\begin{aligned} l_0 &\mapsto \sigma_0 = (1, 3, 2), \\ l_1 &\mapsto \sigma_1 = (2, 3), \\ l_2 &\mapsto \sigma_2 = (1, 2). \end{aligned}$$

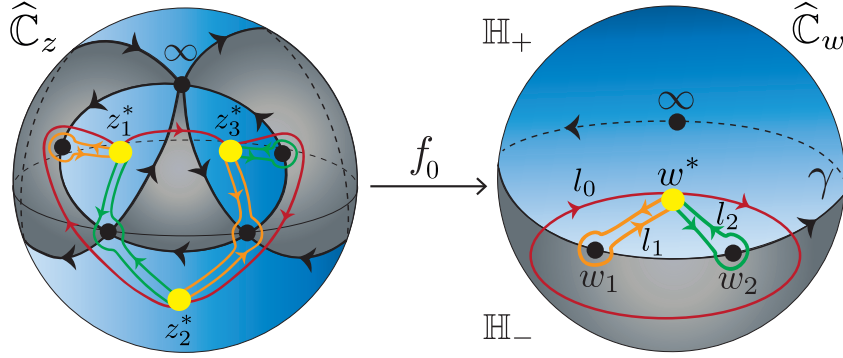


Figura 4.1: Constelación $\mathcal{C}_3^3 = [(1, 3, 2), (2, 3), (1, 2)]$ determinada por $f_0(z) = z^3 - 3z$.

Por lo tanto, la 3-constelación determinada por f_0 es

$$\mathcal{C}_3^3 = [(1, 3, 2), (2, 3), (1, 2)].$$

Las particiones determinadas por cada permutación de $\mathcal{C}_3^3 = [(1, 3, 2), (2, 3), (1, 2)]$ son

$$\begin{aligned} P_0 &\mapsto [3], \\ P_1 &\mapsto [2, 1], \\ P_2 &\mapsto [2, 1], \end{aligned}$$

lo que implica que el pasaporte asociado a la constelación $\mathcal{C}_3^3 = [(1, 3, 2), (2, 3), (1, 2)]$ es

$$\mathbf{P}_3^3 = [[3], [2, 1], [2, 1]].$$

Observación 4.1.4. Es indispensable recalcar que el pasaporte de una k -constelación $\mathcal{C}_k^n$ codifica totalmente la función racional g . En efecto, esto se concluye de los siguientes hechos.

1. El grado n de la constelación coincide con el grado n de la función racional g .
2. La longitud k de la constelación indica el número de valores de ramificación que debe tener g .
3. Para cada permutación $\sigma_j \in \mathcal{C}_k^n$, el número de ciclos de longitud mayor o igual a dos es igual al número de puntos críticos, que bajo g , van a dar al valor de ramificación correspondiente a σ_j .
4. Para cada permutación $\sigma_j \in \mathcal{C}_k^n$, cada ciclo de σ_j de longitud $\nu + 1$ corresponde a un punto crítico con índice de ramificación ν .

Observación 4.1.5. Los pasaportes asociados a las funciones racionales $g : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 3$, determinan la topología de las gráficas planas orientadas $\{\Gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_z\}$ (o equivalentemente los mosaicos $\{\mathfrak{M}_\Gamma\}$ de $\widehat{\mathbb{C}}_z$), asociadas a las funciones racionales, a través del algoritmo de F. Klein.

En el caso específico de los polinomios genéricos de grado $n \geq 3$, todas las constelaciones asociadas tienen la forma

$$\mathcal{C}_n^n = [\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}],$$

donde la permutación σ_0 tiene longitud máxima n (asociada a ∞ , cuyo índice de ramificación es $(n - 1)$) y las permutaciones restantes $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ tienen longitud 2 (transposiciones asociadas

a los $n - 1$ puntos críticos finitos, cuyo índice de ramificación es 1). Por todo lo dicho, la forma de los pasaportes que son realizables por polinomios genéricos, de grado $n \geq 3$, tienen la forma

$$\mathbf{P}_n^n = [[n], \underbrace{[2, 1], \dots, [2, 1]}_{n-1 \text{ veces}}]. \quad (4.1)$$

Existe una correspondencia entre las clases de equivalencia por la izquierda de polinomios genéricos $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ de grado $n \geq 3$ y las clases de conjugación de las constelaciones determinadas por estos polinomios, descritas en la Observación 4.1.5.

Proposición 4.1.2. *Dos polinomios genéricos $f_1 : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ y $f_2 : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 3$, con valores de ramificación $R = \{\infty, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ son equivalentes por la izquierda si y sólo si las correspondientes constelaciones $\mathcal{C}_n^n(1)$ y $\mathcal{C}_n^n(2)$ son conjugadas.* $\square$

4.2. Aplicación de Lyashko–Looijenga.

S. Lyashko [5] y E. Looijenga [26] construyen una aplicación para entender la naturaleza algebraica y geométrica del espacio de polinomios genéricos. Dicha aplicación es llamada *aplicación de Lyashko–Looijenga*, denotada LL , envía los coeficientes de un polinomio genérico $f \in \mathbb{C}[z]_{=n}$ en sus valores de ramificación. S. Lando y A. Avonkin en [24, Capítulo 5] dan una descripción detallada de la aplicación LL . A grandes rasgos esta aplicación se define de la siguiente manera.

Construyendo el dominio de LL .

Dado cualquier polinomio genérico $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 2$, podemos elegir coordenadas tal que f toma la forma

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w : f(z) = z^n + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n. \quad (4.2)$$

Consideremos el espacio de polinomios genéricos, asumiendo el sistema coordenado de (4.2), y asumamos la siguiente notación

$$\mathcal{G}_n = \{f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w : f(z) = z^n + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n \text{ es genérico}\}. \quad (4.3)$$

El espacio $\mathcal{G}_n$ está identificado de manera natural con $\mathbb{C}_{coef}^{n-1}$ (los coeficientes de cada polinomio $f \in \mathcal{G}_n$ determinan un punto en $\mathbb{C}_{coef}^{n-1}$). Cada clase del espacio de polinomios genéricos, con la equivalencia por la izquierda dada en la Definición 3.3.1, se representa exactamente n veces en $\mathcal{G}_n$. En efecto, el único cambio de coordenadas que lleva los coeficientes de un polinomio genérico en otro, preservando (4.2), es $z \longmapsto \alpha z$, donde α es una raíz n -ésima de la unidad. Por lo tanto, el espacio de polinomios genéricos de grado n es el espacio $\mathcal{G}_n$, módulo la acción del grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, como se señala en la siguiente definición.

Definición 4.2.1. Dos polinomios genéricos mónicos

$$f_1 : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad f_1(z) = z^n + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

y

$$f_2 : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad f_2(z) = z^n + b_2 z^{n-2} + \dots + b_{n-1} z + b_n.$$

son *equivalentes* si podemos enviar f_1 en f_2 haciendo el cambio de coordenadas

$$\mathcal{U} : \mathbb{C}_{coef}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}_{coef}^{n-1}, \quad (a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \longmapsto (\varepsilon_n^{-2}a_2, \varepsilon_n^{-3}a_3, \dots, \varepsilon_n^{-n+1}a_{n-1}, a_n),$$

tal que $(b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n) = (\varepsilon_n^{-2}a_2, \varepsilon_n^{-3}a_3, \dots, \varepsilon_n^{-n+1}a_{n-1}, a_n)$ y ε_n es una raíz enésima de la unidad.

Construyendo el contradominio de LL .

Cada conjunto no ordenado de $n - 1$ números complejos finitos distintos $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$ está en correspondencia 1 – 1 con un polinomio mónico de grado $n - 1$ con todas sus raíces distintas, en efecto, asociamos al conjunto $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$ el polinomio

$$d(w) = w^{n-1} + b_1w^{n-2} + \dots + b_{n-1} = (w - w_1)(w - w_2) \cdots (w - w_{n-1}). \quad (4.4)$$

Este espacio está identificado de manera natural con $\mathbb{C}_{ramif}^{n-1} \setminus \Delta$, módulo la acción del grupo S_{n-1} .

Dados los dos espacios $\mathbb{C}_{coef}^{n-1}$ y $\mathbb{C}_{ramif}^{n-1} \setminus \Delta$ podemos enunciar el Teorema de la aplicación de Lyashko–Looijenga.

Teorema 4.2.1. *La aplicación Lyashko–Looijenga es la aplicación polinomial*

$$\begin{aligned} LL : \mathbb{C}_{coef}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{C}_{ramif}^{n-1} \setminus \Delta \\ f &\longmapsto c(\text{discr}_z(f(z) - w)), \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde el factor constante c se elige de tal manera que la imagen de f bajo LL es un polinomio mónico. El grado de LL es n^{n-2} .

Esta aplicación es un cubriente de grado n^{n-2} , sin embargo cada clase izquierda, del espacio de polinomios genéricos está representado en el espacio de coeficientes $\mathbb{C}_{coef}^{n-1}$, n veces.

A continuación calculamos la fibra de la aplicación LL para $n = 4$. Observaremos que cada clase izquierda, determina un único par $(\Gamma, \mathcal{L})$ (o equivalentemente $(\mathfrak{M}_\Gamma, \mathcal{L})$), donde Γ es una gráfica plana (o equivalentemente un mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$), realizable por los polinomios de la clase correspondiente, y $\mathcal{L}$ su etiquetado realizable.

Ejemplo 4.2.1. La expresión explícita de la Aplicación LL para el espacio de polinomios genéricos $\mathcal{G}_4$, de grado $n = 4$ es

$$\begin{aligned} LL : f(z) = z^4 + a_2z^2 + a_3z + a_4 &\longmapsto -\frac{1}{256}\text{discr}_z(f(z) - w) \\ &= w^3 + \left(\frac{1}{2}a_2^2 - 3a_4\right)w^2 + \left(\frac{1}{16}a_2^4 - a_2^2a_4 + \frac{9}{16}a_2a_3^2 + 3a_4^2\right)w \\ &\quad - \frac{1}{16}a_2^4a_4 + \frac{1}{64}a_2^3a_3^2 + \frac{1}{2}a_2^2a_4^2 - \frac{9}{16}a_2a_3^2a_4 + \frac{27}{256}a_3^4 - a_4^3. \end{aligned}$$

Consideremos un punto $(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}_{ramif}^3$ tal que $\{w_1, w_2, w_3\} \subset \mathbb{R}$ y $w_1 < w_2 < w_3$. Al calcular la fibra de (w_1, w_2, w_3) , bajo la Aplicación LL , identificamos las cuatro clases de equivalencia para $\mathcal{G}_4$. Para cada $j = 1, 2, 3, 4$, tomamos un polinomio representante de cada clase

$f_j : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ y construimos el mosaico (a la F. Klein) $\mathfrak{M}_{f_j^{-1}(\gamma)}$, asociada a dicha clase, como se muestra en la Figura 4.2(a)–(d). Nos gustaría destacar que siempre consideramos el mosaico $\mathfrak{M}_\gamma = \overline{\mathbb{H}}_+ \cup \overline{\mathbb{H}}_-$ en la esfera contradominio $\widehat{\mathbb{C}}_w$, donde $\gamma = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, tal como se aprecia en la Figura 4.2(e).

Ahora, el pasaporte que caracteriza el espacio de polinomios genéricos $\mathcal{G}_4$ es de la forma

$$\mathbf{P}_4^4 = [[4], [2, 1], [2, 1], [2, 1]].$$

Notemos que la primera partición de $\mathbf{P}_4^4$ le permite al punto ∞ entrar en juego.

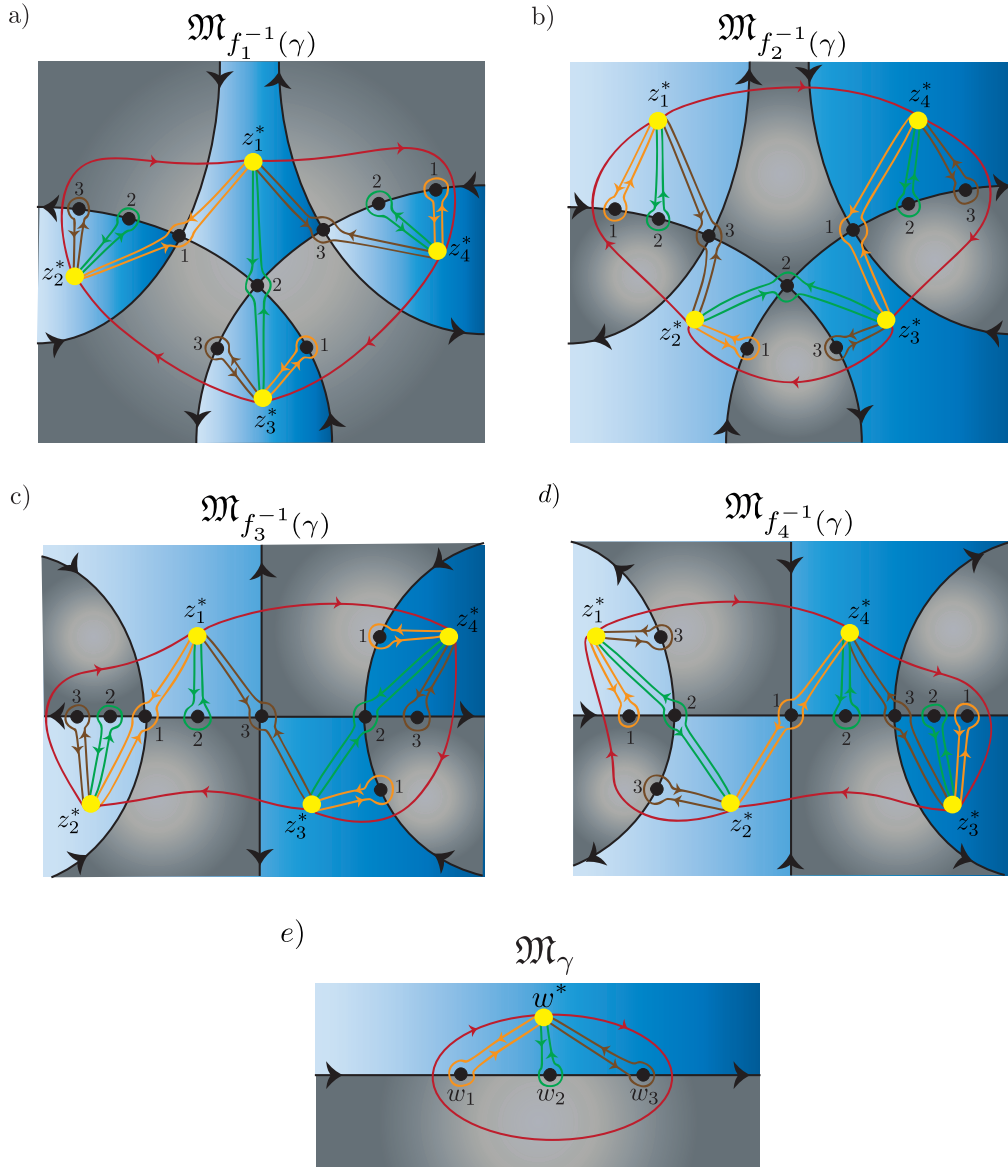


Figura 4.2: Constelaciones correspondientes a las clases de equivalencia por la izquierda del espacio de polinomios genéricos de grado 4.

Para cada $j = 1, \dots, 4$, aplicamos el algoritmo para la construcción de una constelación $\mathcal{C}_4^4(j) = [\sigma_{0j}, \sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \sigma_{3j}]$, a partir de f_j , como se ilustra en los mosaicos de la Figura 4.2(a)–(d). Las constelaciones resultantes son

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_4^4(1) &= [(1, 4, 3, 2), (1, 2), (1, 3), (1, 4)], & \mathcal{C}_4^4(3) &= [(1, 4, 3, 2), (1, 2), (3, 4), (1, 3)], \\ \mathcal{C}_4^4(2) &= [(1, 4, 3, 2), (3, 4), (2, 3), (1, 2)], & \mathcal{C}_4^4(4) &= [(1, 4, 3, 2), (2, 4), (1, 2), (3, 4)]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Es un ejercicio sencillo ver que efectivamente las constelaciones en (4.6) no son conjugadas entre ellas. Esto es consecuencia de los siguientes hechos:

1. cada constelación $\mathcal{C}_4^4(j)$ genera el grupo S_4 y
2. para $j = 1, \dots, 4$, la permutación $\sigma_{0j} \in \mathcal{C}_4^4(j)$, es $(1, 4, 3, 2)$.

Por lo tanto, basta verificar que las permutaciones en S_4 , que bajo conjugación, fijan la permutación $(1, 4, 3, 2)$ no conjugan las constelaciones en (4.6). Las permutaciones de interés son:

$$\begin{aligned} h_1 &= (1, 2, 3, 4), & h_3 &= (1, 4, 3), & h_5 &= (1, 3)(2, 4), \\ h_2 &= (1, 4, 3, 2), & h_4 &= (1, 2, 4), \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para $s = 1, \dots, 4$ y $j = 1, 2, 3$ se satisface lo siguiente

$$\begin{aligned} h_s^{-1} \sigma_{11} h_s &\neq \sigma_{1j}, \\ h_s^{-1} \sigma_{12} h_s &\neq \sigma_{14}. \end{aligned}$$

Razón por la cual las permutaciones $h_1, \dots, h_4$ no conjugan ninguna constelación en (4.6). Finalmente, dado que

$$\begin{aligned} h_5^{-1} \sigma_{21} h_5 &\neq \sigma_{1j}, \quad \text{para } j = 2, 3, 4, \\ h_5^{-1} \sigma_{22} h_5 &\neq \sigma_{2j}, \quad \text{para } j = 3, 4, \\ h_5^{-1} \sigma_{13} h_5 &\neq \sigma_{14}, \end{aligned}$$

la permutación h_5 tampoco conjugan las constelaciones en (4.6).

Capítulo 5

Enfoques futuros

5.1. Enfoques topológicos.

Consideremos nuevamente el espacio de polinomios genéricos

$$\mathcal{G}_n \doteq \{f \in \mathbb{C}[z]_{=n} \mid f \text{ es genérico}\}. \quad (5.1)$$

El espacio $\mathcal{G}_n$ es abierto y denso en $\mathbb{C}^n$. Sin embargo, hay gran dificultad al determinar su grupo fundamental. Con el fin de parametrizar el espacio $\mathcal{G}_n$ consideremos el espacio de puntos críticos de los polinomios en $\mathcal{G}_n$, denotado como sigue

$$(\mathbb{C}_{crit}^{n-1} \setminus \Delta) / S_n = \{[(z_1, \dots, z_{n-1})] \mid z_i \neq z_j \text{ para } i \neq j\}.$$

Recordemos que un polinomio genérico f tiene $n-1$ valores de ramificación finitos distintos. Por tal motivo, consideramos el espacio

$$\mathcal{G}_n = \mathcal{D}_n = \left\{ f(z) = \lambda \int_z \prod_{j=1}^{n-1} (\zeta - z_j) d\zeta + c \mid \forall i \neq j \quad f(z_i) \neq f(z_j), \quad c \in \mathbb{C}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

De hecho, es conveniente recordar el trabajo de G. Katz [21] donde expone la estratificación $\mathcal{E}$, nada trivial, de los subconjuntos de $\mathbb{C}[z]_{\leq n}$ de polinomios de grado fijo $k \leq (n-1)$, con raíces múltiples. El problema de encontrar polinomios con valores de ramificación predeterminados es abordado por J. Mycielski en [34]. Un problema a tratar es el siguiente.

Problema 5.1.1. Calcular el grupo fundamental del espacio de polinomios genéricos.

• • •

Las familias de objetos analítico complejos, sobre una variedad compacta, son “variedades de dimensión finita” si acotamos el número de ceros y polos. Por ejemplo, fijar el número de ceros determina un espacio de polinomios de dimensión finita, análogamente fijar el número de polos determinamos un espacio de funciones racionales. Para estudiar cada una de estas familias es natural aplicar el siguiente método.

1. Dividir en sub-familias mediante invariantes topológicos adecuados.
2. Estudiar las propiedades analíticas de cada sub-familia, fijando dichos invariantes topológicos.

Ejemplo 5.1.1. Un caso clásico del método anterior son las superficies de Riemann compactas. Las sub-familias están determinadas por el género $g \in \{0, 1, 2, \dots\}$ y las propiedades analíticas de cada sub-familia se estudian mediante los espacios moduli y Teichmüller.

L. V. Ahlfors en [2, Capítulo 7], expone claramente y con detalle el caso $g = 1$; que corresponde a la teoría de funciones elípticas. D. Mumford en su libro *Curves and Their Jacobians* [33] expone los casos $g \geq 2$.

Consideramos el espacio de polinomios complejos

$$\mathbb{C}[z]_{=n} = \{f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \mid f \text{ es de grado } n\}.$$

Algunos de los invariantes topológicos para $f \in \mathbb{C}[z]_{=n}$ son los siguientes, considerando la equivalencia por la izquierda, descrita en la Definición 3.3.1.

- i) n , el grado de f .
- ii) $m + 1$, el número de puntos críticos $C_f = \{\infty, z_1, \dots, z_m\}$ de f .
- iii) $k + 1$, el número de valores de ramificación $R_f = \{\infty, w_1, \dots, w_k\}$ de f .
- iv) El conjunto (no ordenado) de índices de ramificación $\{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_m, n - 1\}$ de los puntos críticos C_f de f .
- v) La monodromía de f

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \pi_1(\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus R_f, w^*) & \longrightarrow & G \leq S_n \\ [l_j] & \longmapsto & \sigma_j, \end{array}$$

donde w^* es un valor regular de f y G es el subgrupo del simétrico S_n , actuando sobre la fibra $f^{-1}(w^*)$.

Al fijar el grado y considerar cualquier combinación $\mathcal{J}$ de los invariantes topológicos (ii)–(v), obtenemos una familia de polinomios en $\mathbb{C}[z]_{=n}$. La pregunta que nos gustaría abordar es

- Problema 5.1.2.**
1. ¿La familia determinada por $\mathcal{J}$ es una variedad analítico compleja/real $\mathcal{M}$?
 2. En caso de ser afirmativa la respuesta anterior, ¿cómo es la variedad analítico compleja/real $\mathcal{M}$ determinada por $\mathcal{J}$?
 3. ¿Es $\mathcal{M}$ arco conexa?
 4. ¿Cómo es el grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{M})$?

Por ejemplo, consideremos $\mathcal{J}$ igual al grado fijo, el número de puntos críticos fijo y el número de valores de ramificación fijo. Estos invariantes generan una estratificación por familias del espacio de polinomios $\mathbb{C}[z]_{=n}$. Abordar el Problema 5.1.2 en este caso es interesante.

• • •

El Teorema 3.1.2 da una caracterización de las gráficas planas $\{\Gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_z\}$ que determinan polinomios genéricos; ver [15]. Un objetivo natural es generalizar el teorema para todo el espacio de polinomios. En esa medida, la pregunta que me interesa es la siguiente.

Problema 5.1.3. Caracterizar los mosaicos $\mathfrak{M}_\Gamma$ (o equivalentemente gráficas planas Γ) que provienen de un polinomio f y una curva de Jordan orientada que pasa por los valores de ramificación de f .

Conjeturamos el siguiente resultado, aunque para él, ya no podemos seguir la demostración del Teorema 3.1.2. En este caso usar gráficas bipartitas para caracterizar los mosaicos puede ser de gran utilidad.

Conjetura 5.1.1. Una gráfica plana, orientada y conexa Γ con un vértice de valencia $2n$ ($n \geq 3$) en ∞ y $m \leq (n-1)$ vértices finitos de valencias

$$\{2(\nu_1 + 1), \dots, 2(\nu_j + 1), \dots, 2(\nu_m + 1)\},$$

respectivamente, tal que la sucesión $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ es una partición entera de $n-1$, es igual a $f^{-1}(\gamma)$ (omitendo los vértices de valencia 2) para algún polinomio $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 3$, con m puntos críticos finitos, con multiplicidades $\{\nu_1, \dots, \nu_j, \dots, \nu_m\}$, y una curva de Jordan orientada $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ que pasan por los $m+1$ valores de ramificación de f , incluyendo a ∞ , sí y sólo si

- a) la frontera de cada componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$ es una curva de Jordan orientada;
- b) para una coloración alterna azul-gris de las caras de $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$, hay n caras grises, n caras azules.

• • •

Existen dos nociones de equivalencia entre cubrientes ramificados de la esfera (en particular el espacio de polinomios genéricos). La equivalencia por la izquierda, descrita en la Definición 3.3.1 y una *equivalencia derecha-izquierda* descrita por el diagrama cuadrangular conmutativo señalado abajo.

Definición 5.1.1. Dos polinomios $f_1 : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ y $f_2 : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 3$, con valores de ramificación R_{f_1} y R_{f_2} , respectivamente, son *equivalentes derecha-izquierda* si existen homeomorfismos que preservan orientación $\phi_1 : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_z$ y $\phi_2 : \widehat{\mathbb{C}}_w \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{C}}_z & \xrightarrow{\phi_1} & \widehat{\mathbb{C}}_z \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ \widehat{\mathbb{C}}_w & \xrightarrow{\phi_2} & \widehat{\mathbb{C}}_w \end{array}$$

y ϕ_2 envía los valores de ramificación R_{f_1} de f_1 en los valores de ramificación R_{f_2} de f_2 .

Bajo esta equivalencia estoy interesada en abordar el problema siguiente.

Problema 5.1.4. Encontrar una clasificación y enumeración del espacio de polinomios. En particular, en el espacio de polinomios genéricos.

A mi parecer, el problema de clasificación derecha–izquierda de los cubrientes ramificados parece ser mucho más difícil. Algunas herramientas para abordar este problema se pueden encontrar en algunos trabajos de S. K. Lando y A. K. Zvonkin [24, Capítulo 5], [23]. En esta clasificación, las clases de equivalencia son órbitas de la acción del grupo de trenzas en las clases de isomorfismo de las constelaciones; ver Definición 4.1.1.

5.2. Enfoques combinatorios.

Como habíamos mencionado anteriormente, para cada $f \in \mathbb{C}[z]_{=n}$, la combinatoria de los pasaportes considerados por A. Hurwitz determina la topología de la gráfica Γ , asociado a f , siguiendo el algoritmo de F. Klein. Teniendo este panorama en mente y considerando el espacio de pares $\{(\Gamma, \mathcal{L})\}$ con Γ una gráfica plana y $\mathcal{L}$ un etiquetado realizable para Γ , es natural preguntarse.

Problema 5.2.1. ¿Cuál es el número de clases de equivalencia por la izquierda del espacio de polinomios $\mathbb{C}[z]_{=n}$? o dicho en el lenguaje de A. Hurwitz, ¿cuál es el número de clases de conjugación de constelaciones determinadas por un pasaporte dado?

5.3. Enfoques analíticos.

Consideremos las siguientes acciones sobre el espacio de polinomios complejos $\mathbb{C}[z]_{=n}$, de grado n .

i) Acción por conjugación.

$$\begin{aligned} \phi_1 : \quad & Aff(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}[z]_{=n} \longrightarrow \mathbb{C}[z]_{=n} \\ & (T, f) \longmapsto T^{-1} \circ f \circ T. \end{aligned}$$

ii) Acción izquierda–derecha.

$$\begin{aligned} \phi_2 : \quad & (Aff(\mathbb{C}))^2 \times \mathbb{C}[z]_{=n} \longrightarrow \mathbb{C}[z]_{=n} \\ & (T_1, T_2, f) \longmapsto T_2^{-1} \circ f \circ T_1. \end{aligned}$$

Problema 5.3.1. Determinar la estructura analítica de cada uno de estos espacios cociente, antes mencionados.

Una respuesta parcial fue dada por J. Milnor y T. Lei en [30]. Ellos realizaron un estudio detallado de la acción ϕ_1 , para las funciones racionales $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n = 2$.

Bibliografía

- [1] L. V. Ahlfors, *Conformal invariants: topics in geometric function theory*. McGraw Hill Book Company, New York, 1973.
- [2] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*. 2nd Edition, McGraw Hill Book Company, New York, 1966.
- [3] A. Alvarez-Parrilla, A. Gómez-Arciga, A. Riesgo-Tirado, *Newton vector fields on the plane and on the tours*, Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 54 No. 5 (2009) 449–461.
- [4] A. Alvarez-Parrilla, J. Muciño-Raymundo, *Dynamics of singular complex analytic vector fields with essential singularities I*. Conform. Geom. Dyn. **21** (2017), 126–224. doi:10.1090/ecgd/306
- [5] V. I. Arnold, *Critical points of functions and the classification of caustics*. Russ. Math. Surveys. **29** (1974), 243–244.
- [6] K. Barański, *On realizability of branched coverings of the sphere*. Tol. Appl. **116** (2017), no 3, 279–291.
- [7] G. V. Belyĭ, *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field*. Math. USSR Izvestija **193** (1980), no 14, 247–256.
- [8] W. Bergweiler, A. Eremenko, *On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order*. Rev. Mat. Iberoamericana **11** (1995), no 2, 355–372. doi:10.4171/RMI/176. MR1344897
- [9] W. M. Boothby, *The topology of the level curves of harmonic functions with critical points*. Amer. J. Math. **73** (1951), no. 3, 512–538. doi:10.2307/2372305
- [10] W. M. Boothby, *The topology of regular curve families with multiple saddle points*. Amer. J. Math. **73** (1951), no. 2, 405–438. doi:10.2307/2372185
- [11] E. Chislenko, Y. Tschinkel, *The Felix Klein Protocols*. Notices of the AMS (2007), 961–970.
- [12] P. G. Doyle, *Random walk on the Speiser graph of a Riemann surface*. Bull. Amer. Math. Soc. N.S. **11** (1984), 371–377. doi:10.1090/S0273-0979-1984-15315-1
- [13] G. Elfving, *Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung*. Acta Soc. Sci. Fennicae, N.S. 2, Nr. **3** (1934), 1–60.
- [14] P. A. Griffiths, *Introduction to algebraic curves*. Vol. 76, American Mathematical Society, Rhode Island, 1989.
- [15] L. J. González Cely, *An equivalence between complex polynomials, topological graphs and tilings.*, Preprint, 2018.
- [16] L. J. González Cely, J. Muciño-Raymundo, *A relation between tilings and complex analitic functions on Riemann surfaces.*, Artículo en preparación, 2018.
- [17] F. Harary, *Graph theory*. Addison-Wesley Publishing Co, London, 1969.
- [18] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, New York, 2002.
- [19] E. Hille, *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*. Dover Publications, Mineola NY, 1997.
- [20] A. Hurwitz, *Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*. Math. Ann. **39** (1891), no 1, 1–60.

- [21] G. Katz, *How tangents solve algebraic equations, or a remarkable geometry of discriminant varieties*. Expo. Math. **21** (2003), no. 3, 219–261.
- [22] S. Koch, T. Lei, *On balanced planar graphs, following W. Thurston*, Preprint, 2015.
- [23] S. K. Lando, *Ramified coverings of the two-dimensional sphere and the intersection theory in spaces of meromorphic functions on algebraic curves*. Russ. Math. Surv. **57** (2002), no. 3, 463–533. doi:10.1070/RM2002v057n03ABEH000511
- [24] S. K. Lando, A. K. Zvonkin, *Graphs on Surfaces and their Applications*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 141. Low-Dimensional Topology, II. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [25] J. C. Langer, *Plotting the polyhedral geometry of a quadratic differential*. J. Geom. **108** (2017), no. 3, 837–849. doi:10.1007/s00022-017-0378-y
- [26] E. Looijenga, *The complement of the bifurcation variety of a simple singularity*. Inv. Math. **23** (1974), 105–116.
- [27] D. Masoero, *Painleve I, coverings of the sphere and Belyi functions*. Constr. Approx. **39** (2014), no. 1, 43–74. doi:10.1007/s00365-013-9185-3
- [28] C. T. McMullen, *Billiards, quadrilaterals and moduli spaces*. Yoccoz Memorial Conference, Paris (2017).
- [29] S. A. Merenkov, *Determining biholomorphic type of a manifold using combinatorial and algebraic structures*. Thesis (Ph.D.)–Purdue University. (2003), ISBN: 978-0496-61336-6. MR2705430
- [30] J. Milnor, *Geometry and dynamics of quadratic rational maps, with an appendix by the author and Lei Tan*. Exp. Math. (1993)
- [31] J. Muciño-Raymundo, *Complex structures adapted to smooth vector fields*. Math. Ann. **322** (2002), no. 2, 229–265. doi:10.1007/S002080100206. MR1893915
- [32] J. Muciño-Raymundo, C. Valero-Valdéz, *Bifurcations of meromorphic vector fields on the Riemann sphere*. Ergodic Theory Dynam. Systems **15** (1995), no. 6, 1211–1222. doi:10.1017/S0143385700009883. MR1366317
- [33] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*. 2nd edn. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [34] J. Mycielski, *Mathematical notes: Polynomials with Preassigned Values at their Branching Points*. Amer. Math. Monthly **77** (1970), no. 8, 853–855.
- [35] R. Nevanlinna, *Analytic Functions*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 162, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1970.
- [36] R. Nevanlinna, *Über Riemannsche flächen mit endlich vielen windungspunkten*, Acta Math. **58**, 1 (1932) 295–373.
- [37] B. Riemann, *Collected Papers*. Kendrick Press, Heber City, 2004. MR2121437
- [38] H. A. Schwarz, *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt*. J. Reine Angew. Math. **75** (1873), 292–335.
- [39] A. Speiser, *Über Riemannsche Flächen*. Comment. Math. Helv. **2** (1930), no. 1, 284–293. doi:10.1007/BF01214465. MR1509419.
- [40] K. Strebel, *Quadratic Differentials*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1984. MR743423
- [41] J. Tomasini, *Realizations of branched self-coverings of the 2-sphere*. Topology and its Applications **196** (2015), 31–53. doi:10.1016/j.topol.2015.08.017