Los Grupos de Difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$

Dr. Jesús Muciño Raymundo
Profesor-Investigador del Centro en Ciencias Matemáticas, UNAM-Morelia

RESUMEN. Los números cuentan, los grupos miden la simetría de un objeto. Nuestros objetos son los espacio $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$. ¿Cómo son sus grupos de difeomorfismos polinomiales, *i.e.* sus simetrías polinomiales? Los difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) son ingredientes primordiales en situaciones geométricas elementales. Una dicotomía aparece; a veces los difeomorfismos son un lenguaje formal que nos permite enunciar resultados, otras veces hallarlos explícitamente resulta de máximo interés. Para $n \geq 2$, el grupo difeomorfismos polinomiales de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) es enorme, es de "dimension infinita". Bosquejamos el problema abierto de la conjetura Jacobiana para esos grupos.

1. Isomorfismos

Entre otras cosas, las matemáticas construyen modelos de las ciencias naturales y sociales, e incluso (tautológicamente) modelos de objetos emanados de ellas mismas. El ejemplo Neanderthal son los números naturales $\mathbb{N}$; ellos son la herramienta elemental para cuantificar. Es usual decir que:

Dos objetos matemáticos son esencialmente el mismo cuando son iguales salvo *isomorfismo*.

Por ejemplo, hay distintas formas de escribir los números naturales $\mathbb{N}$ y sus operaciones; arábiga, decimal, china, maya, binaria, etc. Todas ellas determinan un solo objeto $\mathbb{N}$, salvo isomorfismo.
A priori, el determinar la existencia de un isomorfismo entre dos objetos puede ser altamente no trivial. En efecto, recordemos la tarea de describir todas las parejas $\{p/q\} \subset \mathbb{Q}$ que determinan un mismo número racional y seleccionar un representante canónico en cada clase. Esta tarea nos permite vislumbrar el lugar privilegiado de los números primos en las matemáticas.
Dados un objeto matemático O, la pregunta ¿de cuántas maneras podemos escribirlo? da origen a la noción de *automorfismo*

$$a : O \longrightarrow O$$

de dicho objeto.
Evidentemente todos los automorfismos $\{a\}$ de un objeto O forman un *grupo* G bajo la composición.
El inverso es cierto; todo grupo abstracto G aparece como el grupo de automorfismos de un objeto O. Por ejemplo ver V. I. Arnold [1].

Tenemos tres conceptos:

isomorfismo, automorfismo, grupo.

Recordando nuestros primeros cursos de cálculo, consideramos una clase de diferenciabilidad $r \in \{1, 2, \dots, \infty\}$ fija y dos abiertos U, V de $\mathbb{R}^m$. La amalgama de isomorfismo con diferenciabilidad nos proporciona la siguiente:

Definición. Un *difeomorfismo* entre los abiertos U y V, de clase C^r, es una aplicación

$$\phi : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$$

tal que
i) ϕ es biyección,
ii) ϕ es de clase C^r,
iii) ϕ^{-1} es también de clase C^r.

En este trabajo, los conceptos de difeomorfismo y *cambio de coordenadas* son sinónimos.
Para $U \neq V$, un difeomorfismo ϕ es un isomorfismo diferenciable entre U y V.
Para $U = V$, un difeomorfismo ϕ es un automorfismo diferenciable de U.

2. Los difeomorfismos son útiles.

2.1. Clasificación de curvas planas salvo automorfismos afines.

Recordemos nuestro primer curso de geometría analítica. El grupo de difeomorfismos o cambios de coordenadas lineales de $\mathbb{R}^n$ es

$$GL(m, \mathbb{R}) = \{L : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid \text{ lineal e invertible}\}.$$

Adicionalmente, el grupo de los difeomorfismos afines tiene como elementos a las composiciones de transformaciones lineales con translaciones,

$$GL(m,\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^m = \{\phi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid \overline{x} \longmapsto L(\overline{x}) + \overline{b}\ \}.$$

Él es un producto semidirecto $\rtimes$ del grupo general lineal y el grupo de translaciones; no es un grupo abeliano.
Por otra parte, una cónica en $\mathbb{R}^2$ es un conjunto de la forma

$$\{(x,y) \mid a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0,$$
$$(a_1,a_2,a_3) \neq \overline{0}\ \} \subset \mathbb{R}^2.$$

La clasificación de cónicas salvo difeomorfismos afines es el espacio cociente

$$\frac{\text{cónicas en } \mathbb{R}^2}{GL(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^2}.$$

Dos cónicas están en la misma clase de equivalencia si existe una transformación afín que lleva una en otra. Este espacio consiste de ocho clases de equivalencia

un círculo	$x^2 + y^2 = 1$
una hipérbola	$x^2 - y^2 = 1$
una parábola	$y - x^2 = 0$
dos rectas que se cruzan	$xy = 0$
dos rectas paralelas	$x^2 - 1 = 0$
una recta doble	$x^2 = 0$
un punto	$x^2 + y^2 = 0$
el vacío	$x^2 + y^2 = -1.$

En palabras el resultado es; hay ocho cónicas salvo difemorfismo afín, *i.e.* cada cónica puede transformarse en una y solo una cónica de la lista bajo un difeomorfismo afín ϕ adecuado.
Un problema muy interesante, cuyo estudio fue iniciado I. Newton, es el caso de cúbicas.

¿Cuántas clases $\frac{\text{cúbicas en } \mathbb{R}^2}{GL(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^2}$ hay?

El lector queda invitado a buscar la respuesta en la literatura.

2.2. Difeomorfismos entre abiertos del plano.

Recordemos nuestro primer curso de topología. La figura 2 ilustra tres abiertos de $\mathbb{R}^2$ tales que existen cambios de coordenadas $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ entre ellos.
Los tres abiertos en la figura son difeomorfos, *i.e.* existen difeomorfismos ϕ que transforman uno a otro. Esta idea geométrica ha sido usada para la clasificación de las formas de los seres vivos. En ese estudio la diversidad de formas geométricas, salvo difeomorfismo C^1 es importante. Ver [18], [19].

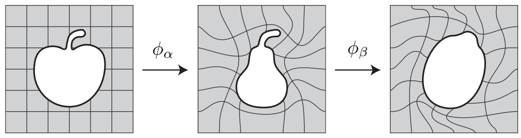

Fig 1. Tres figuras en el plano $\mathbb{R}^2$ y difeomorfismos ϕ_α, ϕ_β entre ellas.

2.3. Solución de polinomios.

Recordemos nuestro primer curso de álgebra. La aplicación de Vièta (de grado dos) envía dos puntos z_1, z_2 en los coeficientes "b, c" del polinomio mónico de grado dos que tiene a dichos puntos como raíces. Esto es

$$(z_1, z_2) \longmapsto z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2 = z^2 + bz + c$$

Ver figura 2.

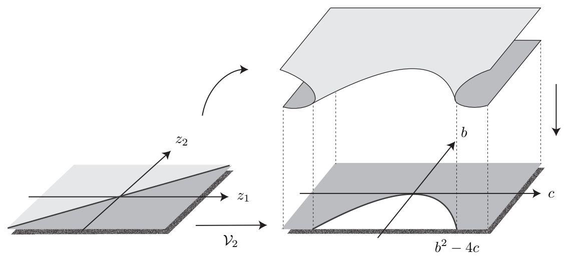

Fig 2. La aplicación de Vièta envía raíces a coeficientes.

En el caso general, consideramos $\mathbb{C}[z]_{=n}$ el espacio de polinomios de una variable compleja con grado exactamente $n \geq 2$. La aplicación de Vièta $\mathcal{V}_n$ envia un coeficiente lider c_n y un conjunto de n puntos sin orden y quizá con repeticiones $\{z_1, \ldots, z_n\}$, en los coeficientes del polinomio de grado n con esos puntos como raíces y c_n como coeficiente lider. Esto es

$$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}^* \times \frac{\mathbb{C}^n}{Sim(n)} \quad \underset{\xleftarrow{\mathcal{V}_n^{-1}}}{\xrightarrow{\mathcal{V}_n}} \quad \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{c_n = 0\}$$

$$\begin{aligned} (c_n, z_1, \ldots, z_n) &\longmapsto (c_n, [z_1, \ldots, z_n]) \longmapsto (c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0) \\ &= (c_n, -c_n(z_1 + \ldots + z_n), \ldots, (-1)^n c_0(z_1 \cdots z_n)) \\ &= c_n(z - z_1) \cdots (z - z_n) = c_nz^n + \ldots + (-1)^n c_0(z_1 \cdots z_n). \end{aligned}$$

Donde $Sim(n)$ es el grupo de permutaciones de n elementos y [] denota la clase salvo permutaciones. Partiendo del coeficiente lider y las raíces con orden

$$(c_n, z_1, \ldots, z_n)$$

obtenemos: el polinomio con raíces sin orden,

$$c(z - z_1) \cdots (z - z_n) = c_nz^n + \ldots + c_1z + c_0.$$

Es interesante preguntar, si los coeficientes de un polinomio dependen diferenciablemente de las raíces. Inversamente,

¿las raíces dependen diferenciablemente de los coeficientes? ($\star$)

El concepto de difeomorfismo es el lenguaje natural para ambas cuestiones.

Teorema. 1. Para cada bola abierta U suficientemente pequeña tal que no intersecta los conjuntos de repetición de raíces $\Delta_{\iota j} = \{z_\iota = z_j \mid \text{para } \iota, j\}$, la aplicación

$$\mathcal{V}_n : U \subset \mathbb{C} \times \frac{\mathbb{C}^n}{Sim(n)} \longrightarrow \mathcal{V}_n(U) \subset \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{c_n = 0\}$$

es un difeomorfismo (sobre su imagen) de clase C^∞.
2. $\mathcal{V}_n^{-1}$ no existe como función en todo $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{c_n \neq 0\}$, pero

$$\mathcal{V}_n^{-1} : \mathcal{V}_n(U) \longrightarrow U$$

es una función diferenciable.

La afirmación (2) responde a ($\star$). Esto es, en dominios suficientemente pequeños $\mathcal{V}_n$ es difeomorfismo y sus puntos singulares (donde la diferencial $D\mathcal{V}_n$ es de rango menor o igual a $n+1$) provienen de $\Delta_{\iota j}$. Conforme n crece, la geometría de $\mathcal{V}_n$ se torna más intrincada, ver [10].

2.4. Solución de ecuaciones diferenciales.

Recordemos el siguiente resultado de nuestro segundo curso de ecuaciones diferenciales, podríamos llamarlo "el diccionario".

Teorema. *E. Picard. En $\mathbb{R}^m$ existe una correspondencia biyectiva entre:*

i) Campos vectoriales de clase C^1

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{V} : \mathbb{R}^m & \longrightarrow & T\mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_m) & \longmapsto & \mathtt{V}_1(x_1, \ldots, x_m)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots \\ & & +\mathtt{V}_m(x_1, \ldots, x_m)\frac{\partial}{\partial x_m}. \end{array}$$

ii) Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de clase C^1

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = \mathtt{V}_1(x_1, \ldots, x_m) \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_m}{dt} = \mathtt{V}_m(x_1, \ldots, x_m). \end{array} \right.$$

iii) Flujos locales de clase C^1

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \Omega \subseteq \Big(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^m\Big) & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \Big(t, (x_1, \ldots, x_m)\Big) & \longmapsto & \Phi(t, (x_1, \ldots, x_m)), \end{array}$$

donde por definición

$\Phi(t, \_\_) = Id$ en $\mathbb{R}^m$ y
$\Phi(t_1, \_\_)\circ\Phi(t_2, \_\_) = \Phi(t_1+t_2, \_\_)$ cuando ambas composiciones están bien definidas.

La correspondencia (i) $\Leftrightarrow$ (ii) es simple notación. Mientras que (iii) $\Rightarrow$ (ii) sigue de definir

$$\Phi\Big(t, (x_1, \ldots, x_m)\Big) = \left\{ \begin{array}{l} \text{posición } (x_{1t}, \ldots, x_{mt}) \text{ después} \\ \text{de tiempo } t \text{ de la trayectoria} \\ \text{solución de } (ii) \text{ que a tiempo} \\ t = 0 \text{ estaba en } (x_1, \ldots, x_m). \end{array} \right.$$

La parte difícil (ii) $\Rightarrow$ (iii) se conoce como la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, ella puede enunciarse como sigue.

Teorema. *E. Picard. Si un campo vectorial $\mathtt{V}$ no se anula en un punto $(x_1, \ldots, x_m)$, entonces existe un difeomorfismo ϕ de clase C^1 en una vecindad U del punto, tal que transforma el campo vectorial $\mathtt{V}$ en el nuevo campo vectorial*

$$\phi_* \mathtt{V} = 1\frac{\partial}{\partial x_1} + 0\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + 0\frac{\partial}{\partial x_m} \quad \textit{sobre } \phi(U).$$

La hipótesis es simple; $\mathtt{V}$ de clase C^1 en $\mathbb{R}^m$ y no se anula en un punto. La conclusión es muy fuerte; la existencia y unicidad de las trayectorias solución.
La figura 3 muestra las soluciones de un campo vectorial $\mathtt{V}$ en $\mathbb{R}^2$ y cuatro puntos; en la vecindad de dos de ellos el teorema se aplica.

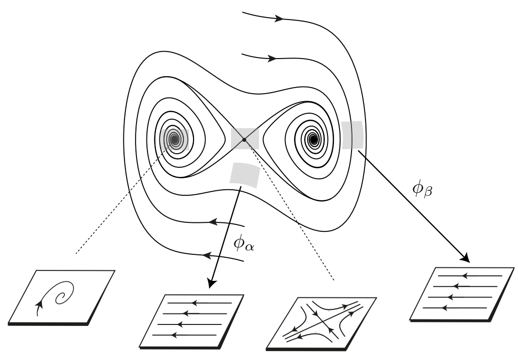

Fig 3. Si un campo vectorial $\mathtt{V}$ no se anula ciertos puntos, entonces sus soluciones en vecindades U_α de ellos y se expresan mediante un difeomorfismos ϕ_α.

Es bien conocido que para campos vectoriales polinomiales $\mathtt{V}$ en $\mathbb{R}^2$ de grado 1, la solución (prevista por el teorema de Picard) es elemental y explícita, presentándose casi una docena de comportamientos cualitativos para sus trayectorias solución. Mientras que en $\mathbb{R}^2$, para $\mathtt{V}$ de grado 2 no hay esperanza de hallar soluciones explícitas en lo general y se esperan alrededor de 2500 comportamientos cualitativos.

2.5. ¿A qué se debe su utilidad?

Los difeomorfismos ϕ son útiles debido a que transforman objetos y estructuras en $U \subseteq \mathbb{R}^m$ a otros objetos y estructuras en $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$.
Consideremos un cambio de coordenadas

$$\phi : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$$

de clase C^r, ver figura 4, sucede que:
i) ϕ transforma puntos p de U en puntos $\phi(p)$ de V.
ii) ϕ transforma funciones $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ en funciones $f \circ \phi^{-1} : V \longrightarrow \mathbb{R}$.
iii) ϕ transforma trayectorias $\gamma \subset U$ en trayectorias $\phi \circ \gamma \subset V$.
iv) ϕ transforma vectores tangentes $\frac{d\gamma}{dt}$ de U en vectores tangentes $\frac{d(\phi\circ\gamma)}{dt}$ de V.
v) ϕ transforma ecuaciones diferenciales en U en ecuaciones diferenciales en V.
vi) ϕ transforma soluciones de una ecuación diferencial en U en soluciones de la ecuación diferencial respectiva en V.
$\vdots$
Los puntos suspensivos nos sugieren que esta idea de transformación puede aplicarse a muchos otros objetos y estructuras en U, ver Fig. 4. Dicho de manera tautológica, un cambio de coordenadas ϕ: transforma un objeto matemático $\mathcal{O}$ sobre U, en otro objeto $\phi_* \mathcal{O}$ sobre V, de manera fiel. Esta es una de las ideas de la teoría de categorías, ver la introducción de [13].

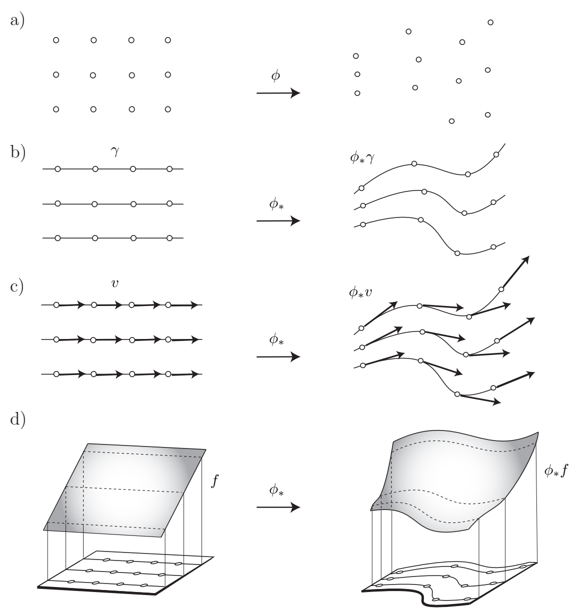

Fig 4. Un difeomorfismo local ϕ transforma; a) puntos en puntos, b) trayectorias en trayectorias, c) vectores tangentes en vectores tangentes, d) funciones en funciones.

3. Una virtud y dos problemas.

Una virtud. Consideramos una función
$$\phi : W \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
de clase C^1. Si su diferencial $D\phi$ es no nula en un punto $(x_{10}, \ldots, x_{m0}) \in W$, entonces el teorema de la función inversa nos dice que la inversa
$$\phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$$
existe en una bola suficientemente pequeña $U \subseteq W$, alrededor de $(x_{10}, \ldots, x_{m0})$ y ella es función de clase C^1.
Dada ϕ.
Primer problema. ¿Cuál es el dominio máximo U_{max} de tal forma que
$$\phi : U_{max} \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \phi(U_{max}) \subseteq \mathbb{R}^m$$
sea un difeomorfismo?
Segundo problema. ¿Es posible determinar a ϕ^{-1} de manera explícita?
Comentamos parcialmente lo que sucede en los ejemplos.

La aplicación de Vièta $\mathcal{V}_n$, vista con dominio $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$, es polinomial y por ello es C^∞. Sin embargo su inversa $\mathcal{V}_n^{-1}$ solo esta definida en abiertos pequeños. Para grados $n = 2, 3, 4$ sabemos que $\mathcal{V}_n^{-1}$ no es globalmente C^1 pues aparecen radicales (el inolvidable $\sqrt{b^2 - 4ac}$ para el caso $n = 2$). Más sorprendentemente, el famoso resultado de Abel y Galois nos dice que para $n \geq 5$, no existe una fórmula general con radicales para $\mathcal{V}_n^{-1}$.

Dado un campo vectorial polinomial $\mathtt{V}$ definido en todo $\mathbb{R}^m$, las cajas de flujo ϕ_α que aparecen en el teorema de Picard, en general tienen las siguientes características.
El dominio de ϕ_α es pequeño, pues geométricamente una caja de flujo peina a las trayectorias de $\mathtt{V}$. Es claro topológicamente, que hay campos $\mathtt{V}$ que no podemos peinar globalmente, como el mostrado en la figura 3. Adicionalmente, una caja de flujo ϕ_α casi nunca se puede determinar explícitamente, de hecho la prueba usual construye a ϕ_α mediante un proceso infinito.

4. Aplicaciones polinomiales.

Buscando reducir las familias de difeomorfismos para $W \subseteq \mathbb{R}^m$, dos simplificaciones son naturales.
i) Hacemos el dominio W lo más amplio posible, todo el espacio afín.
ii) Consideramos aplicaciones polinomiales (explícitas de calcular).

Consideremos $\mathbb{K}$ el campo real $\mathbb{R}$ o complejo $\mathbb{C}$ y una aplicación polinomial

$$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m) : \mathbb{K}^m_{z_1 \ldots z_m} \longrightarrow \mathbb{K}^m_{w_1 \ldots w_m}.$$

Es posible definir sus derivadas parciales, matriz Jacobiana DF y supondremos que $det(D\phi) \neq 0$ en todo punto de $\mathbb{K}^m$.
Claramente, si $\phi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo polinomial, entonces necesariamente $det(D\phi)$ es no nulo para todo punto de $\mathbb{R}^m$. La misma afirmación en el caso de ϕ polinomial complejo en $\mathbb{C}^m$ sigue análogamente, desplegando las correspondientes partes real e imaginaria en $\mathbb{R}^{2m}$.
Nuestros objetos geométricos son $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{C}^m$ y sus grupos de difeomorfismos polinomiales los denotamos

$$Aut(\mathbb{R}^m) \quad \text{y} \quad Aut(\mathbb{C}_m).$$

Por ejemplo, para $\mathbb{R}^m$
el grupo de translaciones,
el grupo de isometrías,
el grupo general lineal,
el grupo afín
son subgrupos de $Aut(\mathbb{R}^m)$, ver [14].
El siguiente subgrupo muestra que $Aut(\mathbb{K}^m)$ es en efecto un grupo enorme, para $m \geq 2$, ver [16].

Un *movimiento de cartas* de $\mathbb{K}^m$ en la m–ésima dirección es

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{K}^m & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ (z_1, \ldots, z_m) & \longmapsto & \big(z_1, \ldots, z_{m-1}, z_m + h(z_1, \ldots, z_{m-z})\big) \end{array}$$

donde h es polinomial, ver Fig. 5.
En efecto, para tal ϕ el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_1 & = & w_1 \\ & \vdots & \\ z_{m-1} & = & w_{m-1} \\ z_m + h(z_1, \ldots, z_{m-1}) & = & w_m \end{array} \right.$$

puede despejarse, obteniéndose ϕ^{-1} polinomial explícitamente.

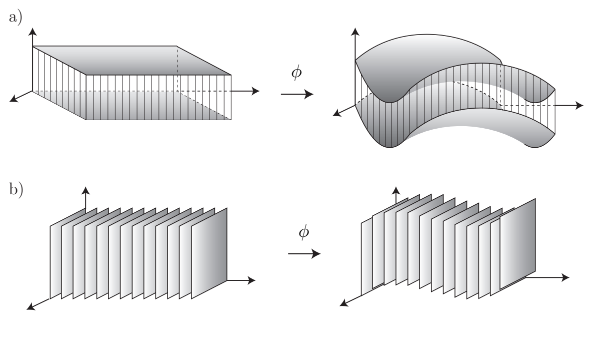

Fig 5. a) Un movimiento de cartas $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en la dirección vertical. b) Una composición $\phi_j \circ \phi_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de movimientos de cartas en distintas direcciones.

Observación. *Los movimientos de cartas polinomiales $\{\phi\}$ en la j–ésima dirección forman un subgrupo de $Aut(\mathbb{K}^m)$ la composición.*
ii) Todos los movimientos de cartas polinomiales $\{\phi\}$ en todas las direcciones $j \in 1, \ldots, m$ forman un subgrupo de $Aut(\mathbb{K}^m)$ bajo la composición.

5. La conjetura Jacobiana.

Consideramos una aplicación polinomial

$$\phi : \mathbb{K}^m_{z_1 \ldots z_m} \longrightarrow \mathbb{K}^m_{w_1 \ldots w_m}$$

real o compleja. ¿Será difícil decidir si es un automorfismo, esto es si ϕ es invertible?

La conjetura Jacobiana. Si $det(D\phi) \neq 0$ en todo $\mathbb{K}^m_{z_1 \ldots z_m}$ entonces la aplicación polinomial inversa

$$\phi^{-1} : \mathbb{K}^m_{w_1 \ldots w_m} \longrightarrow \mathbb{K}^m_{z_1 \ldots z_m}$$

existe.

Esta conjetura fue propuesta por O. H. Keller en 1939, [11], ver también [17], [7]. La conjetura Jacobiana es falsa para aplicaciones polinomiales en $\mathbb{R}^m$, cuando permitimos que $det(DF) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ sea un polinomio no nulo y no constante, *i.e.* que se anula en algunos puntos de $\mathbb{R}^m$ pero no en todos.

Contra–ejemplo de S. Pinchuk [15]. La aplicación polinomial $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \phi =& \big(\phi_1(x,y), \phi_2(x,y)\big) = \\ & \big(x^6y^4 - 4x^5y^3 + 3x^4y^3 + 6x^4y^2 - 7x^3y^2 - 4x^3y \\ & + 3x^2y^2 + 5x^2y + x^2 - 3xy - x + y, 2xy - 57x^2y^2 \\ & + 45x^5y^4 - 100x^4y^3 + 106x^3y^3 + 50x^3y^2 + \frac{39}{2}x^4y^4 \\ & + 50xy^2 - \frac{167}{4} - 16x^5y^5 + 25x^7y^6 + 10x^6y^5 \\ & - 5x^3y^4 - 45x^9y^8 - 60x^8y^7 + 60x^7y^7 - 54x^6y^6 \\ & + 30x^5y^6 - 75x^{11}y^{10} + 150x^{10}y^9 - 150x^9y^9 \\ & + \frac{525}{4}x^8y^8 - 75x^7y^8\big) \end{aligned}$$

cumple que $det(D\phi) \neq 0$ en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y sin embargo ϕ no es invertible.
Como consecuencia del contra–ejemplo:
Los difeomorfismos polinomiales de $\mathbb{C}^m$ con coeficientes reales forman un subgrupo propio de los difeomorfismos polinomiales de $\mathbb{R}^m$.
Sin embargo $Aut(\mathbb{C}^m)$ no es un subgrupo de $Aut(\mathbb{R}^m)$, pues un automorfismo complejo no siempre lleva $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$ en el mismo.

La conjetura da origen a la siguiente pregunta: ¿Todo difeomorfismo polinomial de $\mathbb{K}^m$ es composición de un número finito de movimientos de cartas?

6. ¿Por qué la conjetura Jacobiana es difícil?

Invertir funciones polinomiales de una variable es no trivial, en efecto:

Teorema. *N. H. Abel – E. Galois. Existe un abierto $\mathcal{D}$ del espacio de polinomios, $n \geq 5$, tal que si*

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0 : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w,$$

esta en $\mathcal{D}$, entonces la función inversa $z = P^{-1}(w)$ resulta imposible de expresar por radicales.

Esto es, para dimensión $m \geq 2$, la conjetura Jacobiana en $\mathbb{K}^m$ es difícil ya que, ella afirma que dado el sistema algebraico

$$\begin{cases} \phi_1(z_1, \ldots, z_m) & = w_1 \\ \quad\vdots & \\ \phi_m(z_1, \ldots, z_m) & = w_m \end{cases}$$

no necesariamente lineal, bajo la condición $det(D\phi) \neq 0$, existe la aplicación inversa polinomial

$$\begin{cases} \phi_1^{-1}(w_1, \ldots, w_m) & = z_1 \\ \quad\vdots & \\ \phi_m^{-1}(w_1, \ldots, w_m) & = z_m. \end{cases}$$

En lenguaje llano, decimos que el despeje de las $z_1, \ldots, z_m$ existe.
Es posible mostrar que la Conjetura Jacobiana puede enunciarse usando al menos las siguientes teorías sobre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^m$:
• Las ecuaciones diferenciales ordinarias, ver [5], [6], [7].
• El álgebra, ver [3], [7], [8].
• La topología de cubiertas y fibraciones, ver [5], [6], [8].
• Las singularidades de curvas algebraicas, ver [7], [8].
• La geometría diferencial de métricas planas, ver [5], [6].
Etc.
El estudio de automorfismos holomorfos, no polinomiales de $\mathbb{C}^m$ es actualmente un campo abierto, ver por ejemplo [16], [9], [12], [4].

Referencias

[1] V. I. Arnold; *On teaching mathematics.* (1997). Visible en distintos sitios de la red, *v.g.* http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html

[2] H. Bass, G. Meisters; *Polynomial flows in the plane.* Advances in Mathematics, Vol. 55, 2 (1985), 173–208.

[3] H. Bass, *et al.* ed.; *Polynomial Automorphisms and Related Topics.* Publising House of Sci. and Tech. Hanoi Vietnam, 2007.

[4] M. Brunella; *Complete polynomial vector fields on the complex plane.* Topology, Vol. 43, 2 (2004), 433–445.

[5] A. Bustinduy, L. Giraldo, J. Muciño–Raymundo; *Jacobian mates for non singular polynomial maps in $\mathbb{C}^n$ with one–dimensional fibers.* J. of Singularities. Vol. 9 (2014), 27–42.

[6] A. Bustinduy, L. Giraldo, J. Muciño–Raymundo; *Vector fields from locally invertible polynomial maps in $\mathbb{C}^n$.* Colloquium Math. Vol. 140, No. 2 (2015), 205–220.

[7] A. van den Essen ed.; *Automorphisms of Affine Spaces.* Kluwer, 1995.

[8] A. van den Essen; *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture.* Birkhäuser Verlag, Germany, 2000.

[9] F. Forsternic; *Stein Manifolds and Holomorphic Mappings.* Springer, Dordrecth, 2011.

[10] G. Katz; *How tangents solve algebraic equations, or a remarkable geometry of discriminant varieties.* Expo. Math., Vol. 21, No. 3, (2003), 219–261.

[11] O.–H. Keller, *Ganze Cremona–Transformationen.* Monatsch. Math. Phys. 47 (1939), 299–306.

[12] L. Lempert, E. Andersen; *On the group of holomorphic automorphisms of $\mathbb{C}^n$.* Inventiones mathematicae Vol. 110, 2 (1992), 371–388.

[13] S. Mac Lane; *Categories for the Working Mathematician.* Springer Verlag, New York, 1978.

[14] J. Muciño–Raymundo; *Algunos problemas de geometría en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ para el siglo XXI.* Miscelánea Matemática, Vol. 30 (2000), 41–58.

[15] S. Pinchuk; *A counterexample to the real Jacobian Conjeture.* Math. Zeitschrift, 217 (1994), 1–4.

[16] J.–P. Rosay, W. Rudin; *Holomorphic maps from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$.* Transactions oh the American Mathematical Society, Vol. 310 (1988), 47–86.

[17] S. Smale; *Mathematical problems for the next century.* The Mathematical Intelligencer, Vol. 20, 2 (1998), 7–15.

[18] J.–L. Gutiérrez, F. Sánchez; *Matemática del crecimiento organico. De la alometría al crecimiento estacional.* Facultad de Ciencias, UNAM, Cd. de México (2017).

[19] D. W. Thompson; *On Growth and Form.* Dover, Nueva York, (1992).