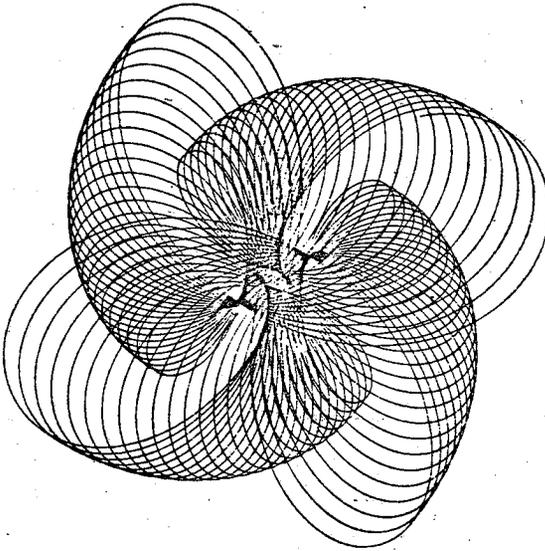




# MÉTODOS DE LAS MATEMÁTICAS APLICADAS

Antonmaría Minzoni



IV COLOQUIO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN

Hotel Posada de la Misión, Taxco, Gro.  
11 al 31 de Agosto de 1985

**PATROCINADORES:**

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología  
Secretaría de Educación Pública

ESTAS NOTAS FUERON PREPARADAS PARA LOS CURSOS DEL IV  
COLOQUIO DEL DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS DEL CINVESTAV.  
SU EDICION ESTUVO FINANCIADA POR EL CONSEJO NACIONAL  
DE CIENCIA Y TECNOLOGIA Y CONSTA DE 500 EJEMPLARES.

OJALA QUE ESTAS MOTIVEN LA FORMACION DE GRUPOS DE  
ESTUDIO QUE ENRIQUEZCAN EL AMBIENTE ACADEMICO DE LAS  
ESCUELAS DE CIENCIAS E INGENIERIA DE TODO EL PAIS.

Por el Comité Organizador

ENRIQUE ANTONIANO  
Coordinador

## INDICE

	pag.	
0.	Introducción	1
I.	Funciones Analíticas	3
I.1	Definiciones	3
I.2	El Teorema de Cauchy	5
I.3	El Teorema de Taylor	7
I.4	Singularidades de una Función Analítica	10
I.5	Continuación Analítica	13
II	Ecuaciones Diferenciales	17
III	Transformada de Laplace	25
III.1	Propiedades Generales	25
IV	Ondas viajeras en ecuaciones de difusión	45
V	Efectos de no homogeneidades en modelos de poblaciones	57
	Referencias	65

## 0. Introducción

El propósito de estas notas es presentar al lector las técnicas más usuales de variable compleja que se usan en el estudio de sistemas de ecuaciones ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales.

La primera y segunda sección discuten en cierto detalle el cálculo de variable compleja para funciones que toman valores en un espacio de dimensión finita y su aplicación a la solución de sistemas de ecuaciones con coeficientes variables y singularidades regulares. Se desarrolló la técnica para resolver y estudiar algunas ecuaciones con interés especial, entre ellos la de Airy que se utiliza posteriormente.

La tercera sección se utiliza para estudiar a la transformada de Laplace para funciones con valores escalares y vectoriales. Lo principal aplicación es el teorema espectral para matrices simétricas y su uso para determinar la estabilidad de sistemas lineales. En la segunda parte de esta sección se utiliza a la transformada de Laplace para el estudio de la ecuación de onda de uno y tres dimensiones obteniéndose soluciones explícitas para el problema no homogéneo.

Las secciones cuatro y cinco son las más aplicadas. Se discute un modelo general de la teoría de poblaciones y se hacen ver el uso y las limitaciones de las técnicas lineales expuestas. En la sección cuatro se estudian con cierto detalle las ondas viajeras para el modelo de Fisher y la estabilidad de las poblaciones de equilibrio. Finalmente en la última sección se estudian los efectos de no homogeneidad espacial en los parámetros de una población y se introduce el método W.K. B que es utilizado para probar la ines

tabilidad de situaciones ecológicas de interés.

Las notas dan un breve panorama de las técnicas de variable compleja, de plano fase y asintóticas para atacar y resolver problemas de algún interés en ciencias naturales.

La bibliografía dista mucho de ser exhaustiva pero si es representativa y el lector interesado encontrará más referencias al recurrir a ella.

Por último deseo agradecer al Dr. Enrique Antoniano Coordinador del IV Coloquio del Departamento de Matemáticas del CINVESTAV la invitación a escribir estas notas y a la Srita. Norma Cuéllar N. su excelente y rápida labor de mecanografía.

Agosto, 1985.

## I Funciones Analíticas

En este capítulo recordaremos algunas propiedades de las funciones analíticas de una variable compleja. Estudiaremos funciones que toman valores tanto escalares como vectoriales, ya que ambos tipos serán de utilidad en nuestros estudios posteriores. Comenzaremos pues con algunas definiciones.

### I.1 Definiciones:

a) Una función  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , (donde  $\mathbb{C}$  es el campo de los complejos y  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$ ) se llama analítica en  $\Omega$  si para toda  $z \in \Omega$  la derivada

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (\text{I.1})$$

existe.

b) Una función con valores vectoriales  $\underline{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$  donde  $f_1 \dots f_n$  son funciones analíticas, se llama una función analítica con valores vectoriales.

c) Una función  $A: \Omega \rightarrow M_{n \times n} = \{M | M \text{ es una matriz de } n \times n\}$  definida por  $(A(z))_{ij} = a_{ij}(z)$  donde las  $a_{ij}(z)$  son funciones analíticas se llama una función analítica con valores matriciales.

Debido a que tanto en  $\mathbb{C}^n$  como en  $M_{n \times n}$  se pueden introducir normas las definiciones b) y c) se pueden dar directamente como en (I.1) donde el límite se entiende en el sentido de la norma. En el caso del espacio

$M_{n \times n}$  una norma apropiada es  $\|A\| = \max_{i,j} |a_{ij}|$ , si es que  $A$  es la ma

triz con componentes  $a_{ij}$ . (El lector puede verificar que  $\| \cdot \|$  es en realidad una norma). Usando la norma  $\| \cdot \|$  puede definirse una función analítica como aquella para la cual

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(z+h) - A(z)}{h} \quad (1.2)$$

existe para toda  $z \in \Omega$ , donde el límite se toma de acuerdo a  $\| \cdot \|$ .

La demostración de que las definiciones (1.2) y c) son equivalentes se deja como un ejercicio.

Las reglas algebraicas para calcular derivadas de funciones con valores matriciales se prueban de manera análoga a los usadas para funciones escalares. Por ejemplos: sean A y B dos funciones derivables con valores matriciales; la derivada del producto AB está dada por:

$$\begin{aligned} (AB)'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(z+h) B(z+h) - A(z) B(z)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(z+h)B(z+h) - A(z)B(z+h) + A(z)B(z+h) - A(z)B(z)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{A(z+h) - A(z)}{h} \right\} B(z) + \lim_{h \rightarrow 0} A(z) \left\{ \frac{B(z+h) - B(z)}{h} \right\} = \\ &= A'(z) B(z) + A(z) B'(z) \end{aligned} \quad (1.3)$$

en analogía con el caso escalar. Queda como un ejercicio el probar (usando 1.3) que lo derivado de una matriz invertible  $U^{-1}(z)$  está dada por  $(U^{-1}(z))' = -U^{-1}U'U^{-1}$ .

## I.2 El Teorema de Cauchy.

El Teorema de Cauchy es uno de los resultados centrales en la teoría de las funciones analíticas de una variable compleja. Un enunciado del teorema de Cauchy suficiente para nuestro propósito es:

**TEOREMA:** Sea  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica en  $\Omega$ . Sea  $\Gamma$  una curva lisa simple cerrada es decir una curva parametrizada por una función  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que  $\gamma \in C^1[a, b]$  y  $\gamma'(t) \neq 0$  contenida en  $\Omega$ . Entonces para  $z$  en el interior de  $\Gamma$  se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(\gamma(t)) \gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = f(z) \quad (\text{I.4})$$

Para la demostración detallada de (I.4) referimos a un texto de funciones de variable compleja. Nosotros nos limitaremos a estudiar algunas consecuencias y usos de (I.4).

De (I.4) se sigue (derivando bajo el signo de integración) que la función  $f(z)$  tiene derivadas de todos los órdenes en  $\Omega$ , (nótese que la única hipótesis sobre  $f$  es la derivabilidad) dadas por

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} \quad (\text{I.5})$$

De la fórmula (I.5) se deduce la desigualdad de Cauchy, es decir

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{|f(\xi)| |d\xi|}{|\xi - z|^{n+1}} \leq \frac{n!}{2\pi} \sup_{\xi \in C} |f(\xi)| \frac{1}{R^n}$$

donde  $R$  es el radio del círculo con centro en  $z$  que se utiliza como curva  $\Gamma$  en (I.5). Esta desigualdad será de importancia para nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales. El análogo de la fórmula (I.5) para funciones que toman valores matriciales cuando se define

$$\int_{\Gamma} A(z) dz$$

como

$$\left( \int_{\Gamma} A(z) dz \right)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma} A_{ij}(z) dz \quad (\text{I.6})$$

es

$$\frac{d^n}{dz^n} A(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{A(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi \quad (\text{I.7})$$

Se deja como ejercicio el cálculo de

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_i} (-A+\lambda I)^{-1} d\lambda \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_i} \lambda(\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

donde la matriz  $A$  es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$I$  es la matriz identidad, y los contornos  $\Gamma_1 = \{z \mid |z| = 1\}$ ,  $\Gamma_2 = \{z \mid |z-2| = 1\}$ ,  $\Gamma_3 = \{z \mid |z| = 3\}$  son curvas simples cerradas.

¿Que particularidad tiene el resultado de la integración para el contorno  $\Gamma_3$ ? Observe que  $A$  es una matriz simétrica, ¿qué sugiere éste hecho?

### I.3 El Teorema de Taylor

Como un corolario del Teorema de Cauchy tenemos el teorema de Taylor por medio del cual se puede representar a una función analítica como una serie de potencias.

**TEOREMA:** Sea  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica, entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

donde la convergencia de la serie es absoluta y uniforme para todo  $z$  en un disco con centro en  $z_0$ , radio  $R$  contenido en  $\Omega$ .

La demostración se sigue del Teorema de Cauchy. En efecto de acuerdo con la figura 1 tenemos, para  $|z-z_0| < R$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0) - (z-z_0)} d\xi$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi-z_0} \{1-z-z_0/\xi-z_0\}^{-1} d\xi$$

(I.8)

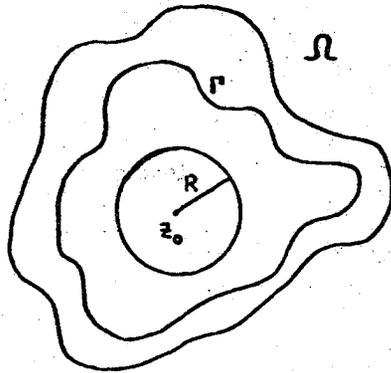


Fig. 1

Deformando  $\Gamma$  a un contorno circular  $c$  de radio  $R' > R$ , tenemos que

$$\left(1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}} \quad (\text{I.9})$$

donde la convergencia en (I.9) es uniforme para  $|\xi| = R'$  y  $|z-z_0| < R$ . Sustituyendo (I.9) en (I.8) e intercambiando el orden de suma e integración (lo cual es permisible debido a la convergencia uniforme en  $z$  y  $\xi$ ) se tiene:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi (z-z_0)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

que es el resultado deseado. Además éste argumento muestra que cuando  $f$  es analítica en todo el plano finito la serie de Taylor converge para toda  $z$  compleja.

Del teorema de Taylor se siguen varios resultados de importancia, como el teorema de Liouville (cuya demostración queda como ejercicio).

Nosotros probaremos el hecho de que una función analítica queda de terminada por los valores que toma en un subconjunto del plano con un punto de acumulación.

Con mas precisión probaremos que dos funciones analíticas en  $\Omega$   $f$  y  $g$  que coinciden en un subconjunto  $\Delta \subset \Omega$  con un punto de acumulación coinciden para toda  $z \in \Omega$ .

En efecto sean

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

donde  $z_0$  es un punto de acumulación de  $\Delta$ . Como  $f$  y  $g$  son continuas se tiene

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f-g)(z) = 0 = a_0 - b_0;$$

de donde  $a_0 = b_0$ . Como  $a_0 = b_0$ , la función

$$f-g / z-z_0$$

también es continua en  $z = z_0$  y por el mismo argumento  $a_1 = b_1$ .

El mismo argumento usado para  $n \geq 2$  muestra que  $a_n = b_n$  para  $n \geq 2$  lo cual implica  $f = g$  para toda  $z$  en  $\Omega$ .

Como consecuencia de este resultado se puede probar que los ceros de una función analítica (que no es cero idénticamente) no tienen punto de acumulación en el plano  $z$  finito. La demostración queda como un ejercicio.

#### I.4 Singularidades de una Función Analítica.

Si  $f$  es una función de  $\Omega$  en  $\mathbb{C}$  todo punto  $z$  de  $\Omega$  en el cual  $f$  no es analítica se llama un punto singular de  $f$ . Para cierto tipo de singularidades es posible describir de una manera explícita el comportamiento de  $f$  en las vecindades de la singularidad. El resultado más importante en este sentido es el teorema de Laurent que a continuación demostramos.

TEOREMA: Sea  $f$  una función analítica en el disco perforado  $0 < |z - z_0| < R$ , entonces para toda  $z$  en el anillo  $0 < R_1 < |z - z_0| < R_2 < R$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (\text{I.10})$$

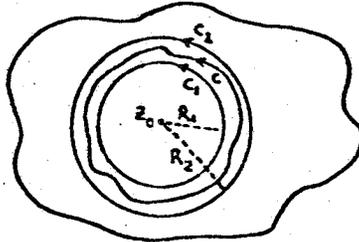
donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(\xi) (\xi - z_0)^{-n-1} d\xi$$

donde  $c$  es un contorno contenido en el anillo.

Para demostrar (I.10) considerense los contornos  $c_1$  y  $c_2$  mostrados en la figura 2. Usando el Teorema de Cauchy se tiene, para  $R_1 < |z - z_0| < R_2$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0}$$



Considérese ahora la integral a lo largo de  $c_1$

$$\begin{aligned} \int_{c_1} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} &= - \int_{c_1} \frac{f(\xi) d\xi}{(z - z_0) \left(1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)} = \\ &= \int_{-c_1} f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c f(\xi) (\xi - z_0)^{-n-1} d\xi (z - z_0)^{+n} \quad (I.11) \end{aligned}$$

La integral a lo largo de  $c_2$  se desarrolla de la misma manera que (I.8) y se obtiene

$$\int_{c_2} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_c f(\xi) (\xi - z_0)^{-n-1} d\xi (z - z_0)^n \quad (I.12)$$

Finalmente combinando (I.11) y (I.12) obtenemos

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c f(\xi) (\xi - z_0)^{-n-1} d\xi (z - z_0)^n$$

que es el resultado deseado.

El Teorema de Laurent describe el comportamiento de una función analítica en la vecindad de la singularidad.

Cuando los términos en  $(z-z_0)^{-n}$  son un número finito, es decir el menor exponente negativo es  $-M$ , se dice que la función tiene un polo de orden  $M$  en  $z = z_0$ . Cuando la serie de Laurent en potencias negativas es infinita se dice que la función tiene una singularidad esencial en  $z = z_0$ .

Si  $z_0$  es un polo de orden  $M$  el coeficiente  $a_{-M}$  se llama el residuo en el polo.

Una aplicación inmediata del teorema de Laurent es el cálculo de integrales.

En efecto considerese una función  $f$  analítica en  $\Omega$  excepto por un número finito de polos de orden 1, colocados en los puntos  $z_j$ . En este caso

$$\int_c f(z) dz$$

donde  $c$  es un contorno que incluye a una o varias singularidades de  $f$  se puede expresar como

$$\int_c f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{c_j} f(z) dz$$

donde los  $c_j$  incluyen a una sola singularidad. Por el teorema de Laurent

tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_j} f(z) dz = b_{-1,j} = \lim_{z \rightarrow z_j} f(z) (z - z_j)$$

de donde

$$\int_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j) f(z).$$

Los resultados mencionados hasta ahora son válidos para funciones con valores matriciales. En éste caso los coeficientes de la Serie de Laurent serán matrices. Los detalles de las demostraciones se dejan al lector. En particular es ilustrativo repetir el cálculo del ejercicio del final de la sección (I.2) usando la teoría desarrollado hasta ahora. Nótese la forma de los residuos en los polos.

### I.5 Continuación Analítica

El concepto de continuación analítica es uno de los más complicados de la teoría. Lo único que tocaremos en ésta sección, y de una manera muy breve son algunas propiedades que serán utilizadas, más adelante.

Hasta el momento hemos considerado funciones que están definidas en una región  $\Omega$  que no es todo el plano complejo, o bien funciones cuya serie de Taylor converge en todo el plano. Sin embargo el concepto de "función analítica" (léase como una sola palabra) es mucho más amplio que el

utilizado hasta ahora.

Para precisar las ideas considérese una función analítica  $f_0$ , definida en  $\Omega_0$ . Tómese un punto  $z_0$  en  $\Omega_0$  y considérese el disco  $\Delta_1$  con centro en  $z_0$  y radio  $R_1$  con la propiedad de que parte de  $\Delta_1$  no está contenido en  $\Omega_0$ . Para  $z$  en  $\Delta_1$  defínese

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_0^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n,$$

la función  $f_1(z) = f_0(z)$  en  $\Delta_1 \cap \Omega_0$  pero  $f_1$  está definida para nuevos valores de  $z$ . Se dice que  $f_1$  es una continuación analítica inmediata de  $f_0$ . De la misma manera  $f_1$  se puede prolongar por  $f_2$  etc. Se obtiene así a partir de la función  $f_0$  y el dominio  $\Omega_0$  una colección de funciones  $f_n$  y dominio  $\Omega_n$ . La colección de funciones  $f_n$  y dominios  $\Omega_n$  se llama la "función analítica  $f$ ". Las funciones  $f_n$  y dominios  $\Omega_n$  se llaman los elementos de la función  $f$ . El objeto "función analítica" es muy complicado en general, de hecho la "función-analítica"  $f$  puede tomar muchos valores en un punto.

Un punto  $z_0$  se llama un punto de ramificación para la función analítica  $f$  cuando al prolongar el elemento  $f_0$  a lo largo de una curva que encierra a  $z_0$  se regresa al dominio  $\Omega_0$  con un valor distinto del tomado por  $f_0$  en  $\Omega_0$ .

Ejemplos de funciones analíticas multivalentes " $\sqrt{z}$ " obtenida, por ejemplo, del elemento  $r^{1/2} e^{i\theta/2}$ ,  $r = |z|$ ,  $|\theta| = |\arg z| < \pi/2$  por continuación analítica.

En muchos casos de interés solo es necesario trabajar con "una parte"

de la función  $f$  y encontrar una región en la cual ésta resulte univaluada. En cada caso particular hay que elegir los elementos apropiados. Sin embargo en varias aplicaciones de importancia es esencial el tomar en cuenta la naturaleza multivaluada de ciertas funciones analíticas; algunas de estas aplicaciones se discutirán al final de estas notas.

En la mayoría de las aplicaciones se tienen funciones analíticas  $f$  definidas explícitamente para valores de  $z$  en cierta región y resulta de interés el conocer expresiones más o menos explícitas para la continuación analítica de estas funciones. En general el proceso descrito al principio de esta sección no tiene ninguna utilidad porque no proporciona una "expresión cerrada" para la continuación analítica. No existe una técnica general para obtener información sobre las continuaciones analíticas de una función dada procediéndose de manera distinta en cada ejemplo.

Consideraremos ahora varios ejemplos:

$$i) \text{ Sea } f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt \text{ definida para } \operatorname{Re} z > 0.$$

La función  $f(z)$  es analítica para  $\operatorname{Re} z > 0$ . En este caso es inmediato encontrar una continuación analítica a todo el plano ya que

$$f(z) = -\frac{d}{dz} \int_0^{\infty} e^{-zt} dt = -\frac{d}{dz} \frac{1}{z} = \frac{1}{z^2} \text{ para } \operatorname{Re} z > 0,$$

de donde la función  $1/z^2$  es la continuación analítica buscada.

$$ii) \text{ Sea } f(z) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \text{ para } \operatorname{Re} z > -1.$$

Demuestre que  $f(z)$  puede continuarse analíticamente para  $\text{Re } z \leq -1$  y describa las singularidades de dicha continuación analítica.

iii) Describa los puntos de ramificación de la función analítica

$$f(z) = \tanh \sqrt{s} / \sqrt{s} .$$

iv) Sea  $f(z) = \int_a^b \frac{\phi(t)}{t-z} dt$  para  $\text{Im } z \neq 0$ ;

donde  $\phi(t)$  es analítica en un abierto que contiene el segmento  $a \leq t \leq b$ . Demuestre que  $f$  se puede continuar analíticamente através de la recta  $a < t < b$  y que tanto los puntos  $(a,0)$  y  $(b,0)$  son puntos de ramificación.

## II Ecuaciones diferenciales

En éste capítulo, a pesar de lo ambicioso del título, nos limitaremos al estudio de un tipo especial de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son funciones analíticas. Estudiaremos la ecuación lineal de segundo orden con puntos singulares que aparecen en aplicaciones. Estas ecuaciones tienen por soluciones (de hecho sirven para definir) a las llamadas funciones especiales de la física matemática. No se pretende dar una idea completa de esta gran cantidad de material, solamente se describirán algunos aspectos del comportamiento de las soluciones. Se darán algunos ejemplos que serán discutidos más adelante en el curso.

Una ecuación diferencial de segundo orden con un punto singular regular en  $z = z_0$  es aquella que se puede escribir de la forma

$$(z-z_0)^2 f'' + (z-z_0) P(z) f' + Q(z) f = 0 \quad (\text{II.1})$$

donde las funciones  $P(z)$  y  $Q(z)$  son analíticas en  $z_0$ .

El ejemplo más simple de una ecuación de la forma (II.1) es la llamada ecuación de Euler:

$$(z-z_0)^2 f'' + (z-z_0) f' - \alpha^2 f = 0. \quad (\text{II.2})$$

Las soluciones para (II.2) son

$$f_1(z) = (z-z_0)^{r_1}, \quad f_2(z) = (z-z_0)^{r_2},$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son las raíces de

$$r(r-1) - \alpha^2 = 0.$$

Las funciones  $f_1$  y  $f_2$  tienen, en general, un punto de ramificación para  $z = z_0$ . Obsérvese también que una de las soluciones es finita para  $z = z_0$  mientras que la otra no lo es. En el caso  $\alpha = 0$  una de las soluciones es  $f_1(z) = \text{constante}$  y  $f_2(z) = \ln(z-z_0)$ .

La ecuación de Euler es la ecuación más sencilla que se pueda tener, sin embargo aproxima en la vecindad de  $z = z_0$  la ecuación más general (II.1). Por éste motivo es razonable buscar una solución para (II.1) de la forma

$$f(z) = (z-z_0)^r \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \right\} \quad (\text{II.3})$$

donde  $r$  y  $a_n$  son parámetros para determinarse. El exponente  $r$  se sugiere para tomar en cuenta la naturaleza multivaluada de  $f$ .

Substitución de (II.3) en (II.1) nos da:

$$\begin{aligned} & (z-z_0)^r \left\{ r(r-1) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (r+n) (r+n-1) (z-z_0)^n \right\} + \\ & + (z-z_0)^r P(z) \left\{ r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (r+n) (z-z_0)^n \right\} + \\ & + (z-z_0)^r Q(z) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + 1 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

y substituyendo las funciones

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n, \quad Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z-z_0)^n \quad (\text{II.5})$$

en (II.4) obtenemos, despues de igualar potencias de  $(z-z_0)$ , las relaciones

$$\begin{aligned} & r^2 + (b_0-1)r + q_0 = 0 \\ & a_1 \{ (r+1)^2 + (b_0-1)(r+1) + q_0 \} + r b_1 + q_1 = 0 \\ & a_2 \{ (r+2)^2 + (b_0-1)(r+2) + q_0 \} + a_1 \{ (r+1) b_1 + q_1 \} + \\ & + r b_2 + q_2 = 0 \\ & \vdots \\ & a_n \{ (r+n)^2 + (b_0-1)(r+n) + q_0 \} + \sum_{m=1}^{n-1} a_{n-m} \{ (r+n-m) b_m + q_m \} + \\ & + r b_n + q_n = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Las relaciones (II.6) proveen, si es que se pueden resolver, relaciones de recurrencia para los coeficientes  $Q_n$ . Cuando los coeficientes  $a_n$  se determinan de tal forma que satisfagan (II.6), la serie (II.3) será una solución formal para (II.1). Para probar que (II.3) provee una solución para (II.1) se debe probar que la serie es uniformemente convergente. Antes de probar la convergencia de (II.3) examinaremos las soluciones de (II.6).

La ecuación para  $r$  se llama la ecuación indicial y en general tiene dos raíces que reciben el nombre de exponentes de la singularidad; ellas determinan el carácter multivalente de  $f$ . Al resolver la ecuación indicial se presentan varios casos:

i) Las raíces son simples y no difieren por un entero. En este caso las relaciones (II.6) se pueden resolver para las dos raíces  $r_1$  y  $r_2$  obteniéndose así dos soluciones formales.

ii) Las raíces son simples pero difieren por un entero. En este caso las relaciones se pueden resolver para la mayor de las raíces y solo se obtiene una solución formal.

iii) La raíz es doble. Nuevamente solo se puede obtener una sola solución formal.

En los casos (ii) y (iii) la segunda solución se obtiene usando el método de reducción de orden que será discutido al final de esta sección.

Probaremos ahora que (II.3) converge uniformemente en una región del plano complejo. Con este fin es conveniente definir la función

$$F(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0.$$

Supóngase además que  $F(r_1) = 0$  y  $F(r_1+n) \neq 0$ . En este caso las relaciones (II.6) se pueden resolver y para probar la convergencia de (II.3) es necesario estimar los coeficientes  $Q_n$ .

Para estimar los coeficientes  $a_n$  necesitaremos cotas para los coeficientes  $|p_n|, |q_n|$ ,  $F(r_1+n)$ . Las constantes  $|p_n|$  y  $|q_n|$  se acotan utilizando la desigualdad de Cauchy en la forma

$$|p_n| \leq \frac{M_1}{R_1^n}, \quad |q_n| \leq \frac{M_1}{R_2^n} \quad (\text{II.7})$$

donde  $R_1$  es el radio de convergencia de la serie que representa a  $P$  y  $R_2$  el radio de aquella que representa a  $Q$ . Utilizando (II.7) el número  $|r_1 p_n + q_n|$  queda acotado por

$$|r_1 p_n + q_n| \leq \frac{M}{R^n}, \quad R = \min \{R_1, R_2\}$$

Para acotar el número  $F(r_1+n)$  supongamos que  $\text{Re}(r_1 - r_2 = s) \geq 0$ , de donde

$$\begin{aligned} |F(r_1+n)|^{-1} &= |n^2 + n [(p_0-1) + 2r_1]|^{-1} \\ &= |n(n+s)|^{-1} \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Utilizando (II.8) tenemos:

$$|Q_1| = |r_1 p_1 + q_1| \leq |F(r_1 + 1)| \leq \frac{M}{R} \cdot y$$

por inducción probaremos que

$$|Q_n| \leq \frac{M^n}{R^n}.$$

En efecto

$$\begin{aligned} |Q_n| &\leq |F(r_1 + n)|^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} |Q_{n-j}| |r_1 p_j + q_j| + \sum_{j=1}^{n-1} |Q_{n-j}| (n-j) |p_j| + \right. \\ &\quad \left. + |r_1 p_n + q_n| \right\} \\ &\leq \{n|s+n|\}^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{M^{n-j}}{R^{n-j}} \frac{M^j}{R^j} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{M^{n-j}}{R^{n-j}} \frac{M^j}{R^j} (n-j) + \frac{M^n}{R^n} \right\} \\ &\leq \{n|s+n|\}^{-1} \left( n \frac{M^n}{R^n} + \frac{M^n}{R^n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \right) \\ &\leq \{n|s+n|\}^{-1} \left\{ n + \frac{(n-1)n}{2} \right\} \frac{M^n}{R^n} \\ &\leq \frac{m+1}{2m} \frac{M^n}{R^n} \leq \frac{M^n}{R^n} \end{aligned}$$

que es el resultado deseado.

Usando la estimación para los coeficientes  $|Q_n|$  y la prueba de la razón, queda como ejercicio el probar que la serie (II.3) converge uniformemente para  $0 < |z - z_0| < \frac{R}{M}$ , demostrando esto que la solución formal (II.3)

es una solución de (II.1).

Finalmente en los casos (i) y (ii) la segunda solución de la ecuación se obtiene reduciendo el orden, es decir se busca una solución  $f_2$  de la forma

$$f_2 = u f_1 \quad (\text{II.9})$$

donde  $f_1$  es una solución de (II.1). La substitución de (II.9) en (II.1) de (II.9) en (II.1) da una ecuación para  $u$  de la forma

$$u'' + \left( \frac{p(z)}{z-z_0} + 2 \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} \right) u' = 0$$

que es una ecuación integrable para  $u$ .

La información sobre las soluciones obtenidas con el método hasta ahora expuesto se limita a las vecindades de la singularidad, y no da más que en ciertos casos particulares información sobre las posibles continua ciones analíticas de las soluciones y otras posibles singularidades. En muchos casos de interés la técnica recién examinada provee información suficiente sobre las soluciones de interés. Sin embargo hay otras técnicas que examinaremos en el último capítulo que proveen información adicional sobre las soluciones.

Queda como ejercicio examinar las soluciones en serie de las siguien

tes ecuaciones:

$$i) z^2 f'' + z f' + (z^2 - \nu^2) f = 0. \quad (\text{Ecuación de Bessel de orden } \nu)$$

Para  $\nu \neq 0$  encuentre dos soluciones linealmente independientes en la vecindad de  $z = 0$ .

Para  $\nu = 0$  encuentre los primeros términos en el desarrollo de dos soluciones linealmente independientes.

$$ii) (1-z^2)f'' - 2zf' + \nu(\nu+1)f = 0 \quad (\text{Ecuación de Legendre})$$

Busque soluciones para (ii) en forma de series de potencias alrededor de  $z = 0$ . Cual es la condición sobre  $\nu$  para que dichas soluciones sean analíticas en todo el plano?

iii) La técnica hasta ahora desarrollada tiene análogos para sistemas de ecuaciones. Un sistema de ecuaciones con un punto singular regular en  $z=0$  es de la forma

$$\underline{y}'(z) = A(z) \underline{y}(z)$$

donde la matriz  $A$  tiene un desarrollo de Laurent de la forma

$$A(z) = \frac{A_{-1}}{z} + A_0 + A_1 z + \dots$$

donde las matrices cuadradas  $A_i$  son constantes. Propongo para  $\underline{y}(z)$  una solución de la forma

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{r+n}$$

donde el parámetro  $r$  y los vectores  $y_n$  son arbitrarios. Encuentre el análogo de la ecuación indicial y escriba los dos primeros términos de las relaciones de recurrencia. Discuta cuando éstas se puedan resolver. Resulta interesante comparar los resultados obtenidos para el caso especial de un sistema de  $2 \times 2$  con los resultados encontrados para la ecuación de segundo orden.

iv) Resuelva la ecuación

$$z^2 f' + f = 0.$$

El punto  $z = 0$  no es una singularidad regular de la ecuación.

¿Qué singularidad tiene la solución para  $z = 0$ ?

v) Encuentre dos soluciones para las ecuaciones

a)  $(z-i)^2 f'' - 2(z-i) f' + 2f = 0.$

b)  $f'' + zf = 0$

y pruebe que son linealmente independientes.

vi) Considerese la ecuación diferencial

$$f'' + \left(1 + \frac{n^2}{z^2}\right) f = 0.$$

¿A que funciones se parecerán las soluciones cuando  $|z| \rightarrow \infty$ ?

### III Transformada de Laplace

La Transformada de Laplace es un método muy poderoso para resolver ecuaciones diferenciales de varios tipos, tanto ordinarias como parciales. En éstas notas solo tomaremos algunas de sus propiedades utilizadas con mayor frecuencia y la utilizaremos para obtener soluciones a diversos problemas. La primera parte de éste capítulo se dedica a las propiedades generales y la segunda a algunas aplicaciones.

#### III.1 Propiedades Generales

Comenzaremos con la definición. La transformada de Laplace  $\tilde{f}(s)$  de una función  $f(t)$ , continua por pedazos, tal que  $|f(t)| \leq M e^{ct}$  para alguna  $M$  y  $c > 0$  está definida por

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{para } \operatorname{Re} s > c \quad (\text{III.1})$$

La función definida por (III.1) es analítica para  $\operatorname{Re} s > c$  y está acotada por  $\frac{M}{s-c}$ . En general para  $\operatorname{Re} s < c$  hay singularidades y  $\tilde{f}(s)$  puede ser multivalente.

La cuestión central es si la transformación dada por (III.1) se puede invertir y si hay una fórmula explícita para hacerlo. Desde luego se deben de imponer una serie de restricciones sobre  $f$  y  $\tilde{f}$  para que la transformación sea invertible. Hay una literatura muy extensa sobre el comportamiento de la transformada de Laplace, por esto el objeto de éste capítulo no es el de discutir las hipótesis técnicas más generales bajo las cuales se pueden llevar a cabo las operaciones deseadas. Nos limitare

remos a discutir algunos resultados particulares y en los casos no cubiertos por dichos resultados usaremos (como es común en todas las aplicaciones de las matemáticas) los métodos desarrollados de una manera puramente formal justificando a posteriori, de una manera directa en cada caso, la validez de los resultados obtenidos.

Comenzamos por discutir algunas de las propiedades más útiles de la transformada de Laplace:

Si  $f$  es derivable con transformada de Laplace  $\tilde{f}(s)$  entonces la transformada de Laplace de  $f'$ , denotada por  $\tilde{f}'(s)$  está dada por:

$$\tilde{f}'(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = s \tilde{f}(s) - f(0) \quad \text{Re } s > c. \quad (\text{III.2})$$

donde (III.2) se obtuvo integrando por partes. Las transformadas de las derivadas de orden superior se calculan de una manera análoga y el cálculo se deja como un ejercicio.

Una operación importante es la convolución de dos funciones  $f$  y  $g$  dada por  $f * g$  definida como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau. \quad (\text{III.3})$$

La transformada de Laplace de  $f * g$  se puede obtener en términos de  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  usando (III.1). En efecto:

$$\begin{aligned}
 (f * g) \tilde{\phantom{f}}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau dt = \\
 &= \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t-\tau) g(\tau) d\tau dt = \int_0^{\infty} g(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t-\tau) dt = \\
 &= \tilde{f}(s) \cdot \tilde{g}(s).
 \end{aligned}$$

Este resultado nos permitirá resolver cierto tipo especial de ecuaciones integrales.

Se deja como un ejercicio el mostrar que no hay ninguna función de tipo exponencial  $\delta$  con la propiedad de que

$$f * \delta = f$$

para toda  $f$ .

La fórmula de inversión para la transformada de Laplace se prueba a partir de la fórmula correspondiente para la transformada de Fourier. La transformada de Fourier se discutirá con detalle en la siguiente parte de este curso de suerte tal que nosotros nos limitaremos a enunciar una versión del teorema de Fourier adecuada para nuestro propósito.

**TEOREMA:** Sea  $f$  una función continua y absolutamente integrable en  $-\infty < x < \infty$ , con la propiedad de que el intervalo  $-\infty < x < \infty$  se puede dividir en un número finito de intervalos donde  $f$  es monótona. Entonces la transformada de Fourier  $\hat{f}(k)$  definida por

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \quad (\text{III.4})$$

existe. Además la función original  $f(x)$  se recupera en término de la función  $\hat{f}(k)$  con la fórmula

$$f(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-K}^K e^{ikx} \hat{f}(k) dk. \quad (\text{III.5})$$

Usando el teorema arriba enunciado podemos probar la fórmula de inversión para la transformada de Laplace.

Inversión de la transformada de Laplace: Supongamos que para  $\text{Re } s > a$   $\tilde{f}(s)$  es la transformada de Laplace de una función  $f(t)$  que satisface las condiciones del teorema de Fourier. Entonces la fórmula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{c-iL}^{c+iL} \tilde{f}(s) e^{st} ds, \quad c > a \quad (\text{III.6})$$

expresa a  $f(t)$  en términos de  $\tilde{f}(s)$ .

Para demostrar (III.6) considérese la función auxiliar  $e^{-ct} f(t)$  la cual satisface las hipótesis del teorema de Fourier. Entonces usando (III.4) y (III.5) con la función  $e^{-ct} f(t)$  obtenemos

$$\begin{aligned}
 e^{-ct} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L dk \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ckn} f(n) e^{-ikn} d_n e^{ikt} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L dk e^{ikt} \int_0^{\infty} e^{-(c+ik)n} f(n) dn
 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L e^{(c+ik)t} dk \int_0^{\infty} e^{-(c+ik)n} f(n) dn \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{c-iL}^{c+iL} e^{st} \tilde{f}(s) ds.
 \end{aligned}$$

que es el resultado deseado.

En virtud de la fórmula (III.6) la inversión de la transformada de Laplace se puede llevar a cabo utilizando el cálculo de residuos. Ilustraremos la técnica para invertir la transformada usando un ejemplo especial que será de utilidad más adelante.

Considere la función  $f(t) = t^\alpha$ ,  $-1 < \alpha < 0$  cuya transformada está dada por

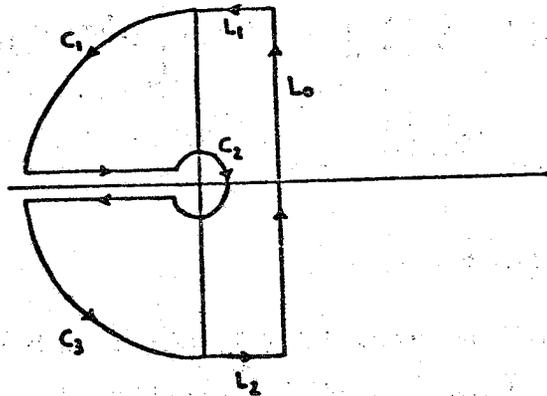
$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} t^\alpha e^{-st} dt = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} t^\alpha e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

Donde la función multivaluada  $(s^{\alpha+1})^{-1}$  se tomó como real para  $s > 0$  y libre de singularidades en el semiplano  $\text{Re } s > 0$ .

La transformada inversa de  $s^{-(\alpha+1)} \Gamma(\alpha+1)$  está dada por

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{st} \Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} ds, \quad \text{Re } s = c > 0 \quad (\text{III.7})$$

Para calcular (III.7) considere la rama de  $s^{-(\alpha+1)}$  definida por  $e^{-(\alpha+1) \ln z}$  donde  $|\arg z| < \pi$  y complete el contorno de (III.7) tal como se indica en la figura.



El contorno  $L$  (formado por los segmentos  $L_0, L_1, L_2$  y los semicírculos  $c_1$  y  $c_3$  de radio  $R$  y el círculo  $c_2$  de radio  $\rho$ ) encierra una región en la cual  $z^{-(\alpha+1)}$  es una función analítica, de donde

$$\int_L \frac{e^{st}}{s^{\alpha+1}} ds = 0 \quad (\text{III.8})$$

Es fácil probar, y queda como un ejercicio para el lector, que cuando los contornos  $L_1$  y  $L_2$  se alejan del eje real, paralelos a él, y los ra-

dios  $R$  y  $\rho$  tienden a infinito y a cero respectivamente las contribuciones a (III.8) a lo largo de estos contornos son cero. De donde

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi i} \int_{c-1-i\infty}^{c+1+i\infty} \frac{e^{st}}{s^{\alpha+1}} ds &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi i} \left[ \int_{-\infty}^0 \frac{e^{xt}}{(-x)^{\alpha+1}} e^{i\pi\alpha} dx + \int_0^{-\infty} \frac{e^{xt}}{(-x)^{\alpha+1} \rho^{-i\pi\alpha}} dx \right] = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\pi} \operatorname{sen}(-\pi\alpha) \int_0^{\infty} e^{-xt} x^{-(\alpha+1)} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(-\pi\alpha) t^{\alpha} \end{aligned}$$

y usando la identidad  $\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(-\pi\alpha)}$  recobramos la función original  $f(t)$ .

Este ejemplo muestra la técnica general para invertir transformadas de Laplace. La idea es deformar el contorno de inversión en contornos alrededor de los cortes ramales y un semicírculo cuya contribución es nula. Cuando además de cortes ramales hay polos se toman también en cuenta los residuos correspondientes.

Se deja como un ejercicio el cálculo de la transformada y de su inversa de las funciones

- i)  $f(t) = e^{\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$
- ii)  $f(t) = \cos \beta t$
- iii)  $f(t) = 1$

$$\text{iv) } f(t) = \text{sen } h\lambda t$$

v) Considerese una función  $f$  tal que  $|f(t)| \leq M e^{-\alpha t}$  para alguna  $M$  y  $\alpha > 0$ .

Supongase que los números

$$b_n = \int_0^{\infty} f(t) t^n dt$$

son conocidos. Es posible recuperar  $f$  en términos de los números  $b_n$ ? Si es así de una "fórmula explícita". Sugerión: Considere la transformada de Laplace de  $f$  desarrollada en serie de Taylor alrededor de  $s = 0$ .

### III.2 Aplicaciones de la transformada de Laplace.

i) Aplicación a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

En esta sección examinaremos algunos de los conceptos estudiados en otras partes de este curso utilizando la Transformada de Laplace.

Considerese el sistema de ecuaciones

$$\underline{y}'(t) = A \underline{y}(t), \quad \underline{y}(0) = \underline{y}_0 \quad (\text{III.9})$$

donde  $A$  es una matriz constante. Definiendo la transformada de Laplace para una función con valores vectoriales componente o componente, es decir,

$$\tilde{y}_i(s) = \left( \int_0^{\infty} \underline{y}(t) e^{-st} dt \right)_i \equiv \text{def} \int_0^{\infty} y_i(t) e^{-st} dt$$

es fácil checar que las derivadas transforman de la misma manera que en el caso escalar. De donde la transformada de (III.9) satisface

$$(sI-A)\tilde{y}(s) = \underline{y}_0 \quad (\text{III.10})$$

La matriz  $(sI-A)$  para  $\text{Re } s$  suficientemente grande es invertible, de donde si  $\text{Re } s > c$  digamos, la transformada  $\tilde{y}(s)$  está dada por:

$$\tilde{y}(s) = (sI-A)^{-1} \underline{y}_0 \quad (\text{III.11})$$

Usando (III.11) la solución de (III.9) es:

$$\underline{y}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} (sI-A)^{-1} \underline{y}_0 e^{st} ds, \quad d > c. \quad (\text{III.12})$$

Analizaremos ahora la expresión (III.12). Cuando  $t < 0$  completamos el contorno en el semiplano  $\text{Re } s > 0$  y obtenemos  $\underline{y}(t) = 0$ . (Quedando como un ejercicio verificar el argumento en detalle). Para calcular  $\underline{y}(t)$  para  $t > 0$  se completa el contorno en el semiplano  $\text{Re } s < 0$  y para esto es necesario conocer las singularidades  $(sI-A)^{-1}$ . La expresión para  $(sI-A)^{-1}$  es

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\text{adjunta de } (sI-A)}{\det (sI-A)} \quad (\text{III.13})$$

de donde se sigue que las únicas singularidades del operador resolvente  $(sI-A)^{-1}$  son las raíces del polinomio característico de  $A$ , es decir los eigenvalores de  $A$ . Es fácil ver que cuando  $|s| \rightarrow \infty$  la resolvente tiende a cero como  $\frac{1}{s}$  de aquí que el contorno se puede completar con un semicírculo en el semiplano izquierdo y las únicas contribuciones para (III.12)

proviene los polos.

En este caso los residuos son vectores multiplicados por exponenciales  $e^{s_j t}$  donde  $s_j$  son los eigenvalores de  $A$ .

De aquí vemos que las soluciones serán exponencialmente decrecientes cuando  $\text{Re } s_j \leq 0$  que es la condición de "estabilidad" para la matriz  $A$ . Las soluciones serán osilatorias cuando las  $s$ es son puramente imaginarias.

Debido a que las singularidades de  $(sI-A)^{-1}$  solo son polos se tiene para  $t > 0$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c (sI-A)^{-1} e^{st} y_0 ds$$

donde  $c$  es un contorno cerrado que incluye todas singularidades de  $A$ . Debido a que  $c$  es de longitud finita se puede intercambiar el límite cuando  $t \rightarrow 0$  con la integración obteniendo

$$y_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_c (sI-A)^{-1} y_0 ds = \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_c (sI-A)^{-1} ds \right\} y_0 \quad (\text{III.14})$$

para toda  $y_0$ , de donde

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_c (sI-A)^{-1} ds. \quad (\text{III.15})$$

quedando así expresada la identidad en términos de la resolvente.

La integral en (III.15) es la suma de los residuos en los eigenva

tores de  $A$ , de aquí que (III.15) provee una descomposición de la identidad en término de matrices asociadas con  $A$ . Para tener una idea más clara de (III.15) examinaremos el caso de  $A$  simétrica. En éste caso  $A$  tiene una base de eigenvectores ortogonales, supongamos además todos los eigenvalores  $\lambda_j$  son distintos. En este caso la resolvente está dada por:

$$(sI-A)^{-1}w = \sum_{j=1}^n \frac{(w, e_j)e_j}{-\lambda_j + s}$$

de donde

$$(sI-A)^{-1} = \sum_{j=1}^n \frac{Pe_j}{s-\lambda_j} \quad (\text{III.16})$$

donde los operadores  $Pe_j$  definidos por  $Pe_j y_0 = (y_0, e_j)e_j$  son las proyecciones sobre los espacios invariantes de  $A$ . Substituyendo (III.16) en (III.15) e integrando obtenemos:

$$I = \sum_{j=1}^n Pe_j$$

De ésta última expresión tenemos una interpretación de los residuos en los polos de  $(sI-A)$  como las matrices de proyección sobre los espacios invariantes de  $A$ . Para matrices no simétricas los residuos de la resolvente tienen la interpretación de matrices de proyección sobre espacios invariantes de  $A$  pero en general estos espacios no son de dimensión 1. Una descripción completa de estos residuos se puede dar utilizando la forma canónica de Jordan. Nosotros nos limitaremos a dejar como ejercicio para el lector el cálculo de las proyecciones para la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Para finalizar esta sección sugerimos examinar el problema para osciladores amortiguados y acoplados

$$\underline{f}''(t) + \Gamma \underline{f}'(t) - k/\Delta \underline{f}(t) = 0$$

$$\underline{f}(0) = \underline{f}_0$$

$$\underline{f}'(0) = 0$$

donde  $\Delta$  es la matriz de Rayleigh y  $\Gamma$  una matriz diagonal positiva utilizando la transformada de Laplace. En particular decida si las soluciones son estables. ¿Que pasa si  $\Gamma$  es negativa?. Examine el caso con  $\Gamma = 0$  cuando ésta está excitada por una fuerza  $\underline{F}(t) = \underline{A}_0 e^{i\omega t}$  donde  $\omega$  es una de las frecuencias naturales del sistema.

ii) Aplicación a ecuaciones parciales y a ecuaciones integrales.

Como primer ejemplo estudiaremos el problema para la cuerda vibrante. La ecuación de movimiento se obtiene aplicando la segunda ley de Newton a la cuerda. Si  $y$  denota el desplazamiento de la posición de equilibrio,  $T$  la tensión y  $\rho$  la densidad de la cuerda la ecuación de movimiento es

$$y_{xx} = \frac{1}{c^2} y_{tt} \quad , \quad c^2 = T/\rho \quad .$$

donde  $x$  es la coordenada horizontal y  $t$  el tiempo. La velocidad de la cuerda en la dirección vertical está dada por  $y_t$ . Considere el problema para  $y$  dado por:

$$y_{xx} = \frac{1}{c^2} y_{tt} \quad \text{para } 0 \leq x < \infty, \quad t \geq 0$$

$$y(x,0) = y_t(x,0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x < \infty \quad (\text{III.17})$$

$$y(0,t) = f(t) \quad \text{que es conocida}$$

$$y \text{ acotada para } 0 \leq x < \infty, \quad t \geq 0.$$

La situación física descrita por (III.17) es la de una cuerda originalmente en reposo excitada en el extremo izquierdo. En éste caso es de esperarse que la excitación producida en  $x = 0$  tarde un cierto tiempo en propagarse por la cuerda, es pues de interés calcular, para cada punto  $x$  cuanto tarda en llegar la señal. También tiene interés calcular la forma de la señal para  $t > 0$ .

Resolveremos (III.17) usando la transformada de Laplace ent para obtener así una ecuación ordinaria en  $x$  para la transformada  $\tilde{y}$ . La ecuación para  $\tilde{y}$  es:

$$\tilde{y}_{xx}(x,s) = \frac{1}{c^2} s^2 \tilde{y}$$

$$\tilde{y}(0,s) = \tilde{f}(s)$$

$$\tilde{y}(x,s) \text{ acotada para } x \rightarrow \infty.$$

la solución es

$$\tilde{y}(x,s) = \tilde{f}(s) e^{-\frac{sx}{c}} \quad \text{para } \text{Re } s > d$$

donde  $d$  es suficientemente grande para dejar a la izquierda todas las singularidades de  $\tilde{f}$ .

La solución para  $\tilde{y}(x,t)$  es:

$$y(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s) e^{s(t - \frac{x}{|c|})} ds. \quad (\text{III.18})$$

De (III.18) observamos que para  $x > 0$   $y(x,t) = 0$  si  $t < \frac{x}{|c|}$  ya que en éste caso el contorno se cierra en  $\text{Re } s > 0$ . Esto pone de manifiesto que la señal se propaga con una velocidad  $|c|$ , de izquierda a derecha. Para tiempos posteriores la solución está dada por  $f(t-x/|c|)$ . Esto indica que la señal se propaga sin dispersión ni atenuación.

Es de interés resolver, e interpretar la solución, del problema de D'Alembert para la ecuación de onda

$$y_{xx} - y_{tt} = 0, \quad -\infty < x < \infty, t \geq 0$$

$$y(x,0) = f(x), \quad y_t(x,0) = 0, \quad f(x) = 0 \text{ para } |x| > a$$

$$y(x,t) \text{ acotada}$$

utilizando la transformada de Laplace, la cual se deja como un ejercicio.

La transformada de Laplace también puede usarse para resolver ecuaciones integrales de la forma

$$\int_0^t k(t-\tau) f(\tau) d\tau = g(t) \quad \text{para } t \geq 0. \quad (\text{III.19})$$

donde las funciones  $k$  y  $g$  son dadas. La solución de (III.15) está dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \{ \tilde{g}(s)/\tilde{k}(s) \} e^{st} ds. \quad (\text{III.20})$$

ya que la transformada de  $k * f$  es  $\tilde{k} \tilde{f}$ .

Una ecuación muy famosa que puede resolverse usando (III.20) es la ecuación de Abel, es decir

$$\int_0^t f(\tau)/\sqrt{t-\tau} d\tau = g(t)$$

donde  $g$  es dada. Queda como un ejercicio encontrar una expresión para  $f(t)$  de la forma

$$f(t) = \int_0^t G(t,\tau) g(\tau) d\tau.$$

Como última aplicación consideraremos el uso de 2 transformados simultáneos para encontrar soluciones a la ecuación de onda en tres dimensiones expresándolas como "potenciales retardados".

Con este fin es necesario introducir transformadas de Fourier en 3 dimensiones. Las definiciones son análogas a las dadas para funciones de una variable y son:

Sea  $f(\underline{x})$  una función suficientemente lisa integrable en  $\mathbb{R}^3$ , la transformada de Fourier  $\hat{f}(\underline{k})$  es una función de tres variables definida por

$$\hat{f}(\underline{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} f(\underline{x}) d\underline{x} \quad \text{donde } \underline{k} \cdot \underline{x} = k_1 x + k_2 y + k_3 z.$$

La fórmula de inversión que expresa a  $f(\underline{x})$  en término de  $\hat{f}(\underline{k})$  es:

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} \hat{f}(\underline{k}) d\underline{k}.$$

Se deja como un ejercicio el verificar que la transformada de Fourier de  $\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$  es  $-k \cdot k \hat{f}(\underline{k})$ . y que la transformada de Fourier de la convolución

$$(f * g)(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\underline{x} - \underline{y}) g(\underline{y}) d\underline{y}$$

es el producto  $\hat{f}(\underline{k}) \hat{g}(\underline{k})$ .

El problema a resolver es

$$y_{tt} - \nabla^2 y = f(\underline{x}, t) \quad , \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad t > 0, \quad f(\underline{x}, t) = 0, \quad |\underline{x}| > R.$$

(III.21)

$$y(\underline{x}, 0) = y_t(\underline{x}, 0) = 0$$

y acotada para  $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $t > 0$ ,

donde  $y$  representa, por ejemplo, la intensidad del sonido producido por la funete especificada por la función  $f$ .

Para resolver (III.21) tómesese la transformada de Laplace en  $t$  y de Fourier en  $\underline{x}$  obteniendo, si éstos son denotados por  $\hat{y}$ :

$$(k^2 + s^2) \hat{y} = \hat{f}$$

de donde

$$\hat{y}(k, s) = \frac{\hat{f}(k, s)}{k^2 + s^2}$$

y la solución de (III.21) está dada por:

$$y(\underline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{f}(k, s)}{k^2 + s^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \underline{x}} e^{st} d\underline{k} ds. \quad (\text{III.22})$$

Para evaluar las integrales en (III.22) es conveniente primero invertir la transformada de Fourier y luego la de Laplace. Al calcular la transformada inversa.

$$\tilde{y}(\underline{x}, s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f} \frac{e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}}}{k^2 + s^2} d\underline{k}$$

es conveniente utilizar el teorema de convolución quedando  $\tilde{y}(\underline{x}, s)$  expresada como

$$\tilde{y}(\underline{x}, s) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\underline{x} - \underline{x}', s) \tilde{f}(\underline{x}', s) d\underline{x}'$$

donde

$$G(\underline{\xi}, s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-i\underline{k} \cdot \underline{\xi}}}{k^2 + s^2} d\underline{k} \quad (\text{III.23})$$

La función  $G(\underline{\xi})$  se calcula cambiando de variable en (III.23) utilizando coordenadas polares con  $\underline{\xi}$  como eje y  $r = |\underline{k}|$ . Usando el cambio de variable (III.23) dá

$$\begin{aligned} G(\underline{\xi}, s) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{e^{-ir(\xi) \cos \theta}}{r^2 + s^2} r^2 \sin \theta d\theta dr \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{+i|\xi|r} - e^{-i|\xi|r}}{|\xi| (r^2 + s^2)} r dr \end{aligned}$$

de donde (calculando la integral en  $r$  usando el teorema de Cauchy, la cual queda como ejercicio) se obtiene

$$G(\underline{\xi}, s) = \frac{1}{2} \frac{e^{-s|\underline{\xi}|}}{|\underline{\xi}|} \quad \text{para } \operatorname{Re} s > 0, \quad (\text{III.24})$$

Utilizando (III.24) y (III.23) en (III.22) tenemos:

$$y(\underline{x}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{R^3} \frac{f(\underline{x}', s)}{2|\underline{x}-\underline{x}'|} e^{s(t-|\underline{x}-\underline{x}'|)} dx' ds$$

e invirtiendo la transformada de Laplace obtenemos

$$y(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \int_{R^3} \frac{f(\underline{x}', t-|\underline{x}-\underline{x}'|)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} dx' \quad (\text{III.25})$$

que es la solución buscada. La fórmula (III.25) tiene una interpretación física interesante, queda como un ejercicio discutirla y justificar así el nombre de "potencial retardado" que se da a (III.25).

#### IV Ondas viajeras en ecuaciones de difusión

Las ecuaciones diferenciales de difusión aparecen en varios contextos entre ellos la teoría de migración de poblaciones. Cuando estas ecuaciones son lineales no sostienen ondas de difusión, sin embargo al añadir efectos no lineales soluciones con la forma de frente de ondas son posibles y se observan en varias situaciones de interés ecológico.

Empezamos por interpretar la ecuación de difusión en el contexto de la teoría de poblaciones.

Llamando  $n(x,t)$  a la cantidad de animales, por unidad de longitud, en el punto  $x$  el tiempo  $t$ . Tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^x n(s,t) ds = \text{rapidez de cambio del número de animales en el intervalo } (x_0, x). = I$$

Como los animales se conservaron tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^x n(s,t) ds = \text{flujo de animales que entran en } x_0 - \text{flujo de animales que salen en } x + \text{números que nace por segundo} - \text{números que muere por segundo.} \quad (\text{IV.1})$$

Los lados derechos de esta ecuación (IV.1) son los que deben de modelarse de acuerdo nuestra comprensión de la población.

Comenzamos por tomar:

número que nace por segundo =  $\alpha n(x,t)$ , que es la ley de Malthus; donde  $\alpha$  es la tasa de natalidad.

El término de muerte lo tomamos como  $-\beta n^2(x,t)$  que es la hipótesis usual de competencia entre los individuos de la misma especie. Finalmente el flujo de individuos que deja la región tiene varias maneras de modelarse. La más simple es la hipótesis de difusión la cual nos dice que los pobladores van a emigrar de lugares de concentración alta o lugares de concentración baja. Es decir el flujo que sale es

$$D n_x(x,t)$$

ya que si  $n_x < 0$  abandonan la región y  $n_x > 0$  entran a ella. El coeficiente  $D$  es una característica de la población que supondremos constante aunque puede depender de  $n(x,t)$ . Supondremos  $D > 0$  aunque muchas veces las grandes concentraciones de población parecen atraer y no repeler a nuevos individuos.

Utilizando esto tenemos que la ecuación de balance (IV.1) queda así.

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^x n(s,t) ds = \alpha n(x,t) - \beta n^2(x,t) - D n_x(x_0,t) + D n_x(x,t).$$

Derivando con respecto a  $x$  tenemos

$$n_t(x,t) = \alpha n(x,t) - \beta n^2(x,t) + D n_{xx}(x,t) \quad (\text{IV.2})$$

y hay que suplementarla con la condición inicial  $\eta(x,0) = f(x)$  que es la distribución inicial de la población.

Esta ecuación (IV.2) se llama la ecuación de Fisher y fué estudiada en gran detalle por Kolmogorov, Petrovski y Piskunov en 1937. Es la base para los estudios modernos de ecología matemática.

Estudiamos esta ecuación en varios límites de interés. Suponiendo que  $D = 0$ , lo que equivale a despreciar los efectos espaciales tenemos que  $\eta$  satisface una ecuación diferencial ordinaria.

$$\eta(x,t) = \alpha \eta(x,t) - \beta \eta^2(x,t)$$

$$\eta(x,0) = f(x).$$

Esta ecuación puede resolver fácilmente (dejamos los detalles al lector) y tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(x,t) = \alpha/\beta$$

es decir que la población alcanza un estado de equilibrio uniforme en  $x$ .

Otro límite que puede estudiarse por los métodos expuestos hasta ahora en las notas es el límite de una población pequeña, despreciando el término  $\eta^2$  en (IV.2). Tenemos:

$$n_t = \alpha n + Dn_{xx}$$

$$n(0,x) = f(x)$$

Tomando la transformada de Fourier y denotandola con  $\hat{n}$  vemos que

$$\hat{n}_t = \alpha \hat{n} - Dk^2 \hat{n}$$

$$\hat{n}(0) = \hat{f}(k)$$

y la solución es  $\hat{n}(k,t) = f(k) e^{\alpha t} e^{-k^2 t}$  de donde

$$n(x,t) = e^{\alpha t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \hat{f}(k) dk$$

Observamos que la integral se comporta como  $t^{-1/2}$  para  $t \rightarrow \infty$  (queda como ejercicio el verificarlo) y en consecuencia  $n(x,t)$  crece exponencialmente. Es decir que cuando se tiene una población inicial pequeña esta se empieza a reproducir y después de un cierto tiempo el término de mortalidad empieza a ser importante y nuestra solución deja de ser válida. Lo único que se aprende de esta solución es que la población en una área crece más debido a la mortalidad que lo que disminuye debido a la difusión.

Para una descripción completa del fenómeno uno necesita incluir el término  $-\beta n^2$ . La intuición que se gana de la ecuación independiente de  $x$  es que la población se equilibre en  $+\alpha/\beta$ , por otro lado tenemos que la di

fusión mueve de alta concentración a baja concentración. Se espera entonces que el valor de equilibrio  $\alpha/\beta$  se desplace hacia los lugares de menor concentración hasta que toda la publicación se equilibre en ese valor. Es pues necesario estudiar primero si la solución  $\alpha/\beta$  es estable, es decir si para valores muy cercanos de las condiciones iniciales a  $\alpha/\beta$  tenemos que la solución efectivamente se acerca a  $\alpha/\beta$  a medida que pasa el tiempo. Si esto no sucediere sería inconsistente pensar que cualquier condición inicial evolucionare a ese estado. Para investigar la estabilidad tomemos:

$\eta = \frac{\alpha}{\beta} + \tilde{\eta}$  sustituimos en la ecuación despreciando los términos  $\tilde{\eta}^2$  obtenemos

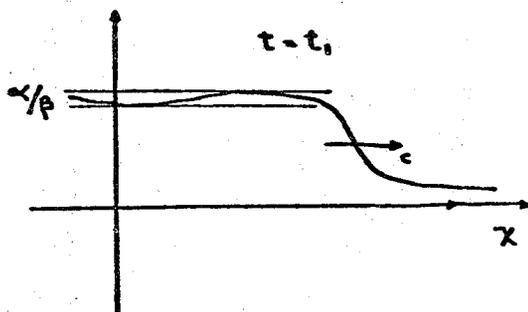
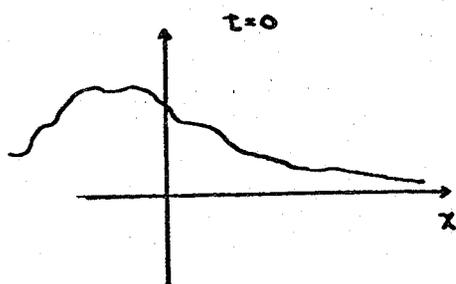
$$\tilde{\eta}_t = D\tilde{\eta}_{xx} - \alpha\tilde{\eta}$$

con condición inicial  $\tilde{\eta}(0,x) = \tilde{f}(0,x)$ . La solución a este problema es fácil de obtener y está dada por

$$\tilde{\eta}(t) = e^{-\alpha t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dt k^2} e^{-ikx} \tilde{f}(k) dk$$

Vemos así que  $\tilde{\eta} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y esto nos muestra que la solución  $\alpha/\beta$  es un candidato razonable para el estado final.

Lo que aún no es claro es cómo evoluciona una condición inicial arbitraria a dicho estado final. Uno de los descubrimientos notables de Fisher y K;P;P; fué que existe una onda de concentración que se propaga de alta concentración a baja concentración tal como se ven en la figura



La velocidad de la onda que es  $c$  está ligada a los parámetros  $\alpha, \beta, D$  y depende además de la condición inicial. El problema es ahora el de determinar soluciones de tipo onda viajera y expresar la velocidad  $c$  en términos de los parámetros del problema. A priori no es claro que existan soluciones tipo onda viajera y lo que haremos ahora es convencer al lector de su existencia con una técnica que es común a todos los problemas de este tipo.

Buscamos pues una solución de la forma  $\eta(x,t) = \phi(x-ct)$  donde  $c$  es la velocidad y  $\phi$  la función a determinar. Llamando  $\xi = x - ct$  y denotando por  $\phi'$  la derivada respecto a  $\xi$  tenemos que  $\phi$  satisface:

$$D\phi''(\xi) + c\phi'(\xi) + \phi(\xi)(\alpha - \beta\phi(\xi)) = 0 \quad -\infty < \xi < \infty \quad (\text{IV.3})$$

y las condiciones de frontera  $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi(\xi) = 1$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi(\xi) = 0$ . Este es un problema no lineal de valores propios ya que uno se pregunta para cuales valores de  $c$  hay soluciones, positivas no triviales del problema.

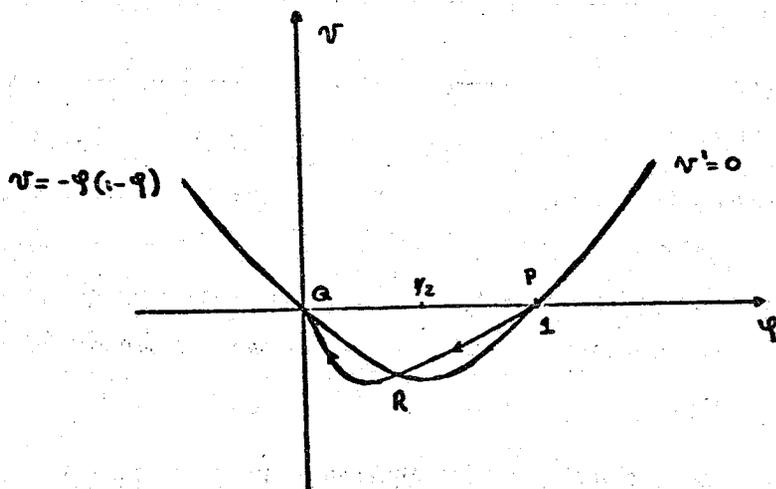
La manera de resolver estos problemas es en el plano fase. Para simplificar notación tomemos  $\alpha = \beta = D = 1$  y llamando  $\phi' = v$  tenemos

$$\phi' = v \quad (IV.4)$$

$$v' = (cv + \phi(1-\phi))$$

El plano fase del sistema (IV.4) se ilustra en la figura. Los puntos críticos son  $(1,0)$  y  $(0,0)$  y la condición de frontera pide encontrar una  $\phi$ , (una órbita en el plano fase) que una al punto crítico  $(1,0)$  con el  $(0,0)$  cuando "el tiempo"  $\xi$  va de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

El problema se transforma en encontrar los valores de  $c$  para los cuales es posible construir esta órbita.



El candidato es la órbita que une a  $P$  con  $Q$  cruzando la parábola  $v = -\phi(1-\phi)$  en  $R$ . Esta solución tiene un punto de inflexión en  $R$  y decrece monótonamente a cero. Solamente queda convencerse que la órbita  $P R Q$  existe para valores apropiados de  $c$ . Ahora veremos que esta órbita efectivamente existe.

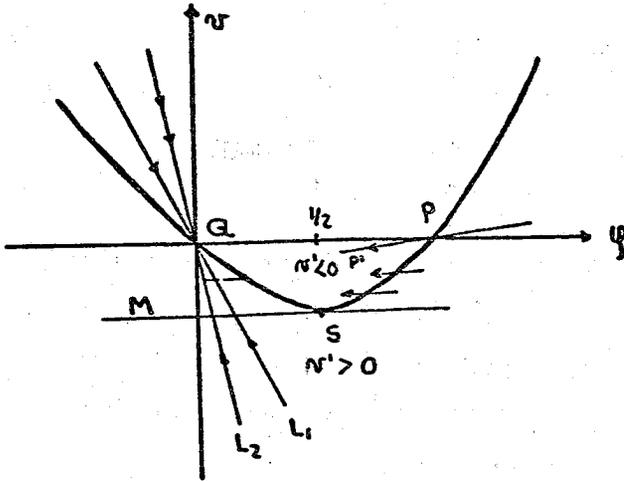
Para encontrar esta  $\phi$  el punto P debe de ser inestable y el Q estable. Comenzamos por estudiar el punto P. Linearizando el sistema alrededor de P llamando  $\phi = 1 + \tilde{\phi}$   $v = \tilde{v}$  tenemos

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$$

El punto P es un punto silla con valores propios  $\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}$ ,  
 $\lambda_2 = \frac{-(c + \sqrt{c^2 + 4})}{2}$  La dirección estable cuando  $\xi \rightarrow -\infty$  es aquella asociada con el valor propio  $\lambda_1$  y es la recta  $v = -\frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} \phi$ .

La linearización alrededor del punto Q nos dá que este es un nodo estable con valores propios  $\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4}}{2}$   $\lambda_2 = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4}}{2}$  si es que  $c^2 \geq 4$  con direcciones  $v = \lambda_1 \phi$ ,  $v = \lambda_2 \phi$ . Si  $c^2 < 4$  tenemos un punto espiral estable pero esto no tiene interés en nuestro contexto ya que buscamos una  $\phi$  siempre positiva y soluciones que llegan a un punto espiral oscilan alrededor del cero y son inaceptables. Por esto vemos que  $c^2 \geq 4$  probaremos ahora que para cada valor  $c \geq 2$  tenemos una solución en forma de onda viajera.

El plano fase incluyendo las direcciones en los puntos críticos para  $c \geq 2$  se muestran en la figura:



La dirección  $L_2$  tiene por ecuación  $\phi = -\frac{2}{c + \sqrt{c^2 - 4}} v$  y la  $L_1$  como ecuación  $\phi = -\frac{2}{c - \sqrt{c^2 - 4}} v$ .

Queremos probar que si  $c \geq 2$  entonces la órbita que sale de  $P$  en la dirección inestable es acotada. Una vez probado esto el teorema de Poincaré Bendixon nos dice que esta órbita termina en  $Q$  ya que no hay órbitas cerradas para este problema ya que  $\text{div}(v, -(cv + \phi(1-\phi))) = -c \neq 0$ . Basta pues probar que esta órbita es acotada. Saliendo pues de  $P$  en la dirección  $P$ ,  $P'$  tenemos que como  $v' < 0$  y  $v < 0$  la órbita saldrá de la parábola  $PSQ$  en algún punto  $R$  del arco  $SQ$ . (No puede salir de  $PS$  porque el campo vectorial entra, si no sale ya no hay nada que hacer ya que la órbita es acotada y entonces va a  $Q$ ).

Supongamos que salga por un punto  $R$ . En la región comprendida entre el arco  $QS$  la recta  $L_2$  y la recta  $MS$  tenemos que la pendiente de la

órbita  $\frac{d\phi}{dv}$  que está dada por

$$\frac{d\phi}{dv} = - \frac{v}{cv + \phi(1-\phi)}$$

Esta pendiente es mayor en valor absoluto que el valor absoluto de la pendiente de la recta  $L_2$ . De aquí se sigue que la órbita que sale por R tiene el valor de  $\phi$  siempre mayor que el valor de  $\phi$  de la recta  $L_2$ . Esto muestra que la órbita no puede escapar de esta región. Usando Poincaré Bendixon esta órbita viaja hasta Q.

Esto completa la prueba de existencia de ondas viajeras en esta ecuación de difusión. Es importante notar que la no linealidad produce esta onda ya que las ecuaciones de difusión lineales no tienen este tipo de soluciones.

Un resultado muy importante de K, P, P es que una condición inicial conforma de escalón:  $\eta = 1$ , si  $x \leq 0$ ,  $\eta = 0$   $x > 0$ ; se transforma en una onda con velocidad  $c = 2$ , es decir que la onda con velocidad más baja es en cierta forma la preferida. Referimos al lector interesado al trabajo original. Queda como un ejercicio repetir el argumento y encontrar la velocidad de propagación más baja en términos de los parámetros  $\alpha, \beta, D$ . El resultado es:  $c = 2\sqrt{D\alpha}$  que indica una velocidad de propagación proporcional a la natalidad y la difusión. Obsérvese que  $c$  no depende de la mortalidad.

Las formas explícitas de estas ondas viajeras pueden encontrarse en ciertos casos límite de interés. Por ejemplo al tener

$$D \phi'' + c \phi' + \alpha \phi - \beta \phi^2 = 0$$

y suponer que la natalidad  $\alpha$  es pequeño. Dado que  $\phi$  va hasta un valor máximo  $\alpha/\beta$  podemos escalar a la  $\phi$  de la forma  $\phi = \alpha \psi$  donde  $\psi$  satisface

$$D\alpha \psi + c \psi + \alpha^2(\psi - \beta \psi^2) = 0$$

Como a medida que los dos puntos críticos 0 y  $\alpha/\beta$  se acercan la solución tarda más en llegar podemos tomar  $\psi = w(\alpha\xi)$  y obtener

$$D\alpha^2 w'' + c w' + (w - \beta w^2) = 0$$

Como  $\alpha$  es pequeño podemos despreciar el primer término de la ecuación y obtener

$$c w' + (w - \beta w^2) = 0.$$

Las soluciones pueden encontrarse con una integración simple y son funciones que van de  $\frac{1}{\beta}$  en " $\xi = -\infty$ " hasta cero en " $\xi = +\infty$ ".

Hay muchos otros problemas cuyas soluciones de tipo de onda viajera se puede encontrar de la misma forma. Aparecen en química, ecología, modelos del sistema nervioso etc.

## V Efectos de no homogeneidades en modelos de poblaciones.

La ecuación de Fisher estudiada en la sección anterior no toma en cuenta efectos de no homogeneidad en la natalidad, la difusión o la mortalidad los cuales podrían ser efectos importantes. Al tomar en cuenta la dependencia espacial de la natalidad, por ejemplo la ecuación de Fisher se modifica de la siguiente forma

$$n_t = \alpha(x) n - \beta n^2 + D n_{xx} \quad (V.1)$$

$$n(0,x) = f(x)$$

Como vimos en el ejemplo anterior cuando se desprecia la mortalidad  $\beta$  y la natalidad  $\alpha$  es uniforme la población crece ya que el término de migración no alcanza a equilibrar la natalidad porque esta es uniforme. Cabe pero la pregunta de que pasa si la natalidad esta confinada a una región  $|x| \leq L$  del espacio y hay migración. En este caso la migración podría equilibrar la natalidad y llegarse a un estado estacionario sin necesidad de mortalidad. Para investigar este problema tomamos la ecuación

$$n_t = \alpha(x)n + D n_{xx}$$

y nos preguntamos si existe una solución del problema

$$D n_{xx} + \alpha(x)n = 0$$

con  $\eta \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ . Es decir buscamos una función propia del problema con valor propio cero. Podemos investigar que sucede con el problema general de valores propios

$$Du_{xx} + \alpha(x) u = \lambda u$$

y luego estudiar si  $\lambda = 0$  es un valor propio o no. En el caso de encontrar un valor  $\lambda_0 > 0$  para el cual hay una solución  $u_{\lambda_0}$  sabríamos que el problema linearizado con valores iniciales (V.1) para no tendrá un estado estacionario como límite sino crecerá como  $e^{\lambda_0 t} u_{\lambda_0}(x)$  hasta que la mortalidad se vuelve importante. Es pues importante averiguar cual es el espectro del problema.

Un caso particular de interés puede ser el de una difusión  $D$  pequeña, llamando a  $\bar{x} = X/\sqrt{D}$  tenemos, cambiando de variables que

$$u'' + \alpha(\sqrt{D} \bar{x}) u = \lambda u$$

Ya que  $\sqrt{D} = \epsilon < 1$  utilizaremos la aproximación G,L,J,W,K,B que es uno de los métodos más empleados para estudiar ecuaciones con coeficientes variables cuando ellos varían lentamente.

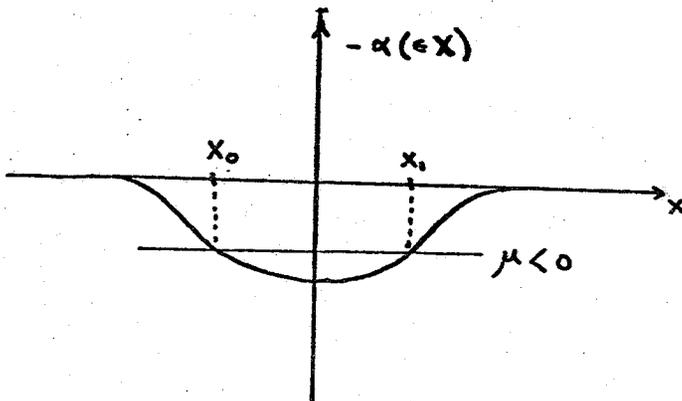
Queremos pues estudiar la ecuación

$$u'' + \alpha(\epsilon x) u = \lambda u \tag{V.2}$$

donde  $\epsilon$  es pequeño. Queremos buscar soluciones donde  $\lambda \geq 0$  ó  $-\lambda = \mu \leq 0$  y la función  $\alpha \geq 0$ . Tenemos así que

$$u'' + (\mu - \alpha(\epsilon x)) u = 0$$

La gráfica de la función  $-\alpha(\epsilon x)$  se ilustra en la figura y  $\mu \leq 0$  corresponde a soluciones inestables.



Para resolver (V.2) procedemos primero con un análisis cualitativo.

Si  $x_0 \leq x \leq x_1$  y  $\mu$  es como en la figura las soluciones de la ecuación (V.2) son oscilatorias ya que  $\mu + \alpha(\epsilon x) \geq 0$ . Por otra parte si  $x \geq x_1$  ó  $x \leq x_0$  las soluciones son exponenciales crecientes, o decrecientes ya que  $\mu + \alpha(\epsilon x) \leq 0$ . El problema es pues el de encontrar una solución que decaiga en  $-\infty$ , en  $+\infty$  y oscile entre  $x_0$  y  $x_1$ . Esto determinará los valores de  $\mu$  para los cuales hay soluciones acotadas cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .

Para  $x_0 \leq x \leq x_1$  si  $\alpha(\epsilon x) = \alpha$  fuera constante la solución sería una combinación lineal de  $\cos\sqrt{\mu+\alpha} x$  y  $\sin\sqrt{\mu+\alpha} x$ . En este caso como  $\alpha$  varía poco buscamos una solución de la forma

$$u = A(\epsilon x) e^{i \theta(\epsilon x)/\epsilon} + \epsilon u_1 \quad (1)$$

donde  $A$  varía lentamente porque es función de  $\epsilon x$  y la fase varía rápidamente ya que  $\frac{d}{dx} \frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon} = \theta'(\epsilon x)$  que es de orden uno.

Al substituir esta solución en la ecuación e igualar potencias de  $\epsilon$  obtenemos ecuaciones para  $\theta$  y para  $A$ . Tenemos

$$O(\epsilon^0) \quad \{-\dot{\theta}^2 + (\mu + \alpha(\epsilon x))\} A e^{i\theta(\epsilon x)/\epsilon} = 0$$

$$O(\epsilon) \quad u_1'' + (\mu + \alpha(\epsilon x)) u_1 = (2 \ddot{A}\theta + \ddot{A}\theta) e^{i\theta(\epsilon x)/\epsilon}$$

Para obtener soluciones no triviales tenemos que

$$\dot{\theta}^2 = \mu + \alpha(\epsilon x)$$

y para obtener una solución acotada para  $u_1$  tenemos que tomar

$$2 \ddot{A}\theta + \ddot{A}\theta = 0$$

que nos dá una solución de la forma

$$u = \frac{c}{\{\mu + \alpha(\epsilon x)\}^{1/4}} e^{i \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon x} (\mu + \alpha(s))^{1/2} ds} + \frac{D}{\{\lambda + \alpha(\epsilon x)\}^{1/4}} e^{-i \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon x} (\mu + \alpha(s))^{1/2} ds} + \epsilon u_1 \quad (V.3)$$

donde las constantes  $c$  y  $D$  son arbitrarias. En el caso  $\alpha(s) = \text{constante}$  se reducen a las soluciones habituales. Estas soluciones son aceptables siempre que  $\mu + \alpha(\epsilon x) \neq 0$ . En este caso cuando  $x \rightarrow x_0$  ó  $x \rightarrow x_1$  la solución deja de ser válida ya que  $x_0$  y  $x_1$  son los puntos donde la solución pasa de oscilatoria a exponencial. De nuevo para  $x < x_0$  ó  $x > x_1$  tenemos el mismo tipo de soluciones pero ahora sin la  $i$  en el exponente de las exponenciales. Sin embargo no sabemos aún como acoplar las soluciones para hacer la transición de un comportamiento a otro.

Para estudiar esta transición examinemos en detalle que sucede en (V.2) en una vecindad del punto  $x_0(\mu)$ . Tenemos que  $u$  satisface en esa vecindad la ecuación

$$u'' + \epsilon \alpha'(x_0(\mu))(x - x_0(\mu))u = 0 \quad (\text{V.4})$$

Esta ecuación es la muy conocida ecuación de Airy, que estudiamos en la primera sección. La solución de interés para nuestros propósitos es

$$A_1((\epsilon \alpha'(x_0(\mu)))^{1/2}(x_0(\mu) - x)).$$

Esta solución se comporta como

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\{\epsilon \alpha'(x_0)(x_0 - x)\}^{1/4}} e^{-2/3(\epsilon \alpha'(x_0)(x_0 - x))^{3/2}}$$

cuando  $x < x_0$  y  $x$  se aleja de  $x_0$ . Por otra parte cuando  $x > x_0$  y

$x$  se aleja de  $x_0$  tenemos que la función  $A_i$  se comporta

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\{\epsilon\alpha'(x_0)(x-x_0)\}^{1/4}} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\epsilon\alpha'(x_0)(x-x_0)^{3/2} + \pi/4\right)$$

Vemos que este comportamiento es el mismo que el obtenido por el método

W.K.B. para la parte oscilatoria; cuando  $x$  esta lejos de  $x_0$ . Por otra parte la función  $A_i$  no tiene singularidades y es la que hace la transición.

Para encontrar pues la función que buscamos tenemos que encontrar una combinación lineal de soluciones en el interior que se acople con la función de Airy para  $x > x_0$ . Esto se hace encontrando en (V.3) las constantes  $c$  y  $D$  apropiadas (dejamos como ejercicio hacer los detalles) y obtenemos para

$$x_0 \leq x \leq x_1$$

$$u = \frac{S}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\{\mu+\alpha(\epsilon x)\}^{1/4}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\epsilon} \int_{x_0(\mu)}^{\epsilon x} (\mu+\alpha(s))^{1/2} ds + \pi/4\right) \quad (\text{V.5})$$

Esta solución tiene que empalmar por  $x$  en una vecindad de  $x_1$  con la correspondiente función de Airy apropiada para el punto  $x = x_1$ . La función de Airy apropiada para esta región se comporta como

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\{\epsilon\alpha'(x_1)(x-x_1)\}^{1/4}} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}(\epsilon\alpha'(x_1)(x-x_1))^{3/2} + \pi/4\right)$$

para  $x < x_1$ . Este comportamiento tiene que acoplarse con el correspondiente

comportamiento de la solución W.K.B. (V.5). Esto sucede si las fases de las soluciones difieren de una manera apropiada. La fase de la solución para  $x \leq x_1$  esta dada por

$$\frac{1}{e} \int_{x_0(\mu)}^x (\mu + \alpha(s))^{1/2} ds + \pi/4 = \frac{1}{e} \int_{x_0(\mu)}^{x_1(\mu)} (\mu + \alpha(s))^{1/2} ds - \frac{1}{e} \int_x^{x_1(\mu)} (\mu + \alpha(s))^{1/2} ds + \pi/4$$

que se puede reescribir como

$$-\frac{1}{e} \int_x^{x_1(\mu)} (\mu + \alpha(s))^{1/2} ds - \pi/4 + \frac{1}{e} \int_{x_0(\mu)}^{x_1(\mu)} (\mu + \alpha(s))^{1/2} ds + \pi/2.$$

Pero el primer término de esta fase es el negativo de la fase de la función de Airy. Entonces para acoplar esta solución con la función de Airy hay que escoger o bien

$$S = T \text{ y } \frac{1}{e} \int_{x_0(\mu)}^{x_1(\mu)} (\mu + \alpha(s))^{1/2} ds + \pi/2 = (2m + 1) \pi$$

o bien

$$S = -T \text{ y } \frac{1}{e} \int_{x_0}^{x_1(\mu)} (\mu + \alpha(s))^{1/2} ds + \pi/2 = (m + 1) \pi$$

Los valores aceptables de  $\mu$  deben de satisfacer la relación

$$\int_{x_0(\mu)}^{x_1(\mu)} (\mu + \alpha(s)) ds = \epsilon (m + 1/2)\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

que es la famosa regla de cuantización de Semmerfeld-Bohr. En nuestro caso *siempre* hay soluciones si  $\epsilon$  es suficientemente pequeña. Esto nos muestra que la natalidad nunca puede ser compensada por una migración cuando esta es pequeña. Por otra parte puede demostrarse que aún para migración grande hay siempre soluciones con  $\mu < 0$ . Esto demuestra que en una dimensión la capacidad de migrar no es suficiente para estabilizar una población. Queda como un ejercicio para el lector resolver exactamente el problema para una natalidad  $\alpha(x) = \alpha_0$  si  $|x| \leq l$  y  $\alpha(x) = 0$  para  $|x| > l$  y comparar sus resultados con los nuestros.

Quedan otros problemas abiertos en esta dirección, como el de encontrar los cambios en las ondas viajeras debidas a no homogeneidades que el lector puede investigar ya que es un problema aún no resuelto completamente.

## REFERENCIAS

- Ahlfors. Complex Analysis. Mc. Graw-Hill, 1966.
- Carrier: Cook, Pearson Functions of a Complex Variable, Theory and Technique. Mc.Graw-Hill, 1966.
- Coddington and Levinson Ordinary Differential Equations. Mc. Graw-Hill, 1955.
- Churchill, R.V. Functions of complex variable. Mc. Graw-Hill, 1966.
- Ince, E.L. Ordinary Differential Equations. Dover, 1926.
- Jeffreys and Jeffreys Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1946.
- Lancaster P. Matrix Theory. Wiley Interscience, 1971.
- Olver F.W. Asymptotics and special functions, Academic Press, 1974.
- Smoller, J. Shock waves and reaction diffusion equations. Springer-Verlag, 1983.
- Whittaker and Watson A course of Modern Analysis. Cambridge University Press, 1927.

ESTA OBRA SE TERMINO DE IMPRIMIR EN EL MES  
DE JUNIO DE 1985, EN LA SECCION DE OFFSET DEL  
CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL I.P.N.

LA EDICION CONSTA DE 500 EJEMPLARES Y  
SOBRANTES PARA REPOSICION, SU CUIDADO ESTUVO  
A CARGO DEL SR. GERMAN GONZALEZ CHAVEZ.