Paradojas, falacias, contra-ejemplos e inconsistencias en el análisis matemático

28 de noviembre de 2018

- Paradojas
- Falacias
- Contra-ejemplos
- Inconsistencias
- Fuentes de certidumbre
  a) Demostración
  b) Experimentación
- Metaparadojas
- La matemática como lenguaje deficiente
- Lenguaje poético y lenguaje litúrgico

Cuatro definiciones y una pregunta

Definición: Una paradoja es una proposición en apariencia falsa, pero que no conlleva una contradicción lógica.

Definición: Una falacia (o error) es un argumento que parece válido, pero no lo es.

Definición: Una inconsistencia es un par de proposiciones deducidas dentro de un sistema de razonamiento que se contradicen una a la otra.

Definición: Un contra-ejemplo es un caso específico de la falsedad de una cuantificación universal (un “para todo”).

Pregunta: ¿Son estas definiciones mutuamente excluyentes?

Paradoja

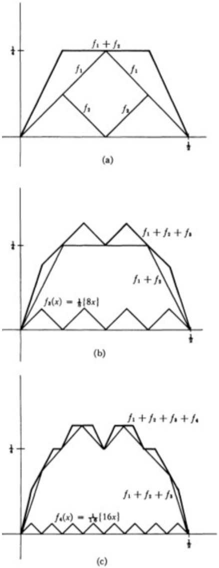
Teorema: La función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$$

es continua por todas partes y derivable en ninguna. Aquí $\{x\}$ es la distancia de x a $\mathbb{N}$.

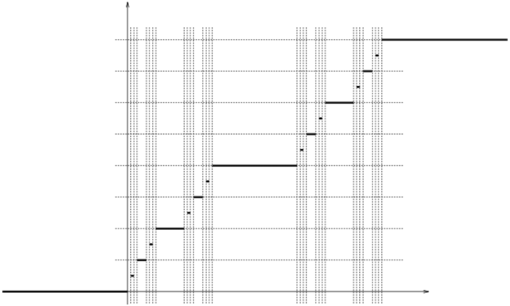
Ver la página 696 de la segunda edición del libro *Calculus* de M. Spivak.

La existencia de una curva que no tenga derivadas es sorprendente porque va en contra de la intuición, pero ¿en qué sentido podemos afirmar que esta curva existe? Se plantea el problema ontológico.



Paradoja

La función $f(x)$ de Cantor es constante casi en todas partes, mas sin embargo se incrementa, es decir, $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.



Nuevamente tenemos un resultado que va en contra de una intuición ingenua.

Falacia

Poniendo $x = -1$ en $\dfrac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$ tenemos

$$\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots . \tag{1}$$

Poniendo $x = 2$ en $\dfrac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ tenemos

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots . \tag{2}$$

Puesto que cada término en el lado derecho de (1) es mayor que el correspondiente término en el lado derecho de (2) se desprende que $-1 > \infty$. Por otro lado, es claro que $\infty > 1$. Por lo tanto

$$-1 > \infty > 1.$$

Este es un razonamiento de L Euler, ver la página 447 del libro *Mathematical thought from ancient to modern times* de M. Kline.

Falacia

Si $\mu(j)$ es la función de Möbius, se cumple entonces que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu(j) x^j}{x^j + 1} = x - 2x^2.$$

Poniendo $x = 1$ se obtiene que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(j) = -2.$$

Esta última identidad es más fuerte que la hipótesis de Riemann.

"My proof is very arduous, I shall try to simplify it further when I resume my research on these questions". T. Stieltjes en 1885 refiriéndose a su "demostración" de la hipótesis de Riemann.[a]

[a] Ver el artículo *Partial triumph or total failure* de R.G. Ayoub.

Contra-ejemplo

Teorema: Dada una función $f(x)$ definida en $[0,1]$ y una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, se cumple que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0).$$

Contra-ejemplo: Si $F(x)$ es la función de Cantor y $f(x) = F'(x)$ entonces $f(x) = 0$ casi en todas partes. Por lo tanto

$$0 = \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 1.$$

Conclusión: El teorema no puede ser cierto tal cual se enunció. Es posible que le falten condiciones sobre la función $f(x)$.

Inconsistencia

En el siglo xviii se planteó la cuestión del significado del logaritmo de un número negativo. J. Bernoulli observó que

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{d(-x)}{-x} \quad \text{y entonces} \quad \log x = \log(-x).$$

En particular $\log(-1) = \log 1 = 0$.

Por otro lado, Leibniz observó que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

y por lo tanto $\log(-1) = -2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \cdots = -\infty$.

Euler resuelve la inconsistencia observando que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta$ y por lo tanto $\log(-1) = i\pi(2n+1)$ en donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

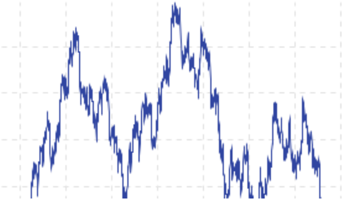
Regresemos a las curvas sin derivadas

En 1806, A.M. Ampère "demostró" que toda curva continua era diferenciable falacia.

Contra-ejemplo. En 1861, B. Riemann "sugirió" que la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2 x)}{n^2}$$

era no diferenciable. "Falacia". En 1970, J. Gerver demostró la existencia de puntos en los que $f(x)$ sí es diferenciable.



Contra-ejemplo. En 1873 Weierstrass mostró que la función $f(x)$ es no diferenciable, en donde

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x), \qquad 0 < b < 1,\ ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$$

y a es un entero impar no negativo. Weierstrass presentó también un ejemplo para mostrar que el uso que hizo Riemann del Principio de Dirichlet en teoría de las funciones era incorrecto.
Contra-ejemplo. Décadas después, y ya con el recurso del análisis funcional, el Principio de Dirichlet se justificó plenamente.

Con el cálculo estocástico desarrollado a mediados del siglo xx, podemos hoy utilizar las funciones no diferenciables para modelar fenómenos naturales y sociales. En particular, éstas nos permiten dar fórmulas para el valor de las opciones financieras, que México ha utilizado en diversas ocasiones para garantizar la entrada de recursos sin importar las fluctuaciones desfavorables del precio del petróleo.

Metaparadoja

"Es paradójico que mientras la matemática tiene fama de ser una disciplina que no tolera contradicciones, tiene en realidad una larga historia de convivencia con contradicciones. Esto queda claro, por ejemplo, en el proceso de extensión del concepto de número que ha tenido lugar a lo largo de más de 2500 años. De pequeños conjuntos de enteros, a las fracciones, los números negativos, los números irracionales, los números complejos, los números transfinitos, en cada extensión fue resuelto un conjunto contradictorio de requerimientos".[b]

Observaciones: No es claro cómo debemos entender la palabra "contradicciones". Lo que sí es claro es que mediante un proceso de ida y vuelta entre error y contra-ejemplo se expande cada vez más el acerbo de recursos disponibles para el quehacer del matemático. A veces con gran provecho, otras veces cediendo a las instancias de una razón puramente especulativa.

[b] P.J. Davis, *The mathematics of matrices*, Blaisdell, 1965.

¿Obedece este proceso de expansión del acerbo de recursos a causas contingentes, o bien las matemáticas como se conocen en la actualidad son el producto de un desarrollo necesario e inevitable?

Judith V. Grabiner afirma que la "verdad" matemática depende de la época histórica en que se enuncie. Lo que antes era falso, hoy puede ser cierto, y viceversa. Por ejemplo, para Cauchy, el límite de una sucesión de funciones continuas, es una función continua. Hoy sabemos que ésto no es así.

Grabiner aduce la existencia de grandes cambios de paradigma en las matemáticas como son por ejemplo los siguientes.

- La axiomatización de la geometría por los griegos.
- La introducción del álgebra durante el renacimiento.
- La introducción de una argumentación rigurosa en el análisis matemático a principios del siglo xix.

¿Qué impacto tendrá el auge de la computación electrónica en el quehacer matemático en el futuro de mediano plazo?

El escenario en el cual se lleva a cabo todo el análisis matemático es la recta real. Para la recta real es posible exhibir al menos las siguientes tres concepciones cuya compatibilidad es al menos bastante discutible.

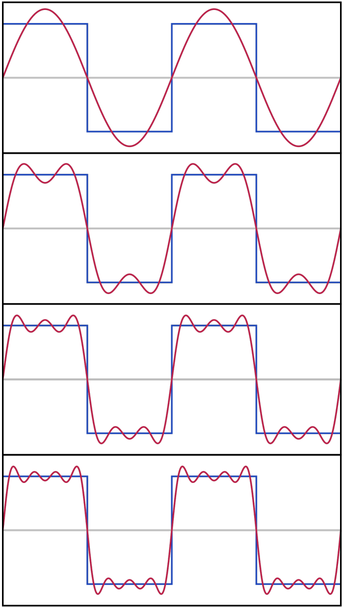
- La concepción constructivista de la linea recta con muchos huecos de Brouwer y Bishop.
- La concepción de la linea recta como algo completo debida a Weierstrass y a Cantor.
- La concepción superabundante de la linea recta con la adjunción de los infinitesimales de Robinson.

El teorema de Picard sobre el comportamiento de funciones con singularidades esenciales depende de la concepción de la linea recta que adoptemos. En un interesante artículo de I. Lakatos, se afirma que Cauchy estaba justificado en su afirmación sobre el límite de una sucesión de funciones continuas, porque su concepción de la linea recta incluía a los infinitesimales. ¡Esto a pesar de que Cauchy conocía los contra-ejemplos que invalidan su afirmación!

Contra-ejemplo. En la izquierda se muestra una sucesión de funciones continuas que convergen a una función discontinua. Fourier es prácticamente contemporáneo con Cauchy.

Pregunta: ¿Cuál de las anteriores tres concepciones de la linea recta es la concepción necesaria?

Si bien es cierto que 5 es y será siempre un número primo, por contraste, la verdad sobre el teorema de Picard parece ser contingente.



La siguiente cita está tomada del libro *A course in mathematical logic* de Yu I. Manin.

No solo la matemática implícita en los axiomas $\mathfrak{L}_1$Set y $\mathfrak{L}_1$Ar, sino que incluso la lógica de los lenguajes de $\mathfrak{L}_1$ no son aceptados por todos. En particular, Brouwer y otros han cuestionado la ley del tercero excluido. Desde su extremadamente crítica perspectiva, nuestras "demostraciones"son en el mejor de los casos deducciones inofensivas de sinsentidos que parten de falsedades.

El matemático no puede permitirse el desoír estas críticas. Después de pensar un poco sobre estas críticas, él debería al menos ser capaz de admitir que las demostraciones tienen objetivamente distintos "grados de capacidad demostracional".[c]

El siguiente ejemplo captura el espíritu de los contra-ejemplos de Brouwer.

[c] En el *Manual de teología dogmática* de L. Ott se distinguen al menos siete grados de certidumbre teológica.

En 1947, W.H. Mills demostró el siguiente teorema cuya demostración es fácil de digerir.

Teorema: Existe un número real θ tal que $[\theta^{3^n}]$ es un número primo para cada $n = 1, 2, 3, \cdots$.

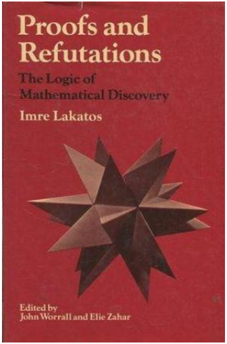
De manera similar, se puede probar que existe un número θ tal que $[\theta^{3^n}]$ es igual al número ganador de la lotería en el n-ésimo año.

La siguiente cita es de L. Wittgenstein es relevante.

Si una demostración te convence de que una ecuación tiene solución (sin darte una idea de en dónde se encuentra la solución), ¿cómo puedes saber que entiendes la proposición que afirma la existencia de la solución?

Cabe preguntarse sobre la utilidad de probar que existe un número que no podemos calcular.

Hemos tratado de poner de manifiesto hasta aquí que como resultado de la tensión entre falacia y contra-ejemplo, la matemática progresa: realmente tenía razón Arquímides cuando decía que "hay cosas que parecen imposibles a quien no sabe matemáticas". Sin embargo, esta espiral parece no tener fin.



(a) Lakatos

(b) Brueghel el Viejo

Con una lectura de la *Historia de la teoría política* de G.H. Sabine, queda muy claro el gran impacto que la confianza en la infalibilidad del pensamiento matemático ha tenido en la construcción de las instituciones que han impulsado el desarrollo de las sociedades occidentales. Hoy tal confianza no aparece como evidente, a pesar de los grandes éxitos logrados en la comprensión de la realidad física del mundo gracias al desarrollo de un lenguaje matemático cada vez más potente.

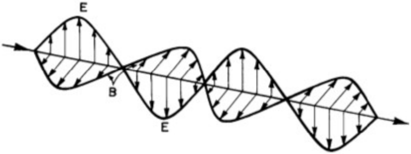
$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

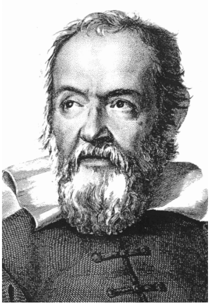
$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

(a) Maxwell



(b) Ondas electromagnéticas

Y así, mientras que en el siglo xvi se podía afirmar de modo optimista que el libro del mundo estaba escrito en lenguaje matemático, a partir del siglo xx es más frecuente la opinión de que todos los modelos (del mundo) son falsos. Afortunadamente algunos son útiles.



(a) G. Galilei

(b) G. Box

Con la pérdida de las bases que nos anclan sólidamente en la realidad, es natural pasar de un mundo lleno de sentido a un mundo en donde la tentación del absurdo parece cada vez más omnipresente.

(a) Miguel Ángel

(b) Marcel Duchamp

Nota: Se dice que la rodilla del Moisés está fracturada debido a un martillazo.

¿Es la consistencia lógica de una teoría garantía de su realidad ontológica? Pensemos en el martillo de Miguel Ángel.

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

(a) Maxwell

(b) Maurice Sapiro

La obra de Sapiro se titula *Let it be light*. ¿Tenemos aquí tres formas de contemplar la misma realidad? Las tres nos interpelan de manera distinta.

Octavio Paz: El arco y la lira

La primera actitud del hombre ante el lenguaje fue la confianza: el signo y el objeto representado eran lo mismo. La escultura era un doble del modelo. La fórmula ritual una reproducción de la realidad, capaz de re-engendrarla. Hablar era re-crear el objeto aludido.

Pero al cabo de los siglos los hombres advirtieron que entre las cosas y sus nombres se abría un abismo. La gramática se convirtió en el primer peldaño de la lógica. Todavía no cesa la batalla entre la ciencia y el lenguaje.

Todas las sociedades han atravesado por estas crisis de sus fundamentos que son, asimismo y sobre todo, crisis del sentido de ciertas palabras.[d]

[d] Tomado libremente de la página 29.

Refiriéndose a sus interlocuciones con su Creador, santa Teresa de Ávila decía que “sus palabras son obras”. Sus palabras no pueden no cumplirse.

Él “llama las cosas que no son para que sean”. Y por su Palabra pudo hacer resplandecer la luz en las tinieblas. (Ver el artículo 298 del CIC).

Logos: razón, sentido, palabra.

Conclusión

En el ejercicio de su profesión el matemático constata que las matemáticas no están libres de contradicciones. Con ésto no se debe caer en la desesperación, sino más bien uno se debe preguntar si acaso no estaremos más bien ante una realidad que nos supera grandemente. Nuestro *logos* es de alcance limitado.

Referencias

- Dudley, U. *History of a formula for primes*. The American Mathematical Monthly, 1969.
- Grabiner, J.V. *Is mathematical truth time-dependent?* The American Mathematical Monthly, 1974.
- Kleiner, I.; Movshovitz-Hadar, N. *The role of paradoxes in the evolution of mathematics*. The American Mathematical Monthly, 1994.
- Lakatos, I. *Cauchy and the continuum: The significance of non-standard analysis for the history and philosophy of mathematics*. The Mathematical Intelligencer, 1978.
- Manin, Y.I. *How Convincing is a proof?* The Mathematical Intelligencer, 1979.
- Neuenschwander, E. *Riemann's example of a continuous, 'nondifferentiable' function*. The Mathematical Intelligencer, 1978.

Referencias

En referencia al Principio de Dirichlet.

- Laugwitz, D. *Riemann's dissertation and its effect on the evolution of mathematics*. The American Mathematical Monthly, 1994.
- Gårding, L. *The Dirichlet problem*. The Mathematical Intelligencer, 1979.
- Bottazzini, U.; Gray, K. *Hidden harmony, geometric fantasies. The rise of complex function theory*. Springer, 2013.