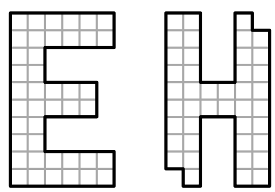
Lista de ejercicios
Taller Euclides y Hilbert

Fecha límite de entrega: 10 de febrero de 2020

1. Cada una de las letras **E** y **H** del logotipo de este evento están divididas en 5 regiones. Las regiones de la letra **E** son congruentes a las regiones de la letra **H**. Encuentra una forma de dividir cada una de estas dos letras en 4 regiones con la misma propiedad.



2. Determina si existen las siguientes figuras geométricas:

   a) Un triángulo equilátero en $\mathbb{R}^2$ tal que las coordenadas de cada vértice son números enteros.

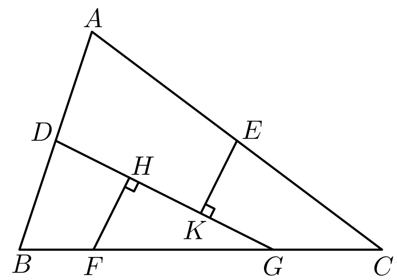
   b) Un tetraedro regular en $\mathbb{R}^3$ tal que las coordenadas de cada vértice son números enteros.

3. Determina si los siguientes enunciados son ciertos:

   a) Existe un conjunto X de 4 puntos en $\mathbb{R}^2$ de tal forma que para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que $\text{dist}(x, y) \in \{1, 2\}$.

   b) Existe un conjunto X de 6 puntos en $\mathbb{R}^3$ de tal forma que para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que $\text{dist}(x, y) \in \{1, \sqrt{2}\}$.

4. Sea ABC un triángulo y sean D y E los puntos medios de los lados AB y AC, respectivamente. Sean F y G puntos en el segmento BC tales que $|BF| < |BG|$ y $|FG| = \frac{1}{2}|BC|$. Se construyen H y K como las proyecciones ortogonales de F y E sobre el segmento DG. Demuestra que $|DH| = |KG|$.



5. Sea $r \neq 0$ un número racional y R un rectángulo de lados a y b. Demuestra que se puede dividir a R en una cantidad finita de polígonos y reacomodar esos polígonos para formar un rectángulo de lados ar y b/r.

6. Jaimito ha estado estudiando la geometría de $\mathbb{R}^n$. Consideró un hipercubo de lado 2 y en cada vértice colocó una esfera de radio 1. Después observó que es posible colocar una esfera de radio r y con el mismo centro que el hipercubo que es simultáneamente tangente a las 2^n esferas anteriores y a las $2n$ caras $(n-1)$-dimensionales del hipercubo. ¿Cuáles son los valores de n y r?

7. Demuestra que para cualesquiera dos números reales α y β se cumple que $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$.

8. Encuentra la matriz (respecto a la base canónica) de la transformación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ que manda la base ordenada
$$\{(2,0,0,0), (1,1,1,1), (1,1,1,-1), (1,1,-1,1)\}$$
en la base ordenada
$$\{(1,1,1,1), (2,0,0,0), (1,1,1,-1), (1,1,-1,1)\}.$$
¿Se trata de una isometría?

9. Sea $M = \{m_1, \ldots, m_n\} \subset \mathbb{R}^n$ y sea $M' \subseteq M$. Sean $L = \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(M)$ y $L' = \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(M')$, es decir, los subespacios más pequeños de $\mathbb{R}$ que contienen a M y M', respectivamente, cuando consideramos a $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Dada cualquier $f : L' \to \mathbb{R}$ lineal, ¿es posible encontrar $g : L \to \mathbb{R}$ lineal tal que $f(m) = g(m)$ para toda $m \in M'$?