Introducción a las variedades tóricas

Martha M. Bernal Guillén

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología
Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas
Mexico

m.m.bernal.guillen at gmail.com

Taller de Geometría Algebraica,
Centro de Ciencias Matemáticas,
Morelia, Mich.
6 de diciembre de 2016

Bosquejo del día de Hoy

1. Variedades Algebraicas
   - Variedades Afines
   - Variedades Algebraicas y sus Morfismos
   - Normalidad
2. Variedades Tóricas
   - Acción de Toros Algebraicos
   - Algunos Ejemplos
   - Avance: Tres maneras de Obtener Variedades Tóricas

Variedades Afines

Sea k un campo algebraicamente cerrado, eg $k = \mathbb{C}$.

- El *espacio afín* sobre k de dimensión n es el conjunto
$$\mathbb{A}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|x_i \in k\}.$$
- Un *conjunto algebraico* en $\mathbb{A}^n$ es un conjunto de la forma
$$V = \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_r) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n \,|\, f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, 1 \leq i \leq r\},$$
donde $f_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$.
- El conjunto
$$I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq r} h_i f_i \,\middle|\, h_i \in k[f_1, \ldots, f_r] \right\}$$
es un ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Variedades Afines

- El anillo cociente $k[V] = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ es el *anillo de coordenadas* de V. Ésta es una k-álgebra finitamente generada.
- **Topología de Zariski en $\mathbb{A}^n$:**
  - cerrados: $V \subset \mathbb{A}^n$ algebraico;
  - abiertos: $\mathbb{A}^n \setminus V$;
  - irreducibilidad;
  - dimensión y codimensión;
- Una *variedad afín* es un cerrado algebraico $V \subset \mathbb{A}^n$.
- Un *morfismo* entre variedades afines $V \subset \mathbb{A}^n$ y $W \subset \mathbb{A}^m$ es un mapeo

$$\phi : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (h_1(x), \ldots, h_m(x))$$

  donde $h_i(x) = h_i(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]$ y $\phi(V) = W$.
- ¿Qué es un isomorfismo?

Variedades Afines

- Existe una correspondencia biyectiva

$$V \subset \mathbb{A}^n \quad \longleftrightarrow \quad I \subset k[x_1, \ldots, x_n] \text{ radical}$$

Proposición

Hay una equivalencia de categorías entre la categoría de variedades afines sobre k y la categoría de k-álgebras finitamente generadas sin nilpotentes

- Correspondencia entre objetos:

$$V \quad \longleftrightarrow \quad k[V],$$

- Correspondencia entre morfismos:

$$\phi : V \to W \quad \longleftrightarrow \quad \phi^* : k[W] \to k[V]$$

Variedades Proyectivas

- El *espacio proyectivo* de dimensión n es el conjunto de líneas en $\mathbb{A}^n$ que pasan por el origen:

$$\mathbb{P}^n := (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim,$$

donde $x \sim x'$ si y sólo si existe $\lambda \in k^* = k \setminus \{0\}$ con $x = \lambda x'$.

- Un *punto* en $\mathbb{P}^n$ está determinado por sus coordenadas homogéneas $x = (x_0 : \cdots : x_n) = (\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n)$.
- Un *conjunto algebraico* en $\mathbb{P}^n$ es un conjunto de la forma

$$W = \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_r) = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{P}^n \mid f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0, 1 \leq i \leq r\},$$

donde $f_i \in k[x_0, \ldots, x_n]$ es homogéneo para todo $1 \leq i \leq r$.

Variedades Proyectivas

- **Topología de Zariski** en $\mathbb{P}^n$.
  - Observación: $\mathbb{P}^n$ *está cubierto por abiertos afines.*

$$U_i := \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$$

- Una *variedad proyectiva* es un cerrado $W \subset \mathbb{P}^n$.
- Existe correspondencia

$$W \subset \mathbb{P}^n \quad \longleftrightarrow \quad I \subset \langle x_0, \ldots, x_n \rangle \subset k[x_0, \ldots, x_n] \text{ radical homogéneo.}$$

- Ejemplos:
  - $\mathbf{V}(x_0, \ldots, x_n) = \emptyset$
  - $\mathbf{V}(x^2 + y^2 - z^2)$ es una cónica en $\mathbb{P}^2$

Variedades Proyectivas

- **Morfismo de variedades proyectivas**: Mapeo $\phi : V \to W$ que localmente es polinomial:

Definición

$\phi : V \to W$ es morfismo si para todo $x \in V$ existe $U \subset V$ abierto tal que $x \in U$ y $\phi_{|U} : U \to W$ está dado por

$$\phi(x_0 : \cdots : x_n) = (h_0(x) : \cdots : h_m(x))$$

para $h_i \in k[x_0, \ldots, x_n]$ homogéneos del mismo grado.

- ¿Qué es un isomorfismo?

Variedades Proyectivas

Observaciones:

- Anillo de coordenadas homogéneo $k[W]$ no es anillo de funciones k-valuadas.
- No tenemos correspondencia de categorías como en el caso afín:
  - $V = \mathbb{P}^1$ y $W = \mathbf{V}(x_0x_2 - x_1^2) \subset \mathbb{P}^2$ son isomorfas como variedades proyectivas, pero $k[V]$ no es isomorfo a $k[W]$
- Hecho: Toda variedad proyectiva está cubierta por abiertos afines.

Variedades Normales

Definición

Una variedad afín V es *normal* si su anillo de coordenadas $k[V]$ es integralmente cerrado.

Definición

Una variedad algebraica X es *normal* si todo punto $x \in X$ tiene una vecindad afín normal.

Consecuencias:

- Si X es una variedad proyectiva suave, entonces es normal.
- Si X es normal entonces $\operatorname{codim}(\operatorname{sing} X) \geq 2$

Acciones algebraicas

Definición

Un *grupo algebraico* es un grupo G que es también una variedad algebraica, y tal que las operaciones de grupo

$$G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$$

y

$$G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

son morfismos de variedades algebraicas.

- El grupo $\mathrm{GL}_n(k)$ de matrices invertibles es un grupo algebraico.

Acciones algebraicas

Definición

Sean X variedad algebraica y G un grupo algebraico. Una acción de G en X es un morfismo de variedades algebraicas

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

tal que

$$(e, x) = x \quad \text{y} \quad (g_1, (g_2, x)) = (g_1 g_2, x)$$

para todo $x \in X$, y $g_1, g_2 \in G$.

- La órbita de $x \in X$ es el conjunto $Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\}$.
- El grupo $\mathrm{GL}_n(k)$ actúa en el espacio de matrices cuadradas $\mathrm{Mat}_n(k) = \mathbb{A}^{n^2}$ mediante $(g, M) \mapsto gMg^{-1}$. ¿Representantes de las órbitas?

Variedades tóricas

Definición

Sea $T^n = (k^*)^n$. Esta variedad afín es un grupo algebraico con la multiplicación coordenada a coordenada. Se le denota como el *toro algebraico* de dimensión n.

- ¿Quién es el anillo de coordenadas? ¿Cuál es el elemento neutro?
- También se usa la notación $\mathbb{G}_m^n$.
- Una acción de T^n en $\mathbb{A}^m$ está determinada por m vectores $\mathbf{a}_i \in \mathbb{Z}^n$.

$$(t_1, \ldots, t_n) \cdot (x_1, \ldots, x_m) = (t^{\mathbf{a}_1} x_1, \ldots, t^{\mathbf{a}_m} x_m)$$

- El toro T^n actúa en sí mismo.

Variedades tóricas

Definición

Una *variedad tórica* es una variedad algebraica X que contiene un abierto (denso) isomorfo a T^n y tal que la acción de T^n en sí mismo se extiende a una acción algebraica $T^n \times X \to X$.

Observaciones:

- La variedad X puede ser singular.
- La dimensión de X es n.
- La órbita de dimension máxima es T^n.

Ejemplos

- $T^n \subset \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$,
- $\mathbb{A}^m \times T^n = k^m \times (k^*)^n$
- $C = \mathbf{V}(x^3 - y^2)$
- ¿Cuántas órbitas hay en los ejemplos anteriores?

Mañana

1. Semigrupos afines,
2. Compactificaciones de toros y
3. Abanicos poliedrales racionales.