Problemas propuestos

Abraham Martín del Campo

6 de Diciembre del 2016

1. Sea $\prec$ el orden (no graduado) lexicográfico inverso: $x^\alpha \succ x^\beta$ si la última entrada distinta de cero de $\alpha - \beta$ es negativa. ¿Es esto un orden monomial?

2. Considera el ideal generado por

$$xy^3 + xz^3 + x - 1, yz^3 + yx^3 + y - 1, zx^3 + zy^3 + z - 1.$$

   Usando `Macaulay2` o cualquier otro programa de álgebra conmutativa, calcula una base de Gröbner con respecto a $\prec_{lig}$ y a $\prec_{lex}$. ¿Cuántos polinomios tiene cada base? ¿Cuál es el grado máximo de los elementos de las bases de Gröbner para cada caso?

3. Muestra que un ideal I es homogéneo si y sólo si I tiene una base de Gröbner homogénea.

4. Si $\prec$ es un orden monomial, muestra las siguientes inclusiones:

$$\mathrm{in}_\prec(I) \;\subseteq\; \mathrm{in}_\prec(\sqrt{I}) \;\subseteq\; \sqrt{\mathrm{in}_\prec(I)}$$

5. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^n$ es un conjunto finito de exponentes de monomios de Laurent, muestra que la función $\varphi_\mathcal{A} : (\mathbb{C}^\times)^n \to \mathbb{P}^\mathcal{A}$ es injectiva si y sólo si $\mathbb{Z}^n$ es generado afinmente por $\mathcal{A}$ (i.e., las diferencias $\alpha - \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ generan linealmente a $\mathbb{Z}^n$).

6. Muestra que la función de Hilbert $H(t)$ de el anillo $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_d$ de polinomios homogéneos de grado d es $\binom{n+d}{n} = \frac{d^n}{n!} + t.o.m.$ en d.