La geometría que emana de una ecuación diferencial

Un primer curso en ecuaciones diferenciales ordinarias nos muestra algunas familias de ecuaciones que podemos resolver por métodos ad hoc. Más allá, vislumbramos un océano de ecuaciones diferenciales “no explícitamente solubles”. Ese es el reto.

Geométricamente, una ecuación diferencial $\frac{dx}{dy} = f(x,y)$ tiene como solución una familia de curvas reales $\mathscr{F} = \{\gamma\}$ en el plano.

Inversamente, ¿cuáles son las propiedades que caracterizan que una curva plana γ aparezca como solución de una ecuación diferencial? (Hay un paralelismo obvio, ¿cuáles números aparecen como solución de una ecuación algebraica?)
Parece que cada curva plana γ es un objeto sencillo, pero entonces;

¿por qué es difícil resolver una ecuación diferencial?

Usaremos rudimentos de geometría diferencial, algebraica y anális real para explorar las curvas γ y sus familias $\mathscr{F}$.