Toplogía de Superficies

Ejercicios

En los siguientes problemas puedes suponer lo siguiente:

- Una *curva cerrada simple* γ en una superficie Σ es la imagen de un encaje del círculo S^1 en Σ.
- Podemos obtener una superficie con frontera a partir de una superficie compacta sin frontera quitando discos abiertos. La frontera de la superfice corresponde a las fronteras de los hoyos. Las diferentes partes de la frontera se llaman las *componentes frontera* de la superficie.
- La *superficie orientable de género g con n componentes frontera* $\Sigma_{g,n}$ es la superficie $\underbrace{T^2\#\cdots\#T^2}_{g}$ con n discos abiertos removidos.
- *Teorema de clasificación de superficies orientables con frontera.* Toda superficie compacta orientable es homeomorfa a $\Sigma_{g,n}$ para ciertos $g, n \geq 0$.

1. Sea Σ una superficie compacta y sin frontera. Prueba que $\Sigma\#\mathbb{R}P^2$ es homeomorfo a la superficie que se obtiene de cortar un disco abierto de Σ y pegar una banda de Möbius.

   Sugerencia: Prueba que $\mathbb{R}P^2$ menos un disco abierto es homemorfo a una banda de Möbius.

2. Prueba el caso (b) de la demostración del teorema de clasificación de superficies que vimos en clase.

   Sea Σ una superficie compacta y sin frontera con $\chi(\Sigma) < 2$ y sea γ una curva cerrada simple en Σ que no separa a Σ (es decir $\Sigma - \gamma$ es conexo). Supongamos que la vecindad tubular N de la curva γ es homeomorfa a una banda de Möbius. Prueba que Σ es homeomorfa a $\hat{\Sigma}_c\#\mathbb{R}P^2$, donde $\hat{\Sigma}_c$ es la superficie que resulta de tomar $\Sigma - \mathrm{Int}(N)$ y "tapar" las componentes frontera con discos.

3. Sea X una superficie compacta triangulable y T un sugrafo de $X^{(1)}$ (la gráfica que corresponde a la triangulación de la superficie) que es un árbol. Prueba que T tiene una vecindad que es homeomorfa a D^2.

   Sugerencia: Utiliza el siguiente resultado.

   Lema. Sea X un espacio topológico y sean $A, B \subset X$ subespacios tales que $X = A \cup B$. Suponga que tanto A como B son homeomorfos a D^2 y que $A \cap B$ es homeomorfo a $[0, 1]$. Entonces X es homeomorfo a D^2.

4. Sean γ_1 y γ_2 dos curvas cerradas simples en Σ_g. Suponga que las superficies $\Sigma_g\backslash\gamma_1$ y $\Sigma_g\backslash\gamma_2$ son conexas. Prueba que existe un homeomorfismo $f : \Sigma \to \Sigma$ tal que $f(\gamma_1) = \gamma_2$.

   Sugerencia: ¿ Qué superfice resulta de cortar Σ_g a lo largo de γ_i?

   Utiliza el Teorema de clasificación de superficies compactas con frontera.