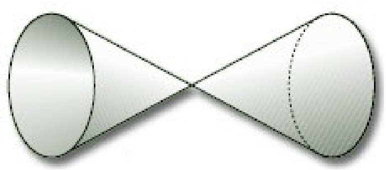
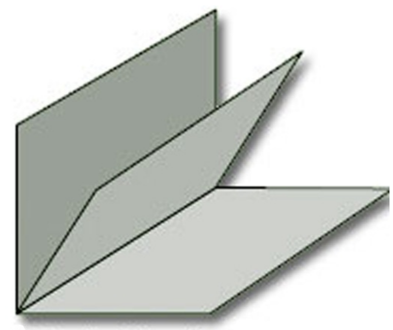
Toplogía de Superficies

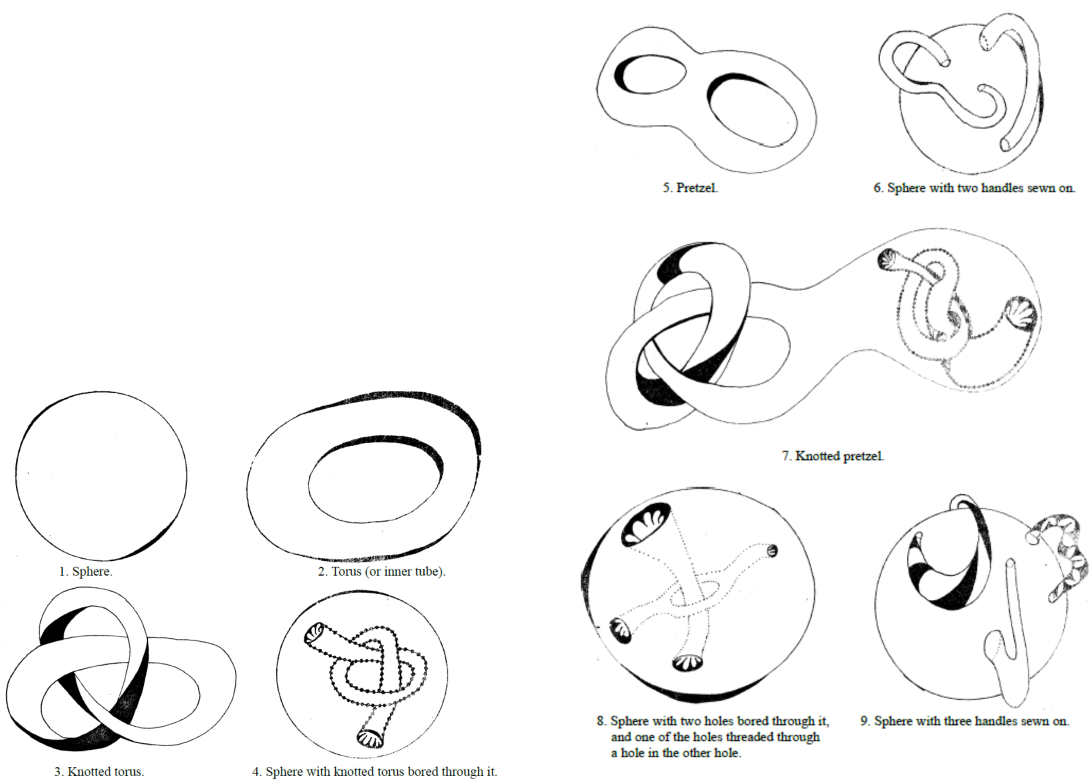
Ejercicios

1. Determina si el *doble cono* y el *libro de tres hojas* son o no son superficies. Justifica tu respuesta.

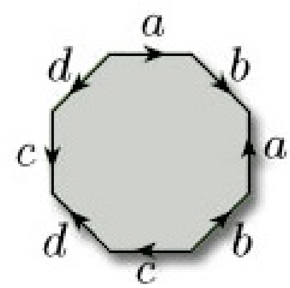




2. ¿Cuáles de las superficies ilustradas son homeomorfas? ¿Por qué?

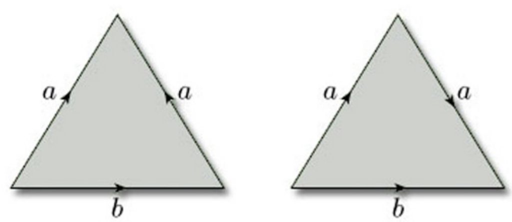


3. Describe qué superficie se obtienen identificando los lados (en las direcciones dadas) del siguiente octágono.



¿Puedes generalizar esta construcción para obtener otras superficies como $T^2\#T^2\#T^2$ y $\underbrace{T^2\#T^2\#\cdots\#T^2}_{g \text{ veces}}$?

4. ¿Qué superficies se obtienen identificando los lados (en las direcciones dadas) en cada unos de los siguientes triángulos?

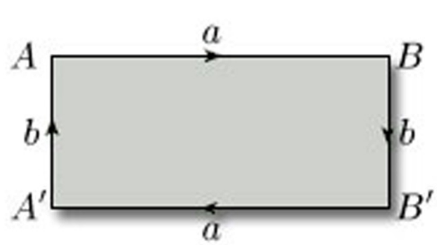


(a) (b)

5. *Plano proyectivo real.* Considera las siguientes tres definiciones del plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$:

   a) $\mathbb{R}P^2$ es el conjunto de lineas a través del origen en el espacio Euclidiano 3-dimensional.

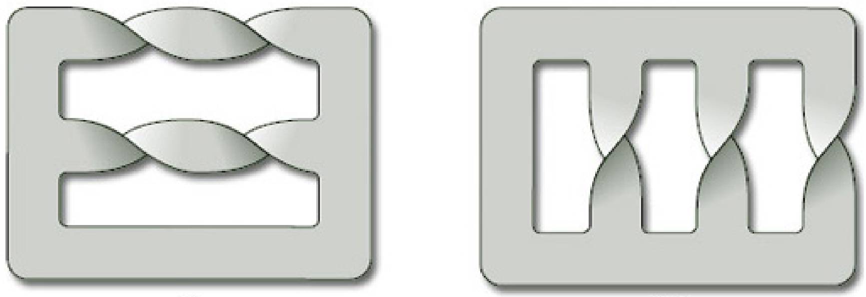
   b) $\mathbb{R}P^2$ es la superficie que resulta de identificar los lados del rectángulo como lo indica la figura.



   c) $\mathbb{R}P^2$ es la superficie no orientable estándar de género 1, es decir, un disco y una banda de Möbius "pegadas" por la frontera.

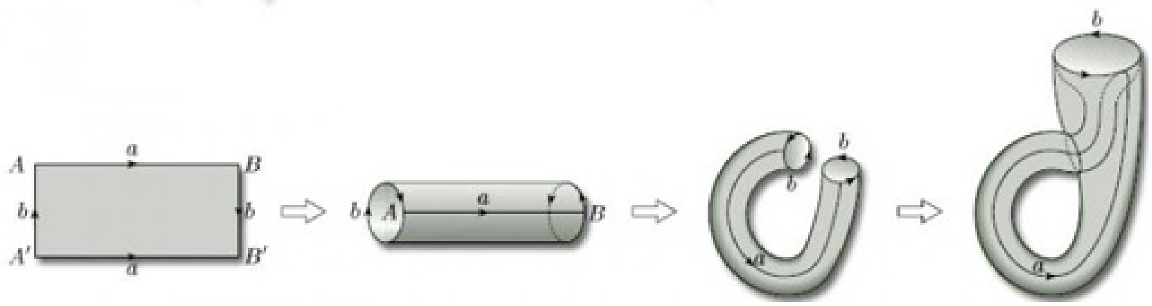
   Demuestra que las tres definiciones dan superficies homeomorfas.

6. Determina si las superficies (a) y (b) ilustradas son o no orientables. Justifica tu respuesta.



(a) (b)

7. Demuestra que la botella de Klein es no-orientable. Usa, por ejemplo, la descripción de la botella de Klein como la superficie que resulta de identificar los lados del rectángulo como lo indica la figura.



8. Calcula la característica de Euler de:

   a) el cilindro
   b) la banda de Möbius
   c) la superficie $\underbrace{T^2\#T^2\#\cdots\#T^2}_{g \text{ veces}}$ orientable estándar de género g
   d) la superficie $\underbrace{\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#\cdots\#\mathbb{R}P^2}_{g \text{ veces}}$ no orientable estándar de género g.

9. Los antiguos giregos sabían que hay sólo cinco poliedros regulares: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Pruebe este hecho considerando subdivisiones de la espera en n-gonos (con n fija) talque exactamente m lados se encuentran en cada vértice ($m, n \geq 3$).

   Sugerencia: Característica de Euler.