

# Introducción a los espacios moduli.

Osbaldo Mata Gutiérrez,  
Jesús Muciño Raymundo.

VIII Escuela de Verano 2007

Instituto de Matemáticas UNAM Unidad Morelia.

A lo largo de nuestro curso-taller analizaremos los siguientes problemas de álgebra y geometría:

1. Consideraremos *todos los triángulos en el plano*. Es natural convenir que dos triángulos  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son *equivalentes* (es decir isométricos o iguales), si existe una isometría del plano que lleva  $\Delta_1$  exactamente en  $\Delta_2$ . Queremos describir el *espacio  $\tau$  de todos los triángulos módulo esa relación de equivalencia*.  
¿Será  $\tau$  un espacio topológico? ¿Será  $\tau$  un espacio métrico? ¿Cuál será su dimensión? Etc.
2. Consideraremos *todas las matrices de dos por dos con entradas reales*. De manera natural convenimos que dos matrices  $M_1$  y  $M_2$  son *equivalentes*, si existe un cambio de base  $A$  que transforma  $M_1$  en  $M_2$ , es decir  $A$  es una matriz invertible que cumple la siguiente igualdad:

$$AM_1A^{-1} = M_2.$$

Queremos describir el *espacio  $\mu$  de todas las matrices de dos por dos con entradas reales módulo esa relación de equivalencia*.

¿Será  $\mu$  un espacio topológico? ¿Será  $\mu$  un espacio métrico? ¿Cuál será su dimensión? Etc.

3. En nuestro tercer problema consideramos *todas las cónicas en el plano*. Convenimos que dos cónicas  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son *equivalentes* (es decir isométricas o iguales), si existe una isometría del plano que lleva  $\mathcal{C}_1$  exactamente en  $\mathcal{C}_2$ . Queremos describir el *espacio  $\mathfrak{C}$  de todas las cónicas módulo esta relación de equivalencia*.  
¿Será  $\mathfrak{C}$  un espacio topológico? ¿Será  $\mathfrak{C}$  un espacio métrico? ¿Cuál será su dimensión? Etc.

Evidentemente los tres problemas anteriores poseen características comunes. La solución de ellos requiere introducir el concepto de *espacio moduli*, ya que  $\tau, \mu, \mathfrak{C}$  son ejemplos concretos de este tipo de espacios.

Las únicas herramientas necesarias para este curso-taller serán el Álgebra Lineal y la Geometría Analítica en el plano. Trabajaremos con conceptos básicos como lo son relaciones de equivalencia, grupo de isometrías (rotaciones, traslaciones y reflexiones), traza y determinante de matrices, formas canónicas de Jordan, etc. Mencionaremos aplicaciones creativas del concepto de *espacio moduli* a las Ecuaciones Diferenciales, el Álgebra Lineal, al Análisis Complejo, etc.