Percolación en gráficas finitas e infinitas

Banco de ejercicios

Laura Eslava Marco L. Ortiz

Instrucciones:

El banco de ejercicios les ayudará a entender y extender ideas que revisamos durante las sesiones 3 y 4. Los ejercicios con * están pensados para estudiantes con experiencia en los temas o cursando posgrado.

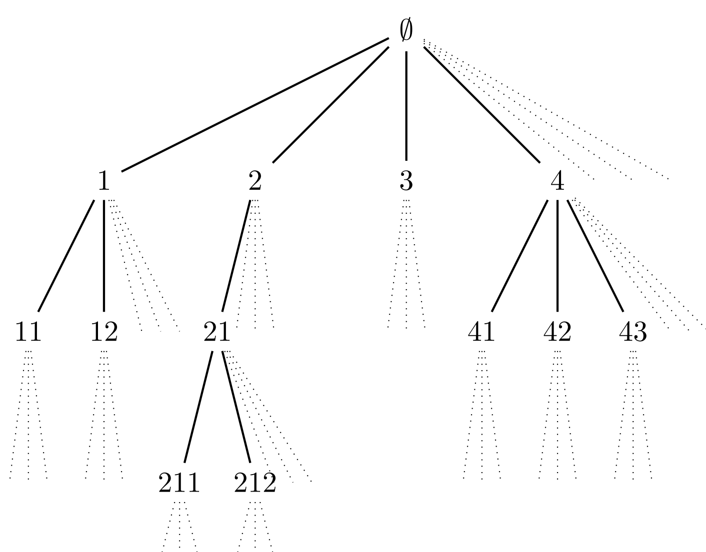
Trabajen en equipos de 2-4 personas. Lean todas las preguntas y comenten cuales les parecen más interesantes y con cuales quieren empezar. Alternen entre trabajar individualmente y comentar sus ideas dentro del equipo. Cuando haya consenso en la solución de algún ejercicio, ejerciten la redacción formal de su solución.

Quedando 30 minutos de la sesión, haremos una revisión grupal de algunos de los ejercicios.

3 Procesos de ramificación y caminatas aleatorias

Disfruten el reto!!

Sea $\mathbb{T}$ el árbol de Ulam-Harris. Mostramos abajo a $T \subseteq \mathbb{T}$ para tener un ejemplo de la estructura de $\mathbb{T}$.



Ejercicio 3.1. *Describan los vértices de $\mathbb{T}$ y para $v \in V(\mathbb{T})$ describan todos los vecinos de v.*

Definimos un proceso de ramificación $(Z_k)_{k\geq 1}$ con distribución de descendientes ξ de manera recursiva, $Z_0 = 1$, $Z_{k+1} = \sum_{\ell=1}^{Z_k} \xi_\ell^{(k)}$ donde $\left(\xi_\ell^{(k)}\right)_{k,\ell\geq 1}$ son i.i.d. con la misma distribución que ξ. Denotamos $P_k = \mathbf{P}(\xi = k)$ y $G_\xi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k \mathbf{P}(\xi = k)$.

Ejercicio 3.2. *Dibujen los casos triviales de la gráfica de $G_\xi(s)$ cuando $P_0 = 1$, $P_1 = 1$, $P_0 = 0$ y $P_1 < 1$.*

Ejercicio 3.3. *Denota $\eta := \mathbf{P}(\exists n \geq 1 : Z_n = 0)$ la probabilidad de extinción, muestren lo siguiente*

- *$G(s)$ tiene sólo un punto fijo o tiene sólo dos puntos fijos.*
- *El primer punto fijo para $G(s)$ es η.*

Los índices de las variables aleatorias $\xi_\ell^{(k)}$ sugieren una construcción secuencial de un árbol T. Vamos a describir un algoritmo con $(\mathcal{A}_m, \mathcal{U}_m)_{m\geq 0}$ donde $\mathcal{A}_m$ serán los vértices en espera y $\mathcal{U}_m$ los vértices explorados.

- Inicia con un vértice llamado $\emptyset$
- Genera $(\xi_m)_{m\geq 1}$ muestras independientes de ξ, para determinar el número de hijos del m-ésimo individuo "explorado".

$$A_0 = \{\emptyset\}, \quad \mathcal{U}_0 = \emptyset$$

- En el m-ésimo paso: selecciona $v_m \in \mathcal{A}_{m-1}$ y agrega ξ_m hijos de v_m (llamados $v_{m1}, \ldots, v_{m\xi_m}$) y actualiza los conjuntos

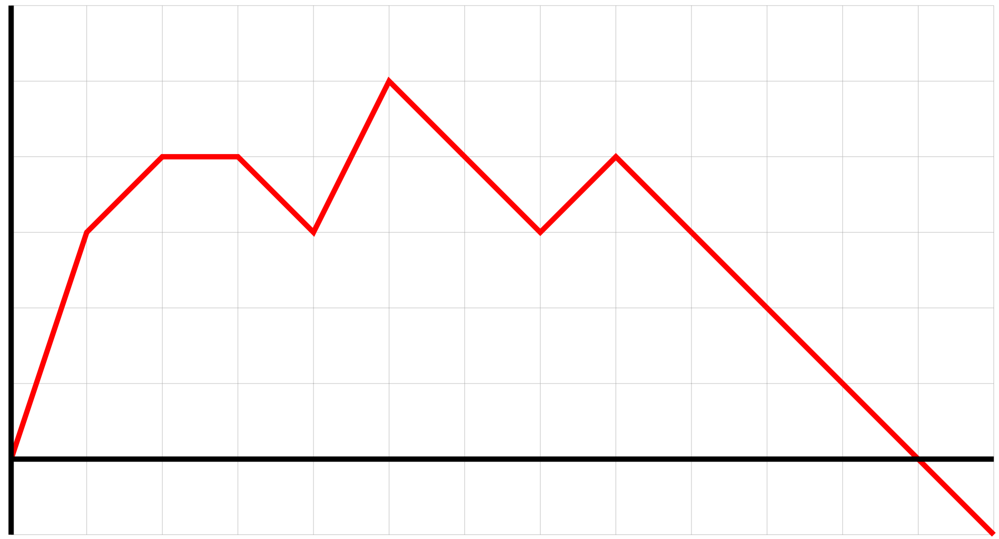
$$\mathcal{A}_m = (\mathcal{A}_{m-1} \cup \{v_{m1}, \ldots, v_{m\xi_m}\}) \setminus \{v_m\}, \quad \mathcal{U}_m = \mathcal{U}_{m-1} \cup \{v_m\}$$

- Detente cuando $\mathcal{A}_m = \emptyset$.

La caminata aleatoria asociada a T está definida por $S_0 = 1$ y $S_m - S_{m-1} = \xi_m - 1$.

Ejercicio 3.4. *Dibujen el árbol asociado a la siguiente caminata*

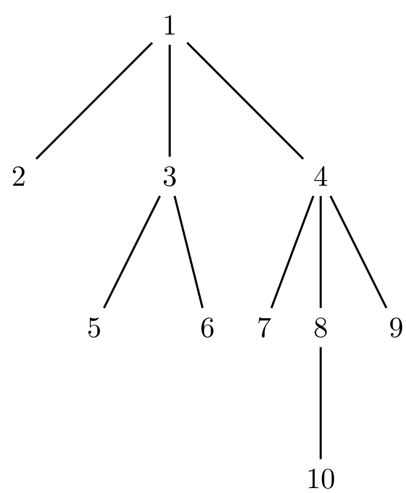
$$(0, 3, 4, 4, 3, 5, 4, 3, 4, 3, 2, 1, 0, -1)$$



Ejercicio 3.5. *Verifiquen que*

$$|T| = \inf\{m : A_m = \emptyset\} = \inf\{m : S_m = -1\}.$$

Ejercicio 3.6. *Realicen la exploración por anchura y la exploración por profundidad del siguiente árbol; grafíquen la caminata asociada.*



***Ejercicio 3.7.** *Prueben que*

$$\mathbf{P}\left(|T| = n\right) = \frac{1}{n}\mathbf{P}\left(\sum_{m=1}^{n} \xi_m = n - 1\right).$$

4 Nacimiento de la componente gigante

Disfruten el reto!!

Si $Z_{\geq k} = \sum_{v \in [n]} \mathbf{1}_{\{|C(v)| \geq k\}}$

Ejercicio 4.1. *Demuestren*

$$\{|C_{max}| \geq k\} = \{Z_{\geq k} \geq k\}.$$

Decimos que $X \lesssim_{st} Y$ (Y domina estocásticamente a X) si para todo $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \mathbf{P}(Y \geq a)$$

Ejercicio 4.2. *Resuelvan los siguientes incisos:*

- *Muestren que si X y Y están definidas en el mismo espacio, $\mathbf{P}(X \leq Y) = 1$, entonces $X \lesssim_{st} Y$.*
- *Muestren que si $X \sim \mathrm{Bin}(m,p)$ y $Y \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ con $m \leq n$ entonces $X \lesssim_{st} Y$.*
- *Describan un experimento que defina a X y Y tal que $\mathbf{P}(X \leq Y) = 1$.*

Ejercicio 4.3. *Realicen la exploración por profundidad de la gráfica vista en clase (del jueves).*

Decimos que $f = O(g)$ si existe una constante $M \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{f(n)}{g(n)} \to M$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 4.4. *si $p = \frac{1+\varepsilon}{n}$ con $\varepsilon \in (0,1)$ encuentren $\delta = \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ tal que $p = \frac{1+\delta}{n-k}$ y verifiquen que $\delta = \varepsilon + O(n^{-1})$.*

Ejercicio 4.5. *Si X, X' tienen distribución $\mathrm{Poi}(\lambda)$ y $\mathrm{Poi}(\mu)$ respectivamente (es decir $\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$) y $Y \sim \mathrm{Bin}(X, p)$, $Z = X + X'$. Calculen la distribución de Y y de Z.*

Un video para que comenten entre pares: https://www.youtube.com/watch?v=5dXulZVstbY