Percolación en gráficas finitas e infinitas

Banco de ejercicios

Laura Eslava   Marco L. Ortiz

Instrucciones:

El banco de ejercicios les ayudará a entender y extender ideas que revisamos durante las sesiones 1 y 2. Los ejercicios con * están pensados para estudiantes con experiencia en los temas o cursando posgrado.

Trabajen en equipos de 2-4 personas. Lean todas las preguntas y comenten cuales les parecen más interesantes y con cuales quieren empezar. Alternen entre trabajar individualmente y comentar sus ideas dentro del equipo. Cuando haya consenso en la solución de algún ejercicio, ejerciten la redacción formal de su solución.

Quedando 30 minutos de la sesión, haremos una revisión grupal de algunos de los ejercicios.

1 Introducción y notación de grafos y probabilidad (percolación)

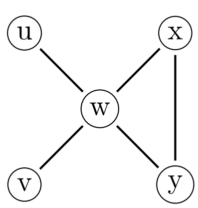
Disfruten el reto!!

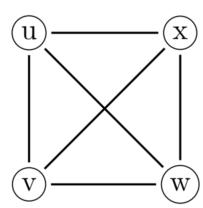
Un grafo es transitivo si para cualesquiera vértices u, v existe $\phi : V \to V$ tal que $\phi(u) = v$ y $uv \in E$ si y solo si $\phi(u)\phi(v) \in E$, es decir, ϕ es un automorfismo. Un grafo es regular si para cualesquiera u, v vértices de G cumplen $deg(u) = deg(v)$.

Ejercicio 1.1. *Prueben que los grafos transitivos son regulares.*

Ejercicio 1.2. *Sea $G = (V, E)$, $|E| = m$. Prueben que $\{0,1\}^E \simeq \{0,1\}^m$.*

Ejercicio 1.3. *Hagan explicita una función biyectiva entre $\{H : H \subseteq G\}$ y $\{0,1\}^E$ con:*





Una propiedad $\mathcal{P} \subseteq \{H : H \subseteq G\}$ decimos que es creciente si para $H_1 \subseteq H_2 \subseteq G$, $H_1 \in \mathcal{P} \Rightarrow H_2 \in \mathcal{P}$; es decreciente si para $H_1 \subseteq H_2 \subseteq G$, $H_2 \in \mathcal{P} \Rightarrow H_1 \in \mathcal{P}$.

Ejercicio 1.4. *Determinen si las siguientes propiedades son crecientes, decrecientes o ninguna.*

- $\{H : H$ *contiene un triángulo* $\}$.
- $\{H : H$ *no tiene ciclos* $\}$.
- $\{H : |C_H(v)| = k\}$.
- $\{H : |C_H(v)| \geq k\}$.

Consideremos un grafo $G = (V, E)$ y $(U_e)_{e \in E}$ una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución uniforme en $(0, 1)$. Para $p \in [0, 1]$ definimos $G_p = (V, E_p)$ donde $e \in E_p \iff U_e \leq p$. Un caso particular es el grafo de Erdös-Rényi $G_{n,p} = (K_n)_p$

Ejercicio 1.5. *Sea $X^{(n)}$ el número de triángulos en $G_{n,p}$. Usen el hecho que $X^{(n)}$ es una variable de conteo para calcular $\mathbf{E}\left[X^{(n)}\right]$.*

***Ejercicio 1.6** (Lema 1)**.** *Demuestren que si $\mathcal{P}$ es creciente, para $p_1 < p_2$:*

$$\mathbf{P}\left(G_{p_1} \in \mathcal{P}\right) \leq \mathbf{P}\left(G_{p_2} \in \mathcal{P}\right).$$

Ejercicio 1.7. *Consideren un grafo $G = (V, E)$ y una trayectoria (fija) de longitud 3, es decir, existen vértices distintos $w, x, y, z \in V$ tal que $wx, xy, yz \in E$. Definimos el evento que dicha trayectoria esté abierta como:*

$$\mathcal{A} = \{H \subseteq G : wx, xy, yz \in E_H\}.$$

Demuestren que si G es finita:

- *Para todo $H \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}\left(G_p = H\right) \leq p^3$.*
- $\mathbf{P}\left(\mathcal{A}\right) = p^3$.
- $\mathbf{P}\left(G_p \text{ tiene un camino de longitud } 3\right) \geq p^3$.

***Ejercicio 1.8.** *¿Cuáles de estas expresiones se mantienen verdaderas cuando G es infinita?*

Un video para que comenten entre pares: https://www.youtube.com/watch?v=mpe44sTSoF8

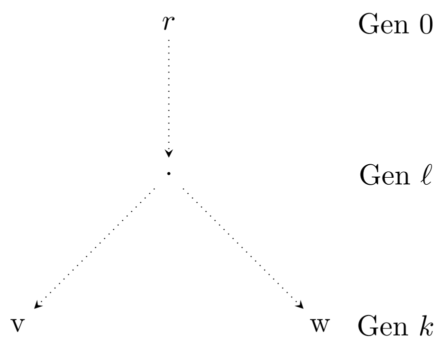
2 Transición en la probabilidad crítica ($\mathbb{Z}^d$ y T_d)

Disfruten el reto!!

Dada una secuencias $(a_i)_{i\geq 1}$ de números reales, el árbol simétricamente esférico T tiene una raíz, denotada r, con a_0 hijos, cada uno de los cuales tiene a_1 hijos, en general, cada vértice de la generación k tiene a_k hijos.

Ejercicio 2.1. *Sea V_k el número de vértices en la generación k*

- *Encuentra una fórmula para $|V_k|$.*
- *Si $v \in V_k$ está fijo. Encuentra una fórmula para el número de vértices $w \in V_k$ el tienen primer ancestro común con v en la generación ℓ con $0 \leq \ell \leq k$.*



Ejercicio 2.2. *Demuestren que si $|x| \leq 1$*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Definimos la probabilidad de percolación $\Theta_G(p) = \mathbf{P}_p\left(|C_G(v)| = \infty\right)$ y la probabilidad crítica $p_c(G) = \sup\{p : \Theta_G(p) = 0\}$. Consideremos la gráfica $(\mathbb{Z}^d, \{uv : |u-v| = 1\})$, para simplificar notación, en esta gráfica escribimos $\Theta_d(p) := \Theta_{\mathbb{Z}^d}(p)$ y $p_c(d) := p_c(\mathbb{Z}^d)$ y consideramos el vector $\bar{0}$ como vértice fijo.

***Ejercicio 2.3** (Lema 2)**.** *Prueben que $\Theta(p)$ es no decreciente y continua en p para todo $p \in [0,1] \setminus \{p_c\}$.*

Ejercicio 2.4 (Lema 3)**.** *Muestren que $\rho_c(d+1) \leq \rho_c(d)$; $\rho_c(1) = 1$.*

Denotamos P_k al número de caminos sin cruces en $\mathbb{Z}_p^d$ de longitud k iniciando en $\bar{0}$.

Ejercicio 2.5. *Demuestren que*

$$\Theta_d(p) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\left(P_k \geq 1\right).$$

Denotamos $s(k)$ al número de caminos sin cruces en $\mathbb{Z}^d$ de longitud k iniciando en $\bar{0}$ y $c(k)$ al número de ciclos de longitud k que rodean a $\bar{0}$.

Ejercicio 2.6. *En $\mathbb{Z}^2$ muestren que*

$$c(k) \leq \frac{k}{2} s(k-1).$$

Ejercicio 2.7. *Prueben la desigualdad en $\mathbb{Z}^d$*

$$s(k) \leq 2d(2d-1)^{k-1}.$$

***Ejercicio 2.8.** *Usen el grafo dual de $\mathbb{Z}^2$ para probar*

$$1 - \Theta_2(p) \leq \sum_{k=4^\infty} \mathbf{P}\left(\textit{existe un ciclo cerrado del cual que rodea a } \bar{0} \textit{ de longitud } k\right).$$

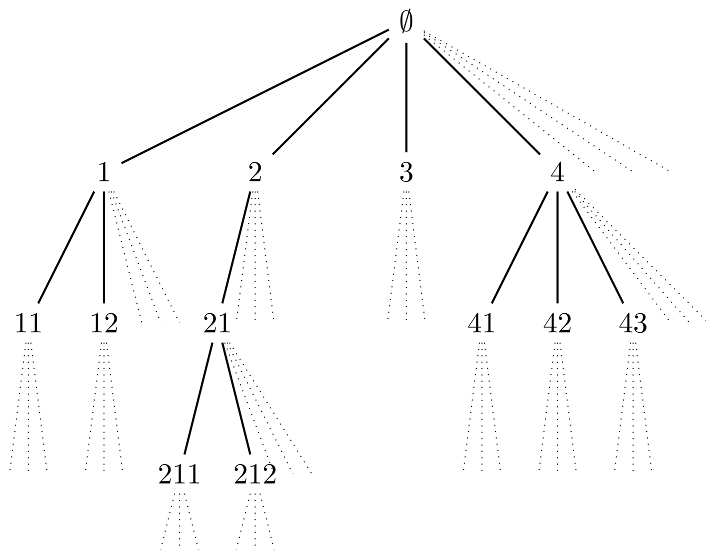
Un video para que comenten entre pares (vean sólo hasta el minuto 14:00):

https://www.youtube.com/watch?v=a-767WnbaCQ

3 Procesos de ramificación y caminatas aleatorias

Disfruten el reto!!

Sea $\mathbb{T}$ el árbol de Ulam-Harris. Mostramos abajo a $T \subseteq \mathbb{T}$ para tener un ejemplo de la estructura de $\mathbb{T}$.



Ejercicio 3.1. *Describan los vértices de $\mathbb{T}$ y para $v \in V(\mathbb{T})$ describan todos los vecinos de v.*

Definimos un proceso de ramificación $(Z_k)_{k\geq 1}$ con distribución de descendientes ξ de manera recursiva, $Z_0 = 1$, $Z_{k+1} = \sum_{\ell=1}^{Z_k} \xi_\ell^{(k)}$ donde $\left(\xi_\ell^{(k)}\right)_{k,\ell\geq 1}$ son i.i.d. con la misma distribución que ξ. Denotamos $P_k = \mathbf{P}(\xi = k)$ y $G_\xi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k \mathbf{P}(\xi = k)$.

Ejercicio 3.2. *Dibujen los casos triviales de la gráfica de $G_\xi(s)$ cuando $P_0 = 1$, $P_1 = 1$, $P_0 = 0$ y $P_1 < 1$.*

Ejercicio 3.3. *Denota $\eta := \mathbf{P}(\exists n \geq 1 : Z_n = 0)$ la probabilidad de extinción, muestren lo siguiente*

- *$G(s)$ tiene sólo un punto fijo o tiene sólo dos puntos fijos.*
- *El primer punto fijo para $G(s)$ es η.*

Los índices de las variables aleatorias $\xi_\ell^{(k)}$ sugieren una construcción secuencial de un árbol T. Vamos a describir un algoritmo con $(\mathcal{A}_m, \mathcal{U}_m)_{m\geq 0}$ donde $\mathcal{A}_m$ serán los vértices en espera y $\mathcal{U}_m$ los vértices explorados.

- Inicia con un vértice llamado $\emptyset$

- Genera $(\xi_m)_{m\geq 1}$ muestras independientes de ξ, para determinar el número de hijos del m-ésimo individuo "explorado".

$$A_0 = \{\emptyset\}, \quad \mathcal{U}_0 = \emptyset$$

- En el m-ésimo paso: selecciona $v_m \in \mathcal{A}_{m-1}$ y agrega ξ_m hijos de v_m (llamados $v_{m1}, \ldots, v_{m\xi_m}$) y actualiza los conjuntos

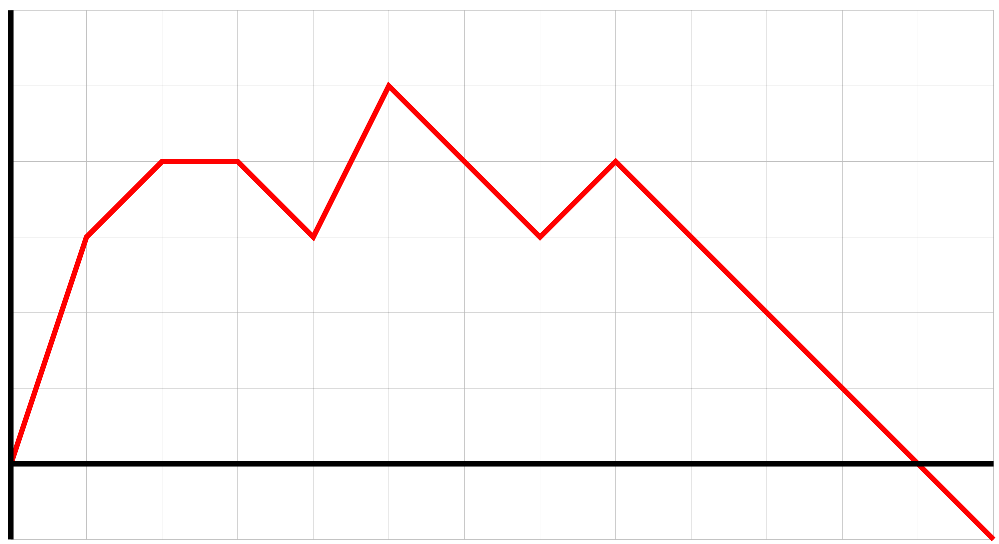
$$\mathcal{A}_m = (\mathcal{A}_{m-1} \cup \{v_{m1}, \ldots, v_{m\xi_m}\}) \setminus \{v_m\}, \quad \mathcal{U}_m = \mathcal{U}_{m-1} \cup \{v_m\}$$

- Detente cuando $\mathcal{A}_m = \emptyset$.

La caminata aleatoria asociada a T está definida por $S_0 = 1$ y $S_m - S_{m-1} = \xi_m - 1$.

Ejercicio 3.4. *Dibujen el árbol asociado a la siguiente caminata*

$$(0, 3, 4, 4, 3, 5, 4, 3, 4, 3, 2, 1, 0, -1)$$



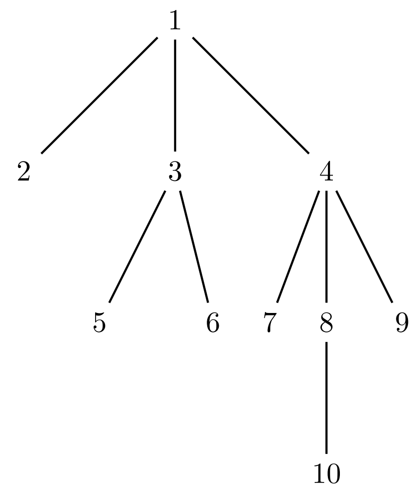
Ejercicio 3.5. *Verifiquen que*

$$|T| = \inf\{m : A_m = \emptyset\} = \inf\{m : S_m = -1\}.$$

Ejercicio 3.6. *Realicen la exploración por anchura y la exploración por profundidad del siguiente árbol; grafíquen la caminata asociada.*

***Ejercicio 3.7.** *Prueben que*

$$\mathbf{P}\left(|T| = n\right) = \frac{1}{n}\mathbf{P}\left(\sum_{m=1}^{n} \xi_m = n - 1\right).$$



4 Nacimiento de la componente gigante

Disfruten el reto!!

Si $Z_{\geq k} = \sum_{v \in [n]} \mathbf{1}_{\{|C(v)| \geq k\}}$

Ejercicio 4.1. *Demuestren*

$$\{|C_{max}| \geq k\} = \{Z_{\geq k} \geq k\}.$$

Decimos que $X \lesssim_{st} Y$ (Y domina estocásticamente a X) si para todo $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \mathbf{P}(Y \geq a)$$

Ejercicio 4.2. *Resuelvan los siguientes incisos:*

- *Muestren que si X y Y están definidas en el mismo espacio, $\mathbf{P}(X \leq Y) = 1$, entonces $X \lesssim_{st} Y$.*
- *Muestren que si $X \sim \mathrm{Bin}(m,p)$ y $Y \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ con $m \leq n$ entonces $X \lesssim_{st} Y$.*
- *Describan un experimento que defina a X y Y tal que $\mathbf{P}(X \leq Y) = 1$.*

Ejercicio 4.3. *Realicen la exploración por profundidad de la gráfica vista en clase (del jueves).*

Decimos que $f = O(g)$ si existe una constante $M \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{f(n)}{g(n)} \to M$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 4.4. *si $p = \frac{1+\varepsilon}{n}$ con $\varepsilon \in (0,1)$ encuentren $\delta = \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ tal que $p = \frac{1+\delta}{n-k}$ y verifiquen que $\delta = \varepsilon + O(n^{-1})$.*

Ejercicio 4.5. *Si X, X' tienen distribución $\mathrm{Poi}(\lambda)$ y $\mathrm{Poi}(\mu)$ respectivamente (es decir $\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$) y $Y \sim \mathrm{Bin}(X,p)$, $Z = X + X'$. Calculen la distribución de Y y de Z.*

Un video para que comenten entre pares: https://www.youtube.com/watch?v=5dXulZVstbY