Sobre las series de los recíprocos de los números poligonales

José Hernández Santiago*

stgo@matmor.unam.mx

1. Introducción

Recientemente se planteó en [4] el problema de calcular la suma de la serie de los recíprocos de los números pentagonales. En esta nota se tiene por objetivo responder a una cuestión motivada por ese problema, a saber:

Sea $\mathfrak{n}$ un número natural mayor que 2. ¿Cuánto vale la suma de la serie infinita conformada por los recíprocos de los números $\mathfrak{n}$-gonales?

Los números $\mathfrak{n}$-gonales se representan mediante arreglos de puntos en el plano. Para cada $\mathfrak{n} \in \mathbb{N}$, el primer número $\mathfrak{n}$-gonal corresponde a un arreglo que consta únicamente de un punto. El $(k+1)$-ésimo número $\mathfrak{n}$-gonal corresponde al arreglo que se obtiene a partir del arreglo que representa al k-ésimo número $\mathfrak{n}$-gonal después de agregar un gnomon[1] conformado por $1 + k(\mathfrak{n} - 2)$ puntos.

Por ejemplo, si denotamos, como es la usanza, con Δ_k al k-ésimo número 3-gonal (o triangular), entonces

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 3, \quad \Delta_3 = 6, \quad \Delta_4 = 10, \quad \Delta_5 = 15, \ldots$$

y los arreglos de puntos correspondientes son

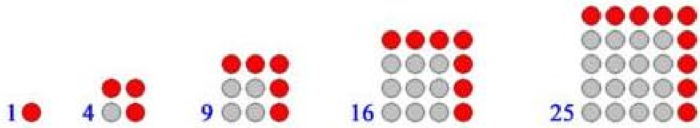
*Centro de Ciencias Matemáticas UNAM. Apartado Postal 61-3, Xangari. Morelia, Michoacán. C.P. 58089. México.

[1]En *The Book of Numbers*, Conway y Guy mencionan que: "... los antiguos griegos llamaron gnomon a la pieza que se le puede añadir a una figura dada para producir una figura más grande de la misma forma". Añaden también que la designación está motivada por la forma de los indicadores en los relojes solares más comunes (cf. acepciones de *estilo* en el diccionario de la RAE).

No resulta difícil convencerse que el k-ésimo número triangular es $\dfrac{k(k+1)}{2}$. Por tanto, la suma de la serie de los recíprocos de los números triangulares es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 2 \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2.$$

El caso $\mathfrak{n} = 4$ es célebre. Los primeros números 4-gonales son



y, de hecho, el k-ésimo número de este tipo es precisamente k^2; por consiguiente, la serie cuya suma se ha de obtener en este caso es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Es sabido que la serie anterior tiene por suma $\dfrac{\pi^2}{6}$. En el capítulo 8 de [2] se pueden consultar tres ingeniosas demostraciones de este resultado.

La interrogante que aquí consideramos ha sido abordada anteriormente en la literatura (ver [3], por ejemplo). No obstante, el enfoque que se sigue en este escrito es distinto de los publicados previamente. Más aún, la solución que aquí se presenta es más general[2] y se obtiene básicamente usando funciones generatrices.

Los principales ingredientes que intervienen en los resultados se presentan en la sección **2**. En la sección **3** se deriva una expresión para las sumas de las series mencionada en el título de la nota. En vista de los comentarios de los párrafos anteriores, en dicha sección se restringe la atención a números $\mathfrak{n}$-gonales con $\mathfrak{n} \geq 5$.

[2]En el escrito de [3] sólo se estudia el caso en que $\mathfrak{n}$ es par.

2. Observaciones preliminares

La justificación de la fórmula que a la postre presentaremos depende principalmente de dos hechos: un conocido resultado en series de potencias y una feliz idea del Álgebra que involucra a las raíces n-ésimas de la unidad. El resultado aludido lo introducimos sin mayor preámbulo, se trata del

Teorema de continuidad de Abel. Si el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es 1 y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

cuando $z \to 1$ sobre el intervalo $(0, 1)$.

$\square$

El lector puede encontrar una prueba del teorema anterior en [1, pág. 41].

Procedemos a explicar a continuación lo de la feliz idea. Supóngase que partimos de una función $F(z)$ definida en términos de una serie de potencias, esto es

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

Un problema que suele aparecer de manera natural en la práctica es la representación, en términos de $F(z)$, de la serie que se obtiene al eliminar los términos de grado impar en (1). Esto es, se desea obtener una expresión *sencilla* para la suma de

$$a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots$$

Las propiedades de las funciones pares e impares permiten obtener rápidamente una solución a esta cuestión. Dado que

$$F(-z) = a_0 - a_1 z + a_2 z^2 - \ldots$$

se sigue de (1) que

$$\begin{aligned} F(z) + F(-z) &= (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) + (a_0 - a_1 z + a_2 z^2 - \ldots) \\ &= 2(a_0 + a_2 z^2 + \ldots) \end{aligned}$$

y por tanto,

$$a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots = \frac{F(z) + F(-z)}{2}.$$

Supongamos ahora que en lugar de eliminar cada segundo término de la serie en (2), se eliminan aquellos términos cuyo grado no es divisible por 3. ¿Es posible encontrar en tal caso una expresión para la suma de la serie resultante en términos de la función F?

La respuesta es afirmativa y para convencerse de ello uno puede recurrir a las propiedades de las raíces cúbicas de la unidad. Recuérdese que si

$$\omega := \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3},$$

entonces las tres raíces cúbicas de la unidad son $1, \omega$ y ω^2. Luego, si $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que $0 = (\omega^n)^3 - 1 = (\omega^n - 1)(\omega^{2n} + \omega^n + 1)$ y por tanto

$$\frac{1 + \omega^n + \omega^{2n}}{3} = \begin{cases} 1 & \text{si } 3|n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, al ser

$$\begin{aligned} F(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \ldots \\ F(\omega z) &= a_0 + a_1 \omega z + a_2 \omega^2 z^2 + a_3 \omega^3 z^3 + a_4 \omega^4 z^4 + a_5 \omega^5 z^5 + \ldots \\ F(\omega^2 z) &= a_0 + a_1 \omega^2 z + a_2 \omega^4 z^2 + a_3 \omega^6 z^3 + a_4 \omega^8 z^4 + a_5 \omega^{10} z^5 + \ldots \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} F(z) + F(\omega z) + F(\omega^2 z) &= 3a_0 + a_1(1 + \omega + \omega^2)z + a_2(1 + \omega^2 + \omega^4)z^2 + \ldots \\ &= 3a_0 + a_3(1 + \omega^3 + \omega^6)z^3 + a_6(1 + \omega^6 + \omega^{12})z^6 + \ldots \\ &= 3(a_0 + a_3 z^3 + a_6 z^6 + \ldots) \end{aligned}$$

de donde se colige que

$$a_0 + a_3 z^3 + a_6 z^6 + \ldots = \frac{F(z) + F(\omega z) + F(\omega^2 z)}{3}.$$

Nótese que las manipulaciones efectuadas son válidas siempre que z pertenezca al disco de convergencia de la serie de potencias $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$.

La técnica empleada en la determinación de la suma de $a_0 + a_3 z^3 + a_6 z^6 + \ldots$ resuelve incluso la versión más general de nuestro problema, esto es, cuando de la representación en serie de $F(z)$ retenemos sólo aquellos términos que tienen coeficiente con subíndice congruente con r módulo algún número natural m distinto de 1.

Proposición 2.1. Sean $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Supongamos que el disco de convergencia de la serie de potencias $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$

es $\mathrm{B}_R(0) := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$. Si dicha serie de potencias representa a la función F en $\mathrm{B}_R(0)$, *i.e.*, $F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ para cada $z \in \mathrm{B}_R(0)$, entonces

$$a_r z^r + a_{r+m} z^{r+m} + a_{r+2m} z^{r+2m} + \dots \quad = \quad \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \omega^{-kr} F(\omega^k z),$$

donde $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{m} + i \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{m}$.

Demostración. El lado derecho de la igualdad es

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{-kr}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\omega^k z)^n = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{-kr} a_n(\omega^k z)^n = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{k=0}^{m-1}(\omega^{n-r})^k.$$

Ahora bien, al saberse que

$$\sum_{k=0}^{m-1}(\omega^{n-r})^k = \begin{cases} m & \text{si } m|(n-r), \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{-kr}F(\omega^k z) &= \frac{1}{m}\sum_{n\in\mathbb{N}, m|(n-r)} m a_n z^n \\ &= a_r z^r + a_{r+m} z^{r+m} + a_{r+2m} z^{r+2m} + \dots \end{aligned}$$

y la prueba termina.

$\square$

El teorema siguiente es una consecuencia de la proposición anterior. La identidad que aparece en él será esencial en la determinación de las sumas que nos interesan.

Teorema 2.2. Sean p y q dos enteros con $0 < p < q$. Se cumple entonces que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + p/q}\right) = \frac{q}{p} - \frac{\pi}{2}\cot\frac{p}{q}\pi - \ln 2q + 2\sum_{0<k<q/2}\cos\frac{2pk}{q}\pi \cdot \ln \operatorname{sen}\frac{k}{q}\pi.$$

Demostración. La convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p/q}\right)$ se obtiene de manera inmediata del criterio de comparación para series de términos no negativos. Puesto que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p/q}\right)z^{p+nq}$ es 1, el teorema de continuidad de Abel nos permite asegurar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p/q}\right)=\lim_{z\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p/q}\right)z^{p+nq}. \tag{2}$$

Así, la prueba se reduce a evaluar el límite anterior. Dicha evaluación se llevará a cabo en tres pasos:

I) Para $z\in \mathrm{B}_1(0)$, denotemos con $G(z)$ a la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$. Si log es la rama principal del logaritmo, la identidad

$$\log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}$$

vale para cada $z\in \mathrm{B}_1(0)$ y por tanto, $G(z)=-\log(1-z)$. De la proposición **2.1** se sigue entonces que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{p+nq}}{n+p/q} &= q\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{p+nq}}{p+nq}\\ &= q\left(\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\omega^{-kp}G(\omega^k z)-\frac{z^p}{p}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{q-1}\omega^{-kp}G(\omega^k z)-\frac{q}{p}z^p\\ &= -\sum_{k=0}^{q-1}\omega^{-kp}\log(1-\omega^k z)-\frac{q}{p}z^p. \end{aligned}\tag{3}$$

Por otro lado,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{p+nq}}{n}=z^p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{nq}}{n}=z^p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z^q)^n}{n}=z^pG(z^q)=-z^p\log(1-z^q).$$

Las igualdades en (2) y (3) nos permiten concluir que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p/q}\right)z^{p+nq} &= \sum_{k=0}^{q-1}\omega^{-kp}\log(1-\omega^k z)\\ &+ \frac{q}{p}z^p-z^p\log(1-z^q). \end{aligned}\tag{4}$$

II) De acuerdo con lo obtenido en (4) tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p/q}\right)z^{p+nq}=a(z)+b(z) \tag{5}$$

donde

$$\begin{aligned} a(z) &= \log(1-z)+\frac{q}{p}z^p - z^p\log(1-z^q) \quad \text{y} \\ b(z) &= \sum_{k=1}^{q-1}\omega^{-kp}\log(1-\omega^k z). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 1^-} a(z) &= \lim_{z\to 1^-}\left((1-z^p)\log(1-z)+\frac{q}{p}z^p - z^p\log\frac{1-z^q}{1-z}\right) \\ &= \frac{q}{p}-\ln q \end{aligned}$$

y

$$\lim_{z\to 1^-} b(z) = \lim_{z\to 1^-}\sum_{k=1}^{q-1}\omega^{-kp}\log(1-\omega^k z) = \sum_{k=1}^{q-1}\omega^{-kp}\log(1-\omega^k). \tag{6}$$

III) Reescribiremos ahora la suma obtenida en (6). Empezamos por calcular el módulo y el argumento del complejo $1-\omega^k = 1-\left(\cos\frac{2k}{q}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k}{q}\pi\right)$. Hagamos $\theta = \frac{2k}{q}\pi$. Dado que

$$\begin{aligned} |(1-\cos\theta)-i\,\mathrm{sen}\,\theta|^2 &= (1-2\cos\theta+\cos^2\theta)+\mathrm{sen}^2\,\theta \\ &= (1+\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\,\theta)-2\cos\theta \\ &= 2(1-\cos\theta) \\ &= 4\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

se concluye que $|1-\omega^k| = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{k}{q}\pi$. Por otra parte, de identidades trigonométricas básicas se obtiene que

$$(1-\cos\theta)-i\,\mathrm{sen}\,\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)\right\}$$

y así, $\arg(1-\omega^k) = \dfrac{\theta - \pi}{2}$. Al retomar lo obtenido en (6) se llega a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{q-1} \omega^{-kp} \log(1-\omega^k) &= \sum_{k=1}^{q-1} \omega^{-kp} \big(\ln|1-\omega^k| + i \arg(1-\omega^k)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{q-1} \omega^{-kp} \left(\ln 2 \operatorname{sen} \frac{k}{q}\pi + i\left(\frac{k}{q}\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Pasamos ahora a simplicar algunos términos de esta última expresión. En primer lugar, resulta[3] que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{q-1} \omega^{-kp} \left(\ln 2 + \frac{ik\pi}{q} - \frac{i\pi}{2}\right) &= -\ln 2 + \frac{i\pi}{\omega^{-p}-1} + \frac{i\pi}{2} \\
&= -\ln 2 - \frac{\pi}{2} \cot \frac{p}{q}\pi. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Luego, si $h(k) = \omega^{-kp} \ln \operatorname{sen} \dfrac{k}{q}\pi$, $\mathbf{A} = (0, q/2)$ y $\mathbf{B} = (q/2, q-1]$ se

[3]Las sumas involucradas en esta parte tienen la forma,

$$\sum_{k=1}^{q-1} x^k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{q-1} kx^k.$$

La expresión de la izquierda corresponde a la suma de los primeros $q-1$ términos de una progresión geométrica. No resulta díficil convencerse de que,

$$\sum_{k=1}^{q-1} x^k = \frac{x^q - x}{x-1}.$$

Una manera de evaluar la suma de la derecha es derivando (con respecto a x) ambos lados de está última identidad y se llega a que

$$\sum_{k=1}^{q-1} kx^k = \frac{qx^q - x}{x-1} - \frac{x(x^q-x)}{(x-1)^2}.$$

observa que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{q-1} h(k) &= \sum_{k\in\mathbf{A}} h(k) + \sum_{k\in\mathbf{B}} h(k) \\
&= \sum_{k\in\mathbf{A}} h(k) + \sum_{k\in\mathbf{B}} \omega^{-kp} \ln \operatorname{sen} \frac{k}{q}\pi \\
&= \sum_{k\in\mathbf{A}} h(k) + \sum_{0<k<q/2} \omega^{-(q-k)p} \ln \operatorname{sen} \frac{k}{q}\pi \\
&= \sum_{0<k<q/2} (\omega^{-kp} + \omega^{-(q-k)p}) \ln \operatorname{sen} \frac{k}{q}\pi \\
&= 2 \sum_{0<k<q/2} \cos \frac{2pk}{q}\pi \cdot \ln \operatorname{sen} \frac{k}{q}\pi. \qquad (8)
\end{aligned}$$

De las igualdades en (2), (5), (6), (7) y (8) se ha llegado a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p/q} \right) &= \lim_{z\to 1^-} a(z) + \lim_{z\to 1^-} b(z) \\
&= \frac{q}{p} - \frac{\pi}{2} \cot \frac{p}{q}\pi - \ln 2q + 2 \sum_{0<k<q/2} \cos \frac{2pk}{q}\pi \cdot \ln \operatorname{sen} \frac{k}{q}\pi,
\end{aligned}$$

que es precisamente lo que deseabamos establecer.

□

3. Cálculos finales

Atendiendo a lo comentado en la introducción del artículo tenemos que, si $p_{\mathfrak{n}}(k)$ denota al k-ésimo número $\mathfrak{n}$-gonal, entonces

$$p_{\mathfrak{n}}(k) = p_{\mathfrak{n}}(k-1) + (1 + (k-1)(\mathfrak{n}-2))$$

y, consecuentemente,

$$p_{\mathfrak{n}}(k) = \frac{(\mathfrak{n}-2)k^2 - (\mathfrak{n}-4)k}{2}.$$

Estamos ahora en condiciones de darle punto final a nuestro problema. Denotemos con $\mathfrak{S}_{\mathfrak{n}}$ a la suma de la serie infinita de los recíprocos de los números

$\mathfrak{n}$-gonales. Puesto que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{\mathfrak{n}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_{\mathfrak{n}}(k)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(\mathfrak{n}-2)k^2-(\mathfrak{n}-4)k},
\end{aligned}$$

al hacer la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{2}{(\mathfrak{n}-2)k^2-(\mathfrak{n}-4)k}$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{\mathfrak{n}} &= \frac{2}{4-\mathfrak{n}}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-\frac{4-\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}-2}}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-\frac{4-\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}-2}}-\frac{1}{k+\frac{4-\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}-2}}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{4-\mathfrak{n}}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{\mathfrak{n}-4}{\mathfrak{n}-2}}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-\frac{4-\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}-2}}-\frac{1}{k+\frac{4-\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}-2}}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{4-\mathfrak{n}}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{\mathfrak{n}-4}{\mathfrak{n}-2}}\right)+\frac{2(4-\mathfrak{n})}{\mathfrak{n}-2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\left(\frac{\mathfrak{n}-4}{\mathfrak{n}-2}\right)^2}\right\} \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{4-\mathfrak{n}}\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{\mathfrak{n}-4}{\mathfrak{n}-2}}\right)}_{\mathrm{M}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\mathfrak{n}-2}\cdot\frac{1}{k^2-\left(\frac{\mathfrak{n}-4}{\mathfrak{n}-2}\right)^2}}_{\mathrm{N}}. \qquad (9)
\end{aligned}$$

La suma N de la segunda serie en (9) la obtenemos apelando al desarrollo en fracciones parciales de la función cotangente (ver [2, capítulo 23]). La evaluación de M es directa del teorema **2.2**. Específicamente, llegamos a que

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} &= -\frac{2(\mathfrak{n}-2)}{(\mathfrak{n}-4)^2}+\frac{\pi}{\mathfrak{n}-4}\cot\frac{\mathfrak{n}-4}{\mathfrak{n}-2}\pi+\frac{2}{\mathfrak{n}-4}\ln 2(\mathfrak{n}-2) \\
&- \frac{4}{\mathfrak{n}-4}\sum_{0<k<(\mathfrak{n}-2)/2}\cos 2\left(\frac{\mathfrak{n}-4}{\mathfrak{n}-2}\right)k\pi\cdot\ln\operatorname{sen}\frac{k}{\mathfrak{n}-2}\pi
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{N} &= \frac{4}{\mathfrak{n}-2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\left(\frac{\mathfrak{n}-4}{\mathfrak{n}-2}\right)^2} \\
&= \frac{4}{\mathfrak{n}-2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{n}-2}{\mathfrak{n}-4}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{n}-2}{\mathfrak{n}-4}\right)\pi\cot\frac{\mathfrak{n}-4}{\mathfrak{n}-2}\pi\right).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{\mathfrak{n}} &= \frac{2}{\mathfrak{n}-4}\ln 2(\mathfrak{n}-2) - \frac{\pi}{\mathfrak{n}-4}\cot\frac{\mathfrak{n}-4}{\mathfrak{n}-2}\pi \\
&- \frac{4}{\mathfrak{n}-4}\sum_{0<k<(\mathfrak{n}-2)/2}\cos\frac{2(\mathfrak{n}-4)k}{\mathfrak{n}-2}\pi\cdot\ln\operatorname{sen}\frac{k}{\mathfrak{n}-2}\pi.
\end{aligned}$$

□

4. Comentarios adicionales

En la tabla que sigue presentamos los valores que nuestra fórmula para $\mathfrak{S}_{\mathfrak{n}}$ proporciona para algunas asignaciones de la variable $\mathfrak{n}$. Nuestra fórmula dio cuenta, en su momento, de una entrada errónea en la primera tabla de [5].

$\mathfrak{n}$	$\mathfrak{S}_{\mathfrak{n}}$
5	$\dfrac{9\ln 3-\pi\sqrt{3}}{3}$
6	$2\ln 2$
8	$\dfrac{9\ln 3+\pi\sqrt{3}}{12}$
10	$\dfrac{6\ln 2+\pi}{6}$
14	$\dfrac{4\ln 2+3\ln 3+\pi\sqrt{3}}{10}$

Referencias

[1] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, Inc., 1979.

[2] M. Aigner y G. M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*, 4th edition, Springer Verlag, 2010.

[3] L. Downey, B. W. Ong y J. A. Sellers. Beyond the Basel Problem: Sums of Reciprocals of Figurate Numbers, *College Math. J.* **39** (2008) 391-394.

[4] C. Rousseau. Problem 1147, *Pi Mu Epsilon J.* **12** (2007) 363.

[5] Wikipedia. Polygonal Number. en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_Number

[6] H. S. Wilf. *generatingfunctionology*, 2nd edition, AK Peters, Ltd., 1994.