Universidad Autónoma de Guerrero

Unidad Académica de Matemáticas

Nodo Cd. Altamirano

ESPACIOS VECTORIALES EN PROBLEMAS Y SOLUCIONES

José Juan Rodríguez Vera

Asesor: M.C. José Hdz. Stgo.

Cd. Altamirano, Gro. — Agosto de 2015.

El éxito en la vida no está en vencer siempre, sino en no desanimarse nunca.

– Napoleón Bonaparte

Índice general

PREFACIO

En este trabajo se presentan soluciones a los 105 ejercicios que se encuentran en las primeras cinco secciones del capítulo I del libro de Álgebra Lineal de los autores S. Friedberg, A. J. Insel y L. E. Spence. El objetivo básico que se ha tenido durante todo el proceso de realización de esta obra es que ésta pueda llegar a fungir como un complemento a cualquier curso de Álgebra Lineal cuya referencia bibliográfica principal sea el mencionado texto de Friedberg, Insel y Spence.

Los ejercicios se presentan siguiendo el orden en que se encuentran en la edición en español del libro (para más detalles sobre tal edición, ver la entrada [**1**] de la **Bibliografía**). Algunas soluciones dependen de ejercicios y/o resultados que se encuentran en secciones previas del libro. Con el fin de agilizar la lectura del presente trabajo se incorporó un apéndice donde se listan todos los resultados que Friedberg, Insel y Spence establecen en las primeras cinco secciones del capítulo I de su texto. Para referirnos a ejercicios resueltos previamente, utilizamos un número romano seguido por un punto y un número indoarábigo en negritas. El número romano indica la sección a la que pertenece el ejercicio al cual nos estamos refiriendo y el número indoarábigo en negritas indica la posición del ejercicio en cuestión dentro de la sección que lo contiene. Así, por ejemplo, con la frase "... el ejercicio III.**24**" se estará haciendo alusión al ejercicio **24** de la sección III de nuestro trabajo. El número romano se omite cuando el ejercicio pertenece a la misma sección que la pregunta desde la cual se le invoca.

La notación que se ha seguido en el presente trabajo es prácticamente la misma que la que Friedberg, Insel y Spence emplean en su libro. En caso de que surgiera alguna duda en este rubro, lo más recomendable—antes de todo—sería consultar [**1**, pág. 535].

Finalmente, deseo reiterar en este espacio mis agradecimientos a los sinodales, M.C. Jerónimo Mondragón Suárez y M.C. Andrés Piedra Charco, por la minuciosa revisión que hicieron de este escrito y por las valiosas correcciones que de una versión preliminar del mismo me hicieron llegar a su debido tiempo. Las falencias subsistentes en la obra son, evidentemente, responsabilidad exclusiva de su autor.

Jośe Juan Rodríguez Vera,
Cd. Altamirano, Gro., agosto de 2015.

Sección I. Introducción

1. Determinar si los vectores que parten del origen y terminan en los siguientes puntos son paralelos.

(a) $(3, 1, 2)$ y $(6, 4, 2)$
(b) $(-3, 1, 7)$ y $(9, -3, -21)$
(c) $(5, -6, 7)$ y $(-5, 6, -7)$
(d) $(2, 0, -5)$ y $(5, 0, -2)$

Solución.
(Recuérdese que, de acuerdo con Friedberg, Insel y Spence, dos vectores no nulos x y y son paralelos si se cumple que $y = tx$ para algún número real t.)
(a) Los vectores no son paralelos puesto que no existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $(3, 1, 2) = t(6, 4, 2)$. En efecto, de darse la igualdad anterior se cumpliría que $t \in \mathbb{R}$ es tal que $3 = 6t$ y que $1 = 4t$; de esto se seguiría que $\frac{3}{6} = t = \frac{1}{4}$, lo cual es evidentemente absurdo.
(b) Estos dos vectores sí son paralelos. Para convencerse de ello basta con notar que la igualdad $(-3, 1, 7) = t(9, -3, -21)$ se cumple al elegir $t = -\frac{1}{3}$.
(c) Los vectores sí son paralelos pues $(5, -6, 7) = (-1)(-5, 6, -7)$.
(d) Este par vectores no son paralelos puesto que no existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $(2, 0, -5) = t(5, 0, -2)$. En efecto, de la igualdad anterior se desprendería que el número t es tal que $2 = 5t$ y $-5 = -2t$; estas igualdades implicarían a su vez que $\frac{2}{5} = \frac{5}{2}$, lo cual es absurdo.

---

2. Encontrar las ecuaciones de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos en el espacio.

(a) $(3, -2, 4)$ y $(-5, 7, 1)$
(b) $(2, 4, 0)$ y $(-3, -6, 0)$
(c) $(3, 7, 2)$ y $(3, 7, -8)$
(d) $(-2, -1, 5)$ y $(3, 9, 7)$

Solución.

(a) Un vector de dirección de la recta que pasa por estos dos puntos tiene como coordenadas $(-5, 7, 1) - (3, -2, 4) = (-8, 9, -3)$. Luego, la ecuación buscada es:

$$(x(t), y(t), z(t)) = (3, -2, 4) + t(8, -9, 3),\ t \in \mathbb{R}.$$

(b) En este caso el vector de dirección es $(-3, -6, 0) - (2, 4, 0) = (-5, -10, 0)$. Por lo tanto, la ecuación buscada es:

$$(x(t), y(t), z(t)) = (2, 4, 0) + t(-5, -10, 0),\ t \in \mathbb{R}.$$

Procediendo de la misma manera que en los incisos anteriores, podemos concluir que las ecuaciones de las rectas en los incisos (c) y (d) son las siguientes:

(c)$(x(t), y(t), z(t)) = (3, 7, 2) + t(0, 0, -10),\ t \in \mathbb{R}.$

(d)$(x(t), y(t), z(t)) = (-2, -1, 5) + t(5, 10, 2),\ t \in \mathbb{R}.$

---

3. Encontrar las ecuaciones de los planos que contienen los siguientes puntos en el espacio.

(a) $P = (2, -5, -1)$, $Q = (0, 4, 6)$ y $R = (-3, 7, 1)$
(b) $P = (3, -6, 7)$, $Q = (-2, 0, -4)$ y $R = (5, -9, -2)$
(c) $P = (-8, 2, 0)$, $Q = (1, 3, 0)$ y $R = (6, -5, 0)$
(d) $P = (1, 1, 1)$, $Q = (5, 5, 5)$ y $R = (-6, 4, 2)$

Solución.

(a) El extremo final del vector que parte del origen y tiene la misma dirección que el vector que va de P a Q es $(0, 4, 6,) - (2, -5, -1) = (-2, 9, 7)$; de la misma forma, el extremo del vector que parte del origen y tiene la misma dirección del vector que va de P a R es el siguiente $(-3, 7, 1) - (2, -5, -1) = (-5, 12, 2)$. Luego, la ecuación del plano que contiene a los tres puntos dados es

$$(x, y, z) = (2, -5, -1) + t_1(-2, 9, 7) + t_2(-5, 12, 2),\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Los incisos del (b) al (d) se pueden resolver fácilmente siguiendo la solución del inciso (a). Los resultados finales son los siguientes:

(b)$(x, y, z) = (3, -6, 7) + t_1(-5, 6, -11) + t_2(2, -3, -9),\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$

(c)$(x, y, z) = (-8, 2, 0) + t_1(9, 1, 0) + t_2(14, -7, 0),\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$

(d)$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t_1(4, 4, 4) + t_2(-7, 3, 1),\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$

---

4. ¿Cuáles son las coordenadas del vector 0 en el plano euclidiano que satisfacen la condición 3 de la página 3? Demostrar que esta selección de coordenadas satisface la condición 3.

Solución.
Afirmamos que las coordenadas del vector 0 que satisfacen la condición 3 de la página 3 son $(0,0)$. En efecto, sea $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Puesto que

$$(a_1, a_2) + (0,0) = (a_1 + 0, a_2 + 0) = (a_1, a_2),$$

concluimos que $(0,0)$ cumple la condición 3 de la página 3.

---

5. Demostrar que si el vector x parte del origen del plano euclidiano y termina en el punto de coordenadas (a_1, a_2), entonces el vector tx que parte del origen termina en el punto de coordenadas (ta_1, ta_2).

Solución.
Como el vector x parte de origen del plano euclidiano y termina en el punto (a_1, a_2) entonces $x = (a_1, a_2) - (0,0)$. De lo anterior se sigue que $tx = t[(a_1, a_2) - (0,0)]$. Realizando la multiplicación que aparece en el lado derecho de la igualdad anterior tenemos que $t(a_1, a_2) - t(0,0) = (ta_1, ta_2)$. Por lo tanto, el vector tx parte del origen y termina en el punto (ta_1, ta_2).

---

6. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan.

Solución.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que uno de los vértices del paralelogramo es el punto $(0,0)$ y que además uno de sus lados está sobre el eje X. Supongamos que el otro vértice que se encuentra sobre el eje X es $(a,0)$. Si se tiene que uno de los vértices del paralelogramo que se encuentra fuera del eje X es (b,c) entonces por consideraciones básicas de geometría analítica se puede asegurar que el cuarto vértice del paralelogramo es el punto $(a+b,c)$, véase la Figura 1. Lo que haremos a continuación es determinar las ecuaciones de las diagonales l_1 y l_2 del paralelogramo. Utilizando la fórmula punto-punto para la ecuación de la recta tenemos que la ecuación de l_1 es

$$y = \frac{c}{b-a}(x-a)$$

y la de l_2 es

$$y = \frac{c}{a+b}x.$$

Para ver en que punto se intersecan estas dos diagonales, empezamos por igualar el miembro derecho de la ecuación de l_1 con el miembro derecho de la ecuación de l_2:

$$\frac{c}{b-a}(x-a) = \frac{c}{a+b}(x)$$

Resolviendo esta ecuación para x obtenemos que:

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación de la recta l_2 se llega a que

$$y = \frac{c}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{c(a+b)}{2(a+b)} = \frac{c}{2}.$$

Así pues, las rectas l_1 y l_2 se intersecan en el punto $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$. No resulta difícil convencerse de que este es precisamente el punto medio de ambas rectas y el resultado se sigue.

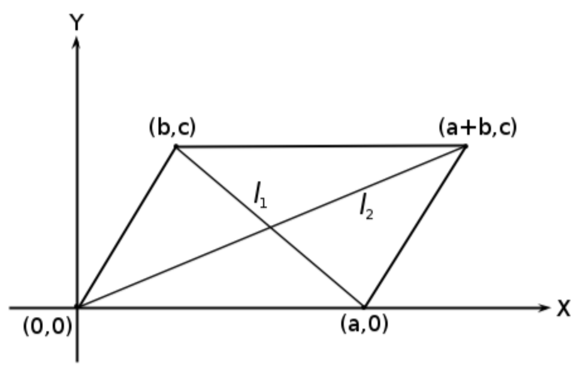

Figura 1

Sección II. Espacios vectoriales

1. Determinar si las siguientes expresiones son falsas o verdaderas.

(a) Todo espacio vectorial contiene un vector cero.
(b) Un espacio vectorial puede tener más de un vector cero.
(c) En cualquier espacio vectorial $ax = bx$ implica $a = b$.
(d) En cualquier espacio vectorial $ax = ay$ implica $x = y$.
(e) Un elemento de F^n puede ser considerado como un elemento de $M_{n\times 1}(F)$.
(f) Una matriz de $m \times n$ tiene m columnas y n renglones.
(g) En $P(F)$ solo se pueden sumar polinomios del mismo grado.
(h) Si f y g son polinomios de grado n, entonces $f + g$ es un polinomio de grado n.
(i) Si f es polinomio de grado n y c es un escalar no nulo, entonces cf es un polinomio de grado n.
(j) Un elemento no nulo de F puede considerarse como un elemento de $P(F)$ de grado 0.
(k) Dos funciones en $\mathcal{F}(S, F)$ son iguales si y solo si toman los mismos valores en cada punto de S.

Solución.

(a) Verdadero, puesto que todo espacio vectorial tiene *un* neutro aditivo (por definición) que es precisamente el elemento del espacio vectorial al cual se le conoce como vector cero.
(b) Falso, en cualquier espacio vectorial hay un único vector cero.
(c) Falso, un contraejemplo sería el siguiente: en $\mathbb{R}^2$, con respecto a la suma y multiplicación por escalares usuales, se cumple que $5(0, 0) = 3(0, 0)$ pero es claro que $5 \neq 3$.
(d) Falso, pues si V es un espacio vectorial y 0 denota a su neutro aditivo entonces la igualdad $0x = 0 = 0y$ se cumple para cualesquiera $x, y \in V$.
(e) Verdadero, los elementos de F^n se pueden escribir como vectores columna y por la tanto podrían considerarse como matrices de $M_{n\times 1}(F)$.
(f) Falso, una matriz de $m \times n$ tiene m renglones y n columnas.
(g) Falso, en la definición de la suma en $P(F)$ no aparece ninguna restricción sobre los grados de los polinomios que se suman.

(h) Falso, un contraejemplo sería la siguiente suma de polinomios $x + (-x) = 0$.

(i) Verdadero, al multiplicar cualquier escalar diferente de cero por un polinomio se conserva el mismo grado del polinomio.

(j) Verdadero, puesto que un polinomio de grado 0 es de la forma $f(x) = c$ para un escalar no nulo c.

(k) Verdadero, por definición.

---

2. Escribir el vector nulo de $M_{3\times 4}(F)$.

Solución.
El vector nulo de $M_{3\times 4}(F)$ es el siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

3. Si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

¿cuáles son M_{13}, M_{21} y M_{22}?

Solución.
$M_{13} = 3$, $M_{21} = 4$ y $M_{22} = 5$.

---

4. Realizar las operaciones indicadas.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $4\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

(d) $-5\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

(e) $(2x^4 - 7x^3 + 4x + 3) + (8x^3 + 2x^2 - 6x + 7)$

(f) $(-3x^3 + 7x^2 + 8x - 6) + (2x^3 - 8x + 10)$

(g) $5(2x^7 - 6x^4 + 8x^2 - 3x)$

(h) $3(x^5 - 2x^3 + 4x + 2)$

Solución.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

(c) $4\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 20 & -12 \\ 4 & 0 & 28 \end{pmatrix}$

(d) $-5\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -20 \\ -15 & 10 \\ -5 & -40 \end{pmatrix}$

(e) $(2x^4 - 7x^3 + 4x + 3) + (8x^3 + 2x^2 - 6x + 7) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x + 10$

(f) $(-3x^3 + 7x^2 + 8x - 6) + (2x^3 - 8x + 10) = -x^3 + 7x^2 + 4$

(g) $5(2x^7 - 6x^4 + 8x^2 - 3x) = 10x^7 - 30x^4 + 40x^2 - 15x$

(h) $3(x^5 - 2x^3 + 4x + 2) = 3x^5 - 6x^3 + 12x + 6$

Los ejercicios **5** y **6** muestran por qué las definiciones de suma y multiplicación por escalares de matrices (como se definen en el ejemplo 2) son las adecuadas.

5. Richard Gard (Efectos de los castores en las trunchas en Sagehen Creek, California. *J. Wildlife Management*, **25**, 221-242) reporta el siguiente número de truchas que atravesaron las represas de castores en Sagehen Creek:

Cruces a contracorriente

	Otoño	*Primavera*	*Verano*
Trucha arroyo	8	3	1
Trucha arcoiris	3	0	0
Trucha café	3	0	0

Cruces a favor de la corriente

	Otoño	*Primavera*	*Verano*
Trucha arroyo	9	1	4
Trucha arcoiris	3	0	0
Trucha café	1	1	0

Registrar los cruces a contracorriente y a favor de la corriente como datos en dos matrices de 3×3 y verificar que la suma de las dos matrices da el número total de cruces (a contracorriente y a favor) categorizada por especie de trucha y por estación.

Solución.

Las matrices asociadas de los cruces a contracorriente y a favor de la corriente son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La suma de estas dos matrices es

$$S = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puede verse que la matriz S proporciona el número total de cruces (a contracorriente y a favor) categorizada por especie de trucha y por estación.

6. Al final de mayo, un almacén de muebles tenía el siguiente inventario:

	Americano tradicional	Español	Medite-rráneo	Danés
Conjuntos de sala	4	2	1	3
Conjuntos de alcoba	5	1	1	4
Conjuntos de comedor	3	1	2	6

Registrar estos datos como una matriz M de 3×4. Con el fin de prepararse para su venta de junio, el almacén decidió duplicar su inventario de cada uno de los rubros anteriores. Suponiendo que nada de la mercancía en inventario se vende hasta que los pedidos de muebles adicionales lleguen, se verifica que el inventario disponible después de recibir el pedido estará dado por la matriz $2M$. Si el inventario al final de junio queda dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

interpretar $2M - A$. ¿Cuántos conjuntos se vendieron durante la venta de junio?

Solución.

El inventario al final del mes de mayo está asociado con la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Al decidir la empresa duplicar su inventario, la matriz asociada a éste se convierte en:

$$2M = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 6 \\ 10 & 2 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

La matriz $2M - A$ representa las ventas en el almacén durante el mes de junio. Además, el número de conjuntos de salas (de cualquier estilo) vendidos en ese período está dado por la suma de todas las entradas de la matriz $2M - A$. Puesto que

$$2M - A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 6 \\ 10 & 2 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix},$$

concluimos que el total de conjuntos vendidos en junio es igual a

$$3 + 1 + 1 + 4 + 4 + 0 + 1 + 3 + 5 + 2 + 1 + 9 = 34.$$

---

7. Sean $S = \{0, 1\}$ y $F = \mathbb{R}$, el campo de los números reales. En $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$, demostrar que $f = g$ y $f + g = h$, donde $f(x) = 2x + 1, g(x) = 1 + 4x - 2x^2,$ y $h(x) = 5^x + 1$.

Solución.
Dos elementos f_1 y f_2 en $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ se definen como iguales si $f_1(s) = f_2(s)$ para cada $s \in S$. Utilizando esta definición y considerando que

$$f(0) = 2(0) + 1 = 1 = 1 + 4(0) - 2(0)^2 = g(0)$$

y

$$f(1) = 2(1) + 1 = 3 = 1 + 4(1) - 2(1)^2 = g(1)$$

podemos concluir que efectivamente $f = g$. Por otro lado, puesto que

$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 2 = 5^0 + 1 = h(0)$$

y

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 6 = 5^1 + 1 = h(1),$$

al aplicar nuevamente la definición de la igualdad en $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ concluimos que

$$f + g = h.$$

---

8. Demostrar que en cualquier espacio vectorial V, $(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by$ para toda $x, y \in V$ y cualquier $a, b \in F$.

Solución.
Como V es un espacio vectorial entonces los escalares distribuyen la suma de cualesquiera vectores de V. Por lo tanto,

$$(a + b)(x + y) = (a + b)x + (a + b)y \tag{1}$$

Por otra parte, se cumple también que los vectores de V *distribuyen* a la suma de escalares. Si utilizamos esta propiedad en cada término del lado derecho de la igualdad en (1) se obtiene que

$$(a+b)x+(a+b)y = (ax+bx)+(ay+by) \tag{2}$$

$$= ax+bx+ay+by. \tag{3}$$

La conclusión deseada se desprende ahora de (1), (2) y (3).

9. Demostrar los Corolarios 1 y 2 del Teorema 1.1 y el Teorema 1.2(c).

Solución.

Demostración del Corolario 1. Supongamos que 0_1 y 0_2 son dos vectores cero en un espacio vectorial V. Para $x \in V$ fijo se cumple que $0_1 + x = x = 0_2 + x$. Del Teorema 1.1 (Ley de cancelación para la suma vectorial) se desprende que $0_1 = 0_2$. Concluimos entonces que el cero en un espacio vectorial siempre es único.

Demostración del Corolario 2. Sean $x \in V$ y y_1 y y_2 dos inversos aditivos para x. Se tiene entonces que $x + y_1 = 0 = x + y_2$. Al aplicar nuevamente la ley de cancelación para la suma vectorial en V se sigue que $y_1 = y_2$ y la prueba termina.

Demostración del Teorema 1.2(c). Sea $x \in V$. Por (VS 8) y (VS 3) tenemos que

$$a0 + a0 = a(0+0) = a0 = 0 + a0.$$

La conclusión deseada se obtiene al aplicar una vez más la ley de cancelación para la suma vectorial en V.

10. Sea V el conjunto de todas las funciones diferenciales de valores reales definidas sobre la recta de los reales. Demostrar que V es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalares definidas en el ejemplo 3.

Solución.

A continuación veremos que se cumplen los axiomas de espacio vectorial. La suma de dos funciones diferenciales de valores reales definidas sobre $\mathbb{R}$ es otra función del mismo tipo y además dicha suma cumple las propiedades conmutativa y asociativa. Por otra parte, podemos ver que la función $\mathcal{Z}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{Z}(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$ funciona como neutro aditivo en el conjunto de funciones diferenciales de valores reales definidas sobre $\mathbb{R}$. Además, cada función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

admite inverso aditivo: específicamente la función $I_f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $I_f(x) = -f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ (esta función I_f es diferenciable siempre que la función f lo es).

Que la multiplicación por escalares satisface las debidas condiciones es consecuencia de la manera en que está definida dicha multiplicación y del hecho que las funciones que conforman a V tienen por contradominio a $\mathbb{R}$ (el cual es un anillo conmutativo con elemento unitario). Mostraremos a continuación a todo detalle—y a modo de ilustración de lo expresado previamente—que la multiplicación por escalares satisface la distributividad del escalar sobre la suma de elementos de V. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f, g \in V$. Puesto que para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\alpha(f+g)(x) = \alpha[(f+g)(x)] = \alpha[f(x)+g(x)] = \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x),$$

entonces $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$, lo cual es justamente lo que se deseaba establecer.

---

11. Sea $V = \{0\}$ que consiste de un único vector 0 y defínase $0 + 0 = 0$ y $c(0) = 0$ para cada c de F. Demostrar que V es un espacio sobre F (V se llama el *espacio vectorial cero*).

Solución.
A continuación veremos que se cumplen los axiomas de espacio vectorial. Como V solo tiene un elemento entonces se puede ver fácilmente que la suma definida en V es conmutativa y asociativa. Nuevamente, por la forma en que está definida la suma en V podemos ver también que el neutro aditivo es igual al único elemento de V y que el único elemento de V es igual a su propio inverso aditivo. En cuanto a las propiedades de la multiplicación por escalares, la condición $1(x) = x$ para cada $x \in V$ se sigue del hecho de que, por definición, $1(0) = 0$. La compatibilidad de la multiplicación por escalares con la multiplicación del campo F es consecuencia de que para cada $a, b \in F$, $(ab)0 = 0$ y $a(b0) = a(0) = 0$. Para establecer la distributividad del escalar sobre la suma de vectores notamos que para cada $x, y \in V$ se cumple que $x + y = 0$ y, en consecuencia, $a(x+y) = a0 = 0 = ax + ay$ para cada $a \in F$. Finalmente, para establecer la distributividad del vector sobre la suma de escalares notamos que, por un lado, para cada $a, b \in F$ se tiene que $(a+b)0 = 0$ y, por el otro, $a0 + b0 = 0 + 0 = 0$. Así, para cada $a, b \in F$ se verifica que $(a+b)0 = a0 + b0$.

---

12. Una función de valor real definida sobre la recta de los reales se llama *función par si* $f(-x) = f(x)$ para todo número real x. Demostrar que el conjunto de las funciones par definidas en la recta de los reales, con las operaciones de suma y multiplicación por escalares definidas en el ejemplo 3, es un espacio vectorial.

Solución.

Denotemos con E al conjunto de funciones pares de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Si f y g son elementos de E entonces la función $f + g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ también pertenece a E: en efecto, si $x \in \mathbb{R}$ entonces $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$. Esto indica que la suma usual de funciones determina una operación binaria y cerrada sobre el conjunto de las funciones pares.

Como todas las funciones que pertenecen a E tienen por contradominio al conjunto de los números reales entonces es claro que la suma de funciones restringida a E de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ satisface tanto la propiedad conmutativa como la propiedad asociativa.

Afirmamos ahora que la función $\mathcal{Z} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\mathcal{Z}(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$ actúa como neutro aditivo en E. En primer lugar, no resulta difícil convencerse de que $\mathcal{Z}$ es una función par. Por otro lado, para cada $f \in E$ se cumple que $f + \mathcal{Z} = f$ pues si $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$(f + \mathcal{Z})(x) = f(x) + \mathcal{Z}(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Cada $f \in E$ tiene inverso aditivo en E: esto se puede establecer considerando simplemente la función $I_f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $I_f(x) = -f(x)$. Esa función cumple claramente la condición de ser el inverso aditivo de f y además se puede ver también que $I_f \in E$:

$$I_f(-x) = -f(-x) = -f(x) = I_f(x).$$

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y cada $f \in E$ es claro que $\alpha f \in E$: en efecto, si $x \in \mathbb{R}$ entonces $(\alpha f)(-x) = \alpha f(-x) = \alpha f(x) = (\alpha f)(x)$. Además, puesto que cada $f \in E$ tiene por contradominio a $\mathbb{R}$ entonces $1f = f$ para cada $f \in E$ y también, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$.

Tanto la distributividad de los escalares sobre la suma de elementos de E como la distributividad de elementos de E sobre la suma de escalares se pueden establecer fácilmente. Estableceremos a continuación únicamente la primera de las condiciones mencionadas (en el entendido de que la otra se puede verificar de manera análoga). Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f, g \in E$. Podemos ver que $\alpha(f + g)$ y $\alpha f + \alpha g$ también son elementos bien definidos de E y además

$$\alpha(f + g)(x) = \alpha[f(x) + g(x)] = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x).$$

13. Sea V el conjunto de pares ordenados de números reales. Si (a_1, a_2) y (b_1, b_2) son elementos de V y c es un elemento de F, se definen

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2) \quad \text{y} \quad c(a_1, a_2) = (ca_1, a_2).$$

¿Es V un espacio vectorial bajo esas operaciones? Verifica su respuesta.

Solución.

No es un espacio vectorial. Si se tratara de un espacio vectorial entonces el vector $0(a_1, a_2) = (0, a_2)$ tendría que ser igual al vector cero de V para cada $(a_1, a_2) \in V$. Sin embargo, por unicidad el vector cero de V es $(0, 1)$ y es claro que si a_2 se elige distinto de 1 entonces

$$0(a_1, a_2) = (0, a_2) \neq (0, 1).$$

---

14. Sea $V = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{C} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}$. ¿Es V un espacio vectorial sobre el campo de los números reales con las operaciones de suma y multiplicación con correspondencia de elementos?

Solución.

Como la suma en V es la suma usual, la cual se determina componente a componente, y la suma de dos números complejos cualesquiera es otro número complejo entonces concluimos que la suma de dos elementos de V es otro elemento de V. Además, de las propiedades conmutativa y asociativa para la suma de números complejos se sigue que la suma definida en V también satisface tales propiedades.

Se afirma que el vector $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ donde $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ actúa como neutro aditivo en V: en efecto, es claro que este vector está en V y, además, si $(a_1, \ldots, a_n) \in V$ entonces

$$(a_1, \ldots, a_n) + (c_1, \ldots, c_n) = (a_1, \ldots, a_n) + (0, \ldots, 0) = (a_1, \ldots, a_n).$$

Se tiene también que cada elemento de V tiene inverso aditivo en V: simplemente para $(a_1, \ldots, a_n) \in V$, considérese el vector $(-a_1, \ldots, -a_n)$.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y cada $(a_1, \ldots, a_n) \in V$ se puede ver que $\alpha(a_1, \ldots, a_n) \in V$: en efecto, como $\alpha(a_1, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$ y $\alpha a_i \in \mathbb{C}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces $(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n) \in V$. Además, si $(a_1, \ldots, a_n) \in V$ entonces

$$1(a_1, \ldots, a_n) = (1 \cdot a_1, \ldots, 1 \cdot a_n) = (a_1, \ldots, a_n).$$

Mostraremos ahora que para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $(a_1, \ldots, a_n)$ se cumple que $(\alpha \cdot \beta)(a_1, \ldots, a_n) = \alpha[\beta(a_1, \ldots, a_n)]$: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}
(\alpha \cdot \beta)(a_1, \ldots, a_n) &= ((\alpha \cdot \beta)a_1, \ldots, (\alpha \cdot \beta)a_n) \\
&= (\alpha(\beta \cdot a_1), \ldots, \alpha(\beta \cdot a_n)) \\
&= \alpha[(\beta \cdot a_1, \ldots, \beta \cdot a_n)] \\
&= \alpha[\beta(a_1, \ldots, a_n)].
\end{aligned}$$

Probaremos a continuación que se cumple la distributividad de los escalares sobre la suma de elementos de V. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, a_n) \in V$. Se puede ver fácilmente que $\alpha[(a_1, \ldots, a_n)+ (b_1, \ldots, b_n)]$ y $\alpha(a_1, \ldots a_n) + \alpha(b_1, \ldots, b_n)$ son elementos bien definidos en V y además

$$\begin{aligned}
\alpha[(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n)] &= \alpha(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \\
&= (\alpha(a_1 + b_1), \ldots, \alpha(a_n + b_n)) \\
&= (\alpha a_1 + \alpha b_1, \ldots, \alpha a_n + \alpha b_n) \\
&= (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n) + (\alpha b_1, \ldots, \alpha b_n) \\
&= \alpha(a_1, \ldots, a_n) + \alpha(b_1, \ldots, b_n).
\end{aligned}$$

La distributividad de los elementos de V sobre la suma de escalares se establece procediendo de manera análoga. Por lo tanto, concluimos que V con las operaciones dadas sí es un espacio vectorial.

---

15. Sea $V = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}$. ¿Es V un espacio vectorial sobre el campo de los números complejos bajo las operaciones de suma y multiplicación con correspondencia de elementos?

Solución.
No es un espacio vectorial: si un escalar complejo (y no real) multiplica a un elemento de V, el resultado no siempre es un vector de números reales. Por ejemplo, si $n = 2$ entonces se cumple que $(1, 1) \in V$ y $i \in \mathbb{C}$, pero no es cierto que $i(1, 1) = (i, i)$ sea un elemento de V.

---

16. Sea $V = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Para $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V$ y $c \in \mathbb{R}$, defínase

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

y

$$c(a_1, a_2) = \begin{cases} (0,0) & \text{si} \quad c = 0 \\ \left(ca_1, \frac{a_2}{c}\right) & \text{si} \quad c \neq 0. \end{cases}$$

¿Es V un espacio vectorial bajo estas operaciones? Justifique su respuesta.

Solución.

No es un espacio vectorial. Si así lo fuera se cumpliría en particular la distributividad de los elementos de V sobre la suma de escalares en $\mathbb{R}$. Sin embargo, en el siguiente ejemplo se puede ver que esta propiedad no se cumple siempre. Sean $c_1 = 2$, $c_2 = 3$ y $(a_1, a_2) = (1, 1)$ en V. Tenemos por un lado que

$$(2 + 3)(1, 1) = 5(1, 1) = \left(5, \frac{1}{5}\right)$$

y por otro lado

$$2(1, 1) + 3(1, 1) = \left(2, \frac{1}{2}\right) + \left(3, \frac{1}{3}\right) = \left(5, \frac{5}{6}\right).$$

Puesto que $(5, \frac{1}{5}) \neq (5, \frac{5}{6})$, se sigue que los elementos de V no distribuyen la suma de escalares en $\mathbb{R}$.

---

17. Sea $V = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C}\}$. Para $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V$ y $c \in \mathbb{C}$, defínase

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + 2b_1, a_2 + 3b_2) \text{ y } c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2).$$

¿Es V un espacio vectorial bajo estas operaciones? Justifique su respuesta.

Solución.

Afirmamos que V no es un espacio vectorial con respecto a las operaciones indicadas. Si lo fuera entonces la suma definida sobre V tendría que satisfacer en particular la propiedad conmutativa. Sin embargo, si hacemos $a_1 = 1, a_2 = i, b_1 = 3i$ y $b_2 = 0$ entonces, por un lado se tiene que

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + 2b_1, a_2 + 3b_2) = (1 + 6i, i),$$

y por el otro

$$(b_1, b_2) + (a_1, a_2) = (b_1 + 2a_1, b_2 + 3a_2) = (2 + 3i, 3i).$$

Al tenerse que $(1 + 6i, i) \neq (2 + 3i, 3i)$, la veracidad de nuestra afirmación inicial se sigue.

---

18. Sea $V = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in F\}$, donde F es un campo arbitrario. Defínase la suma de los elementos de V elemento a elemento, y para $c \in F$ y $(a_1, a_2) \in V$, defínase

$$c(a_1, a_2) = (a_1, 0).$$

¿Es V un espacio vectorial bajo estas operaciones? Justifique su respuesta.

Solución.

No, V no es espacio vectorial bajo las operaciones dadas. Podemos demostrar la validez de la afirmación anterior mediante reducción al absurdo: si V fuera espacio vectorial con las operaciones indicadas entonces lo primero que se observaría es que su neutro aditivo tendría que ser el vector $(0, 0)$. Por otro lado, si 1 es el neutro multiplicativo del campo F entonces $(1, 0) \in V$ y se debería cumplir que $0(1, 0) = (0, 0)$. Sin embargo, por la forma en que fue definida la multiplicación por escalares en V se tiene que $0(1, 0) = (1, 0)$. De las dos líneas anteriores se desprende la igualdad $(0, 0) = 0(1, 0) = (1, 0)$, la cual es claramente absurda pues en cualquier campo F el neutro multiplicativo es distinto del neutro aditivo.

Sección III. Subespacios

1. Decir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

(a) Si V es un espacio vectorial y W es un subconjunto de V que es también un espacio vectorial, entonces W es un subespacio de V.
(b) El conjunto vacío es un subespacio de todo espacio vectorial.
(c) Si V es un espacio vectorial distinto del espacio vectorial cero $\{0\}$, entonces V contiene un subespacio W tal que $W \neq V$.
(d) La suma de dos subconjuntos cualesquiera de V es un subespacio de V.
(e) Una matriz diagonal de $n \times n$ no puede tener más de n términos no nulos.
(f) La traza de una matriz cuadrada es el producto de sus términos que se encuentran sobre su diagonal.

Solución.

(a) Falso, pues no se está especificando si las operaciones en W son las mismas que las de V. Por ejemplo, si $V = \mathbb{R}$ y $W = \mathbb{Q}$ entonces $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Sin embargo, W no es un subespacio de $\mathbb{R}$ (considerando que $\mathbb{R}$ está dotado con la suma y producto por escalar usuales).
(b) Falso, un subespacio es por definición un espacio vectorial y como tal no puede ser vacío pues al menos debe poseer un neutro aditivo.
(c) Verdadero, pues V tendría al menos al subespacio $W = \{0\}$.
(d) Falso. Por ejemplo, consideremos al espacio vectorial de los números reales con la suma y producto por escalar usuales: si $E_1 = \{0\}$ y $E_2 = \{1\}$ entonces $E_1 + E_2 = \{1\}$, el cual no es un subespacio de $\mathbb{R}$.
(e) Verdadero, puesto que solo las entradas en la diagonal podrían ser distintas de cero.
(f) Falso, pues la traza es por definición la suma de las entradas en la diagonal principal de la matriz y, por lo general, el resultado de dicha suma es distinto al producto de los términos que se encuentran en la diagonal de la matriz.

2. Determinar la transpuesta de cada una de las siguientes matrices. Además, si la matriz es cuadrada, calcular su traza.

a) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 0 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & -8 \\ 2 & -4 & 3 \\ -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

Solución.

a) La matriz transpuesta es $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y su traza es $(-4) + (-1) = -5$.

b) La matriz transpuesta es $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$.

c) La matriz transpuesta es $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 9 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

d) La matriz transpuesta es $\begin{pmatrix} 10 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 7 \\ -8 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ y su traza es $10 + (-4) + 6 = 12$.

e) La matriz transpuesta es $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

f) La matriz transpuesta es $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$.

g) La matriz transpuesta es $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

h) La matriz transpuesta es $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ y su traza es $-4+1+5=2$.

---

3. Demostrar que $(aA+bB)^t = aA^t + bB^t$ para toda $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ y toda $a, b \in F$.

Solución.
Para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que

$$\begin{aligned} [(aA+bB)^t]_{ij} &= (aA+bB)_{ji} \\ &= aA_{ji} + bB_{ji} \\ &= a(A^t)_{ij} + b(B^t)_{ij} \\ &= [aA^t + bB^t]_{ij}, \end{aligned}$$

de lo cual se sigue el resultado.

---

4. Demostrar que $(A^t)^t = A$ para toda $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$.

Solución.
En efecto, pues para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que

$$[(A^t)^t]_{ij} = (A^t)_{ji} = A_{ij}.$$

---

5. Demostrar que $A + A^t$ es una matriz simétrica para cualquier matriz cuadrada A.

Solución.
Aplicando lo demostrado en los dos ejercicios anteriores se obtiene que

$$(A+A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t.$$

Esto indica que la matriz $A + A^t$ satisface la condición que define a las matrices simétricas. Ergo, $A + A^t$ es una matriz simétrica.

---

6. Demostrar que $\operatorname{tr}(aA + bB) = a\operatorname{tr}(A) + b\operatorname{tr}(B)$ para toda $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$.

Solución.

La traza de una matriz es la suma de todas las entradas de su diagonal principal. Así,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(aA + bB) &= \sum_{i=1}^{n}(aA + bB)_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(aA_{ii} + bB_{ii}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} aA_{ii} + \sum_{i=1}^{n} bB_{ii} \\
&= a\sum_{i=1}^{n} A_{ii} + b\sum_{i=1}^{n} B_{ii} \\
&= a\operatorname{tr}(A) + b\operatorname{tr}(B)
\end{aligned}$$

lo cual es justamente lo que deseabamos demostrar.

---

7. Demostrar que las matrices diagonales son matrices simétricas.

Solución.

Una matriz A se llama diagonal si todos los valores que no se encuentran sobre la diagonal principal de A son nulos. Sea A una matriz diagonal. Se cumple entonces que si $i \neq j$ entonces $A_{ij} = 0 = A_{ji}$ y si $i = j$ entonces es claro que $A_{ij} = A_{ii} = A_{ji}$. Hemos demostrado así que para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se cumple que $A_{ij} = A_{ji} = (A^t)_{ij}$. Así, $A = A^t$ y la demostración termina.

---

8. Verificar que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$ bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalares definidas en $\mathbb{R}^3$.

(a) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2\}$
(b) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a_1 + a_2 + 5a_3 = 0\}$
(c) $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$

Solución.

(a) Se puede ver claramente que $(0,0,0) \in W_1$. Estableceremos a continuación la cerradura de W_1 bajo la suma. Sean $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3) \in W_1$. Se cumple entonces que $a_1 = 3a_2$, $a_3 = -a_2$, $b_1 = 3b_2$, $b_3 = -b_2$ y por lo tanto

$$a_1 + b_1 = 3a_2 + 3b_2 = 3(a_2 + b_2) \quad \text{y} \quad a_3 + b_3 = -a_2 - b_2 = -(a_2 + b_2).$$

De lo anterior se desprende que $(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3) = (a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3) \in W_1$. Finalmente, demostraremos la cerradura de W_1 bajo la multiplicación por escalares. Sean $t \in \mathbb{R}$ y $(a_1,a_2,a_3) \in W_1$. Se tiene entonces que

$$ta_1 = t(3a_2) = 3(ta_2) \quad \text{y} \quad ta_3 = t(-a_2) = -(ta_2)$$

y por consiguiente $t(a_1,a_2,a_3) = (ta_1,ta_2,ta_3) \in W_1$. Habiendo demostrado estas tres propiedades podemos concluir que W_1 es efectivamente un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(b) Es evidente nuevamente que $(0,0,0) \in W_2$. Estableceremos a continuación la cerradura de W_2 bajo la suma. Sean $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3) \in W_2$. Se cumple entonces que $2a_1 + a_2 + 5a_3 = 0$, $2b_1 + b_2 + 5b_3 = 0$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} 2(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+5(a_3+b_3) &= (2a_1+a_2+5a_3)+(2b_1+b_2+5b_3) \\ &= 0+0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ergo, $(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3) = (a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3) \in W_2$. Demostraremos ahora la cerradura de W_2 bajo la multiplicación por escalares. Sean $t \in \mathbb{R}$ y $(a_1,a_2,a_3) \in W_2$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} 2(ta_1)+(ta_2)+5(ta_3) &= t(2a_1+a_2+5a_3) \\ &= t0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De todo lo anterior podemos concluir que W_2 sí es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(c) Se puede ver claramente que $(0,0,0) \in W_3$. Sean $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3) \in W_3$. Se tiene entonces que $a_1 - 4a_2 - a_3 = 0$, $b_1 - 4b_2 - b_3 = 0$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} (a_1+b_1)-4(a_2+b_2)-(a_3+b_3) &= (a_1-4a_2-a_3)+(b_1-4b_2-b_3) \\ &= 0+0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \in W_3$. La cerradura de W_3 con respecto a la multiplicación por escalares se puede establecer del mismo modo en que se procedió en los incisos anteriores.

---

9. Sean W_1, W_2 y W_3 como en el ejercicio **8**. Describir $W_1 \cap W_2$, $W_2 \cap W_3$, y $W_1 \cap W_3$ y obsérvese que cada uno es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Solución.
Para saber cuál es la intersección de W_1 y W_2 se tiene que resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$2a_1 + a_2 + 5a_3 = 0 \tag{4}$$

$$a_1 - 3a_2 = 0 \tag{5}$$

$$a_2 + a_3 = 0 \tag{6}$$

Si despejamos a_1 de (5) y a_3 de (6) y hacemos las sustituciones respectivas en (4), obtendremos lo siguiente

$$2(3a_2) + a_2 + 5(-a_2) = 0;$$

al resolver la ecuación anterior obtenemos que $a_2 = 0$ y por consiguiente $a_1 = a_3 = 0$. Tenemos así que

$$W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\}.$$

Claramente, $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

De manera análoga podemos describir $W_2 \cap W_3$ y $W_1 \cap W_3$.

---

10. Verificar que $W_1 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in F^n \mid a_1 + \cdots + a_n = 0\}$ es un subespacio de F^n pero que $W_2 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in F^n \mid a_1 + \cdots + a_n = 1\}$ no lo es.

Solución.
Puesto que la suma de cualquier cantidad finita de ceros es igual a 0 se sigue que $(0, \ldots, 0) \in W_1$. Probaremos ahora que W_1 es cerrado bajo la suma de F^n. Sean $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in W_1$. Se cumple entonces que $a_1 + \cdots + a_n = 0 = b_1 + \cdots + b_n$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) \\ &= (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n). \end{aligned}$$

En consecuencia, $(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \in W_1$. Resta mostrar que W_1 es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Sean $t \in F$ y $(a_1, \ldots, a_n) \in W_1$. Puesto que

$$a_1 + \cdots + a_n = 0,$$

entonces

$$0 = t(a_1 + \cdots + a_n) = ta_1 + \cdots + ta_n$$

y es claro que esto implica que $(ta_1, \ldots, ta_n) \in W_1$. Podemos concluir así que W_1 es un subespacio de F^n.

Por otro lado, W_2 no es un subespacio pues $(0, \ldots, 0) \notin W_2$.

---

11. ¿Es el conjunto $W = \{f \in P(F) \mid f = 0 \text{ o } f \text{ tiene grado } n\}$ un subespacio de $P(F)$ si $n \geqslant 1$? Justifique su respuesta.

Solución.

No es un subespacio debido a que W no es cerrado bajo la suma de $P(F)$. Por ejemplo, en el caso $n = 2$, tenemos que $x^2 + x, -x^2 \in W$ pero

$$(x^2 + x) + (-x^2) = x \notin W.$$

---

12. Una matriz A de $m \times n$ se llama *triangular superior* si todos los términos ubicados por debajo de la diagonal valen cero, esto es, $A_{ij} = 0$ siempre que $i > j$. Verificar que las matrices triangulares superiores forman un subespacio de $\mathcal{M}_{m \times n}(F)$.

Solución.

Por definición de matriz triangular, podemos ver claramente que la matriz cero de $\mathcal{M}_{m \times n}(F)$ es una matriz triangular superior. Además, se puede comprobar fácilmente que tanto la suma de dos matrices triangulares superiores como el producto de un escalar por una matriz triangular superior dan lugar a otras matrices triangulares superiores. De aquí concluimos que el conjunto de las matrices triangulares superiores es un subespacio de $\mathcal{M}_{m \times n}(F)$.

---

13. Verificar que para cualquier $s_0 \in S, W = \{f \in \mathcal{F}(S, F) \mid f(s_0) = 0\}$ es un subespacio de $\mathcal{F}(S, F)$.

Solución.

El conjunto W es cerrado bajo la suma y multiplicación por escalares puesto que si $c \in \mathbb{R}$ y $f, g \in W$ entonces $(f+g)(s_0) = f(s_0) + g(s_0) = 0 + 0 = 0$ y $cf(s_0) = cf(s_0) = c0 = 0$: además, es fácil ver que la función cero está en el conjunto W. Por lo tanto, W es un subespacio de $\mathcal{F}(S, F)$.

---

14. ¿Es el conjunto de todas las funciones diferenciables de valores reales definidas en $\mathbb{R}$ un subespacio de $C(\mathbb{R})$? Justifique su respuesta.

Solución.

El conjunto de funciones diferenciables con valores en $\mathbb{R}$ sí es un subespacio de $C(\mathbb{R})$, pues la suma de dos funciones diferenciables y el producto de un escalar por una función diferenciable es otra función diferenciable y además la función cero al ser constante es también una función diferenciable.

---

15. Sea $C^n(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones de valor real definidas en la recta de los reales que tienen una derivada n-ésima continua (y, por tanto, derivadas continuas de orden $1, 2, \ldots, n$). Verificar que $C^n(\mathbb{R})$ es un subespacio de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solución.

El cero del espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es la función idénticamente cero la cual, al tener derivadas continuas de todos los órdenes, pertenece a $C^n(\mathbb{R})$. Ahora bien, si $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ son la n-ésima derivada de f y g, respectivamente, entonces $f^{(n)} + g^{(n)}$ será la n-ésima de $f + g$ y en consecuencia $f^{(n)} + g^{(n)} \in C^n(\mathbb{R})$. Del mismo modo, $cf^{(n)}$ es la n-ésima derivada de cf y, por lo tanto, $cf^{(n)} \in C^n(\mathbb{R})$. Concluimos entonces que $C^n(\mathbb{R})$ es un subespacio de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

---

16. Demostrar que un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio de V si y solo si $W \neq \emptyset$ y $ax \in W$ y $x + y \in W$ siempre que $a \in F$ y $x, y \in W$.

Solución.

[$\Rightarrow$] Como W es un subespacio de V entonces $0_V \in W$ y, en consecuencia, $W \neq \emptyset$. Además para cualesquiera $x, y \in W$ y $a \in F$ se cumple que $x + y \in W$ y $ax \in W$.

[$\Leftarrow$] Como $W \neq \emptyset$, fijemos $x \in W$. Puesto que $ax \in F$ para cada $a \in F$, entonces se tiene en particular que $0x \in W$. Como V es espacio vectorial, $0x = 0_V$. De todo lo anterior se colige que $0_V \in W$. Puesto que por hipótesis W es cerrado con respecto a la suma de V y a la multiplicación por escalares de F, concluimos que W es subespacio vectorial de V.

---

17. Demostrar que un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio de V si y solo si $0 \in W$ y $ax + y \in W$ siempre que $a \in F$ y $x, y \in W$.

Solución.

[$\Rightarrow$] Como W es subespacio, tenemos que $0 \in W$ y $ax \in W$ siempre que $a \in F$ y $x \in W$. Al ser W cerrado bajo la suma de V, concluimos que $ax + y \in W$ para cualesquiera $x, y \in W$ y $a \in F$.

[$\Leftarrow$] Sean $x, y \in W$. Dado que $ax + y \in W$ para cada $a \in F$ entonces, haciendo $a = 1$, obtenemos que

$$1x + y = x + y \in W.$$

Finalmente, mostraremos que W es cerrado bajo la multiplicación por escalares de F. Sean $x \in W$ y $a \in F$. Puesto que $ax + y \in W$ para cada $y \in W$ entonces, haciendo $y = 0$, se tiene que

$$ax + 0 = ax \in W,$$

tal como se deseaba demostrar.

---

18. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y solo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

Solución.

[$\Rightarrow$] Procederemos por reducción al absurdo. Si $W_1 \nsubseteq W_2$ y $W_2 \nsubseteq W_1$ entonces existen $x \in W_1$ tal que $x \notin W_2$ y $y \in W_2$ tal que $y \notin W_1$. Consideremos entonces el elemento $x + y$. Como $x, y \in W_1 \cup W_2$ entonces $x + y \in W_1 \cup W_2$ (pues por hipótesis $W_1 \cup W_2$ es subespacio de V). Así, se tiene que $x + y \in W_1$ o $x + y \in W_2$. Afirmamos que en cualquiera de los dos casos tenemos una contradicción. En efecto, si $x + y \in W_1$ entonces $y = (x + y) - x \in W_1$, lo cual es absurdo pues de inicio se sabía que $y \notin W_1$. Análogamente, si aceptamos que $x + y \in W_2$ entonces obtenemos que $x = (x + y) - y \in W_2$, lo cual también es absurdo.

[$\Leftarrow$] Hay dos casos a considerar: $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$. Si $W_1 \subseteq W_2$ entonces $W_1 \cup W_2 = W_2$ y la conclusión deseada se tiene en este caso pues por hipótesis se sabe que W_2 es subespacio de V. Si $W_2 \subseteq W_1$ entonces $W_1 \cup W_2 = W_1$ y la tesis en cuestión también se cumple en este caso.

---

19. Sean F_1 y F_2 campos. Una función $g \in \mathcal{F}(F_1, F_2)$ se llama *función par* si $g(-x) = g(x)$ para toda $x \in F_1$ y se llama *función impar* si $g(-x) = -g(x)$ para toda $x \in F_1$. Demostrar que el conjunto de todas las funciones pares en $\mathcal{F}(F_1, F_2)$ y el conjunto de todas las funciones impares en $\mathcal{F}(F_1, F_2)$ son subespacios de $\mathcal{F}(F_1, F_2)$.

Solución.
Antes abordar este problema, introduciremos las notaciones siguientes: $V = \mathcal{F}(F_1, F_2)$, $W_1 = \{f \in V \mid f \text{ es una función par}\}$ y $W_2 = \{f \in V \mid f \text{ es una función impar}\}$. A continuación demostraremos que W_1 es un subespacio de V. Para ello, lo que hacemos es verificar las tres condiciones del Teorema 1.3:

(a) Afirmamos que el vector cero de V pertenece a W_1. En efecto, el vector cero de V es la función $\mathcal{Z}$ que manda cada elemento de F_1 en 0_{F_2} y, en consecuencia, para cada $x \in F_1$ se cumple que

$$\mathcal{Z}(x) = 0_{F_2} = \mathcal{Z}(-x),$$

lo cual indica precisamente que $\mathcal{Z} \in W_1$.

(b) Sean $f, g \in W_1$. Puesto que para cada $x \in F_1$ se cumple que

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= f(-x) + g(-x)\\ &= (f+g)(-x),\end{aligned}$$

se desprende que $f + g \in W_1$.

(c) Sean $f \in W_1$ y $c \in F_1$. Dado que para cada $x \in F_1$ se tiene que

$$\begin{aligned}(cf)(x) &= cf(x)\\ &= cf(-x)\\ &= (cf)(-x).\end{aligned}$$

De todo lo anterior concluimos que W_1 es un subespacio de V.

De manera análoga se puede comprobar que W_2 también es un subespacio de V.

20. Mostrar que F^n es la suma directa de los subespacios.

$$W_1 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in F^n \mid a_n = 0\}$$

y

$$W_2 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in F^n \mid a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0\}.$$

Solución.

En primer lugar demostraremos que $F^n = W_1 + W_2$. La inclusión $W_1 + W_2 \subseteq F^n$ es clara. Sea ahora $(a_1, \ldots, a_n) \in F^n$. Puesto que

$$(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_{n-1}, 0) + (0, \ldots, 0, a_n),$$

entonces $(a_1, \ldots, a_n) \in W_1 + W_2$ y por lo tanto $F^n \subseteq W_1 + W_2$.

Para poder concluir que F^n es efectivamente la suma directa de W_1 y W_2 resta establecer que

$$W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0, \ldots, 0)\}.$$

Sea $(a_1, \ldots, a_n) \in W_1 \cap W_2$. Entonces, al tenerse que $(a_1, \ldots, a_n) \in W_1$ y $(a_1, \ldots, a_n) \in W_2$, se sigue que $a_n = 0$ y $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$. De lo anterior se desprende que $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (0, 0, 0 \ldots, 0) \in \{(0, 0, 0, \ldots, 0)\}$. Por otro lado, la inclusión $\{(0, 0, 0, \ldots, 0)\} \subseteq W_1 \cap W_2$ es clara puesto que la intersección de cualesquiera dos subespacios de un espacio vectorial V siempre contiene al vector cero de V. Podemos concluir por tanto que F^n es la suma directa de los subespacios W_1 y W_2.

---

21. Sea W_1 el subespacio de polinomios f en $P(F)$ tales que $f(x) = 0$ o, en la representación

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

los coeficientes $a_0, a_2, a_4, \ldots$ de todas las potencias pares de x son iguales a cero. Análogamente, sea W_2 el subespacio de todos los polinomios g en $P(F)$ tales que $g(x) = 0$ o, en la representación

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0,$$

los coeficientes $b_1, b_3, b_5, \ldots$ de todas las potencias impares de x son iguales a cero. Demostrar que $P(F) = W_1 \oplus W_2$.

Solución.

Para demostrar que $P(F) = W_1 \oplus W_2$ se tienen que verificar las dos condiciones siguientes: (a)

$P(F) = W_1+W_2$ y (b) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. La inclusión $W_1+W_2 \subseteq P(F)$ es evidente y para establecer que $P(F) \subseteq W_1+W_2$ lo que hacemos es tomar un elemento arbitrario $c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$ de $P(F)$ y notamos después que lo podemos reescribir como

$$\sum_{j \text{ par}} c_jx^j + \sum_{j \text{ impar}} c_jx^j.$$

Claramente, el polinomio que aparece como primer sumando en la expresión anterior pertenece a W_1 y el polinomio que aparece como segundo sumando en la expresión anterior pertenece a W_2. Ergo, $P(F) \subseteq W_1 + W_2$.

Resta demostrar que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. La inclusión $\{0\} \subseteq W_1 \cap W_2$ se tiene porque sabemos que, en general, la intersección de subespacios de un espacio vectorial V contiene al vector cero de V. Por otra parte, la inclusión $W_1 \cap W_2 \subseteq \{0\}$ se tiene porque si $C(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$ fuera un polinomio de $W_1 \cap W_2$ distinto del polinomio cero entonces todos los términos de $C(x)$ tendrían grado par y grado impar simultáneamente. Lo anterior es decididamente absurdo y de ello se sigue que $W_1 \cap W_2 \subseteq \{0\}$.

---

22. Sea $W_1 = \{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F) \mid A_{ij} = 0 \text{ cuando } i > j\}$ y $W_2 = \{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F) \mid A_{ij} = 0$ cuando $i \leqslant j\}$. (W_1 es el conjunto de las matrices triangulares superiores definidas en el ejercicio **12**.) Demostrar que $\mathcal{M}_{m\times n}(F) = W_1 \oplus W_2$.

Solución.

De las definiciones de W_1 y W_2 se sigue inmediatamente que $W_1 \cap W_2 = \{0_{m\times n}\}$. Puesto que la inclusión $W_1 + W_2 \subseteq \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ es trivialmente cierta, todo se reduce a demostrar que cualquier matriz que pertenece a $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ se puede escribir como la suma de una matriz del subespacio W_1 y una matriz del subespacio W_2.

Sea $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$. Considérense entonces las matrices A y B definidas de la siguiente manera

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \text{si} \quad i \leqslant j \\ \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

y

$$B_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \leqslant j \\ \\ M_{ij} & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

Se puede verificar fácilmente que $A \in W_1$, $B \in W_2$ y que $M = A + B$. De esto se desprende que $M \in W_1 \oplus W_2$, lo cual es justamente lo que se deseaba establecer.

23.[1] Sea V el espacio vectorial formado por todas las matrices triangulares superiores de $n \times n$ (como se definieron en el ejercicio **12**) y sea W_1 el subespacio de V formado por todas las matrices diagonales. Demostrar que $V = W_1 \oplus W_2$, donde $W_2 = \{A \in V \mid A_{ij} = 0 \text{ cuando } i \geqslant j\}$.

Solución.

Sea $A \in W_1 \cap W_2$. Entonces, al ser A un elemento de W_2, se cumple que $A_{ij} = 0$ siempre que $i \geqslant j$. Por otra parte, al tenerse que $A \in W_1$ se cumple que $A_{ij} = 0$ si $i \neq j$. De todo esto se desprende que $A_{ij} = 0$ para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Se tiene así que $W_1 \cap W_2 \subseteq \{0_{\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})}\}$. Como la inclusión $\{0_{\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})}\} \in W_1 \cap W_2$ es claramente válida concluimos que $W_1 \cap W_2 = \{0_{\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})}\}$.

Resta demostrar que $V \subseteq W_1 + W_2$. Sea $M \in V$. Para tal fin, considérense las matrices A y B definidas de la siguiente manera

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \text{si} \quad i = j \\ \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

y

$$B_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \text{si} \quad i < j \\ \\ 0 & \text{si} \quad i \geqslant j \end{cases}$$

Se puede verificar fácilmente que $A \in W_1$, $B \in W_2$ y que $M = A + B$. De esto se desprende que $M \in W_1 \oplus W_2$, lo cual es justamente lo que se deseaba establecer.

---

24. Demostrar que si W es un subespacio de V y $x_1, \ldots, x_n$ son elementos de W, entonces $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ es un elemento de W para cualesquiera escalares $a_1, \ldots, a_n$ en F.

Solución.

La demostración se hará por inducción sobre n. Si $n = 1$ entonces la proposición es cierta pues, al ser W un subespacio, entonces para cada $a_1 \in F$ y $x_1 \in W$ se cumple que

$$a_1x_1 \in W.$$

[1] Este problema aparece planteado de manera incorrecta en [**1**]. Hemos corregido el planteamiento del mismo atendiendo lo que puede encontrarse en [**2**, pág. 22 (problema **27**)].

Supongamos que la proposición es válida para $n-1$: esto es, supongamos que

$$a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} \in W$$

siempre que $a_1, \ldots, a_{n-1} \in F$ y $x_1, \ldots, x_{n-1} \in W$. Demostraremos ahora que la proposición se cumple también para n. Sean $a_1, \ldots a_n \in F$ y $x_1, \ldots, x_n \in W$. Como W es un subespacio entonces se tiene claramente que

$$a_nx_n \in W. \tag{7}$$

Por otro lado, de la hipótesis de inducción se desprende que

$$a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} \in W. \tag{8}$$

De (7) y (8) se sigue que

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \left(a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}\right) + a_nx_n \in W.$$

---

25. Una matriz M se llama *antisimétrica* si $M^t = -M$. Evidentemente una matriz antisimétrica es cuadrada. Demostrar que el conjunto de todas las matrices antisimétricas de $n \times n$ es un subespacio W_1 de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sea W_2 el subespacio de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ que consiste de las matrices simétricas de $n \times n$. Demostrar que $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$.

Solución.

Primero demostraremos que W_1 es subespacio de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Para hacer esto verificaremos que: (a) $0_{\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})} \in W$, (b) si $A, B \in W_1$, entonces $A + B \in W_1$ y (c) si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A \in W_1$ entonces $\alpha A \in W_1$. Que la condición (a) se cumple es evidente y para verificar tanto (b) como (c), basta con utilizar algunas de las propiedades básicas de la transposición de matrices. Por ejemplo, establezcamos el cumplimiento de la condición en (b). Sean $A, B \in W_1$. Esto quiere decir que $A^t = -A$ y $B^t = -B$, y por lo tanto se cumple que $(A+B)^t = A^t + B^t = (-A) + (-B) = -(A+B)$. Esta última igualdad implica que $A + B \in W_1$ y esto es justamente lo que se deseaba establecer.

Probaremos ahora que $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$. Sea $M \in W_1 \cap W_2$. Esto implica que $M \in W_1$ y $M \in W_2$. Como $M \in W_1$ entonces

$$M^t = -M. \tag{9}$$

Por otro lado, puesto que $M \in W_2$ entonces

$$M^t = M. \tag{10}$$

De (9) y (10) se desprende que $2M = 0$ y en consecuencia $M = 0 \in \{0\}$. Se ha demostrado así que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Finalmente, demostraremos que $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \subseteq W_1 + W_2$. Sea $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Es necesario encontrar matrices $A \in W_1$ y $B \in W_2$ tales que

$$M = A + B.$$

Hagamos

$$A = \frac{M + M^t}{2} \quad \text{y} \quad B = \frac{M - M^t}{2}.$$

Se cumple entonces que

$$A + B = \left(\frac{M + M^t}{2}\right) + \left(\frac{M - M^t}{2}\right) = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M^t + \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}M^t = M.$$

Además, $A \in W_1$ pues

$$\begin{aligned} A^t &= \left(\frac{M + M^t}{2}\right)^t \\ &= \left(\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M^t\right)^t \\ &= \left(\frac{1}{2}M\right)^t + \left(\frac{1}{2}M^t\right)^t \\ &= \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M^t \\ &= A \end{aligned}$$

y $B \in W_2$ pues

$$\begin{aligned} B^t &= \left(\frac{M - M^t}{2}\right)^t \\ &= \left(\frac{1}{2}M - \frac{1}{2}M^t\right)^t \\ &= \frac{1}{2}M^t - \left(\frac{1}{2}M^t\right)^t \\ &= \frac{1}{2}M^t - \frac{1}{2}M \\ &= -\left(\frac{1}{2}M - \frac{1}{2}M^t\right) \\ &= -B. \end{aligned}$$

26. Sea $W_1 = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(F) \mid A_{ij} = 0$ cuando $i \leqslant j\}$ y sea W_2 el conjunto de matrices simétricas de $n \times n$. W_1 y W_2 son ambos subespacios de $\mathcal{M}_{n\times n}(F)$. Demostrar que $\mathcal{M}_{n\times n}(F) = W_1 \oplus W_2$. Compárense los ejercicios **25** y **26**.

Solución.

Probaremos en primer lugar que $W_1 \cap W_2 \subseteq \{0\}$. Sea $M \in W_1 \cap W_2$. Mostraremos a continuación que $M_{ij} = 0$ para cada $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Si i y j son tales que $i \leqslant j$ entonces la igualdad $M_{ij} = 0$ es consecuencia de que $M \in W_1$. En caso contrario, utilizamos el hecho de que $M \in W_2$: en efecto si $i > j$ entonces

$$M_{ij} = M_{ji} = 0.$$

Resta probar que $\mathcal{M}_{n\times n}(F) \subseteq W_1 \oplus W_2$. Si $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$, considérense las matrices A y B definidas de la siguiente manera

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \text{si} \quad i \leqslant j \\ \\ M_{ji} & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

y

$$B_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \leqslant j \\ \\ M_{ij} - A_{ij} & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

Se puede verificar fácilmente que $A \in W_2$, $B \in W_1$ y que $M = A + B$. De esto se desprende que $M \in W_1 \oplus W_2$, lo cual es justamente lo que hacía falta establecer.

---

27. Demostrar el corolario del Teorema 1.5.

Solución.

Sean $W_1, W_2, \dots W_n$, subespacios de V. Demostraremos por inducción sobre n que

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

también es subespacio de V.

Si $n = 2$, el resultado es consecuencia del Teorema 1.5. Supongamos que el teorema se cumple para $n-1$. Demostraremos que el resultado se cumple también para n. Sean $W_1, \dots, W_n$ subespacios de V. De la hipótesis de inducción se sigue que

$$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_{n-1}$$

es un subespacio de V. De esto y del Teorema 1.5 se desprende entonces que $W + W_n$ también es subespacio de V. Como

$$W + W_n = (W_1 + W_2 + \cdots + W_{n-1}) + W_n = W_1 + \cdots + W_n,$$

la demostración termina.

---

28. Completar la demostración del Teorema 1.6.

Solución.
Se trata de demostrar que si V es un espacio vectorial y W_1 y W_2 son subespacios de V y cada elemento v de V se puede escribir de manera única como $x_1 + x_2$ donde $x_1 \in W_1$ y $x_2 \in W_2$ entonces $V = W_1 \oplus W_2$. De la hipótesis dada se sigue automáticamente que

$$V = W_1 + W_2.$$

Probaremos ahora que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. La inclusión $\{0\} \subseteq W_1 \cap W_2$ se sigue del hecho de que tanto W_1 como W_2 son subespacios de V. Sea $x \in W_1 \cap W_2$. Si $x \neq 0$ entonces x se puede escribir de dos maneras como la suma de un elemento de W_1 y uno de W_2

$$x + 0 \in W_1 + W_2 \quad \text{y} \quad 0 + x \in W_1 + W_2.$$

Esto contradice la unicidad que se menciona en la hipótesis dada. La contradicción proviene de haber supuesto que $x \neq 0$. Así, $W_1 \cap W_2 \subseteq \{0\}$ y la prueba termina.

---

29. Sea W un subespacio de un espacio vectorial V sobre un campo F. Para toda $v \in V$ el conjunto $\{v\} + W = \{v + w \mid w \in W\}$ se llama *co-conjunto* de W que contiene a v. Es frecuente expresar este co-conjunto como $v + W$ en vez de $\{v\} + W$. Demostrar lo siguiente:

(a) $v + W$ es un subespacio de V si y solo si $v \in W$.
(b) $v_1 + W = v_2 + W$ si y solo si $v_1 - v_2 \in W$.

La suma y el producto por elementos de F puede definirse en el conjunto $S = \{v + W \mid v \in V\}$ de todos los co-conjuntos de W como sigue:

$$(v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W$$

para toda $v_1, v_2 \in V$ y

$$a(v + W) = av + W$$

para toda $v \in V$ y $a \in F$.

(c) Demostrar que las operaciones anteriores están bien definidas; es decir, mostrar que si $v_1 + W = v_1' + W$ y $v_2 + W = v_2' + W$, entonces

$$(v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1' + W) + (v_2' + W)$$

y

$$a(v_1 + W) = a(v_1' + W)$$

para toda $a \in F$.

N.B. Puede demostrarse de hecho que el conjunto S es un espacio vectorial bajo las operaciones definidas anteriormente. Este espacio vectorial se llama *espacio cociente de V módulo W* y se expresa mediante V/W.

Solución.

(a) Si $v + W$ es un subespacio de V entonces $0_V \in v + W$ y, en consecuencia, $0_V = v + w$ para algún $w \in W$. De la unicidad de los inversos aditivos y del hecho que W es subespacio de V se seguiría entonces que $v = -w \in W$. Inversamente, si $v \in W$ entonces $v + W$ es un subespacio de V pues en tal caso se cumple incluso que $v + W = W$.

(b) Si $v_1 + W = v_2 + W$ entonces $v_1 = v_1 + 0_V = v_2 + w$ para algún $w \in W$. Ergo,

$$v_1 - v_2 = w \in W.$$

Inversamente, si $v_1 - v_2 \in W$ entonces $v_1 = v_2 + w_0$ para algún $w_0 \in V$. Puesto que

$$\{v_1 + w \mid w \in W\} = \{v_2 + w_0 + w \mid w \in W\} = \{v_2 + w \mid w \in W\},$$

la conclusión deseada se tiene.

(c) Como $v_1 + W = v_1' + W$ y $v_2 + W = v_2' + W$ entonces $v_1 - v_1' = w_1$ y $v_2 - v_2' = w_2$ para ciertos $w_1, w_2 \in W$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
(v_1 + W) + (v_2 + W) &= (v_1 + v_2) + W \\
&= \{(v_1 + v_2) + w \mid w \in W\} \\
&= \{(v_1' + v_2') + (w_1 + w_2) + w \mid w \in W\} \\
&= \{(v_1' + v_2') + w \mid w \in W\} \\
&= (v_1' + v_2') + W \\
&= (v_1' + W) + (v_2' + W).
\end{aligned}$$

Sección IV. Combinaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales

1. Decir si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

(a) El vector cero es una combinación lineal de cualquier conjunto no vacío de vectores.
(b) El subespacio generado por $\varnothing$ es $\varnothing$.
(c) Si S es un subconjunto de un espacio vectorial V, $L(S)$ es igual a la intersección de todos los subespacios de V que contienen a S.
(d) Al resolver un sistema de ecuaciones lineales se puede multiplicar una ecuación por una constante.
(e) Al resolver un sistema de ecuaciones lineales se permite sumar un múltiplo de una ecuación a otra.
(f) Todo sistema de ecuaciones lineales tiene una solución.

Solución.

(a) Verdadero, este hecho se sigue de que en un espacio vectorial se cumple $0x = 0$ para toda $x \in V$.
(b) Falso, el subespacio generado por el conjunto vacío es por definición el subespacio $\{0\}$.
(c) Verdadero.
(d) Falso, la constante tiene que ser distinta de cero.
(e) Verdadero.
(f) Falso. Por ejemplo, el sistema conformado por las ecuaciones $0x = 1$ y $x + y = 1$ no admite solución.

---

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método expuesto en esta sección.

(a) $\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & -3x_3 & & = -2 \\ 3x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +5x_4 & = 7 \\ x_1 & - \; x_2 & -2x_3 & - \; x_4 & = -3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x_1 & -7x_2 & +4x_3 & = 10 \\ x_1 & -2x_2 & + \; x_3 & = 3 \\ 2x_1 & - \; x_2 & -2x_3 & = 6 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & - \; x_3 & + \; x_4 & = 5 \\ x_1 & +4x_2 & -3x_3 & -3x_4 & = 6 \\ 2x_1 & +3x_2 & - \; x_3 & +4x_4 & = 8 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & = 2 \\ x_1 & & +8x_3 & +5x_4 & = -6 \\ x_1 & + \; x_2 & +5x_3 & +5x_4 & = 3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 & + \; 2x_2 & - \; 4x_3 & - \; x_4 & + \; x_5 & = 7 \\ -x_1 & & +10x_3 & - \; 3x_4 & -4x_5 & = -16 \\ 2x_1 & + \; 5x_2 & - \; 5x_3 & - \; 4x_4 & - \; x_5 & = 2 \\ 4x_1 & +11x_2 & - \; 7x_3 & -10x_4 & -2x_5 & = 7 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & + \; 6x_3 & = -1 \\ 2x_1 & + \; x_2 & + \; x_3 & = 8 \\ 3x_1 & + \; x_2 & - \; x_3 & = 15 \\ x_1 & +3x_2 & +10x_3 & = -5 \end{cases}$

Solución.

(a) Nótese que si se intercambian las ecuaciones primera y tercera, los cálculos se facilitan. Entonces intercambiemos estas dos ecuaciones del sistema para obtener

$$\begin{cases} x_1 & - \; x_2 & -2x_3 & - \; x_4 & = -3 \\ 3x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +5x_4 & = 7 \\ 2x_1 & -2x_2 & -3x_3 & & = -2. \end{cases}$$

Ahora eliminemos x_1 de la segunda y tercera ecuación. Esta eliminación puede efectuarse sumando -3 veces la primera ecuación a la segunda, -2 veces la primera ecuación a la tercera; el resultado obtenido será el nuevo sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -3 \\ \qquad\qquad 4x_3 + 8x_4 = 16 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Luego intercambiaremos la segunda y la tercera ecuación, de manera que obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -3 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 = 4 \\ \qquad\qquad 4x_3 + 8x_4 = 16. \end{cases}$$

Posteriormente se sumarán múltiplos de la segunda ecuación a las otras con el objetivo de eliminar x_3 en cada una de las ecuaciones de este sistema, excepto de la segunda. Esto se hace sumando 2 veces la segunda ecuación a la primera y -4 veces la segunda ecuación a la tercera para obtener

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad -3x_4 = 5 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 = 4 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

El sistema anterior es fácil de resolver para x_1 y x_3 en términos de las incógnitas x_2 y x_4. Reescribiendo este sistema obtenemos que

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 + 3x_4 + 5 \\ x_3 &= \quad -2x_4 + 4 \end{aligned}$$

Ahora bien, para cualquier elección de los escalares x_2 y x_4 el vector

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_2 + 3x_4 + 5, x_2, -2x_4 + 4, x_4) \\ &= x_2(1, 1, 0, 0) + x_4(3, 0, -2, 1) + (5, 0, 4, 0) \end{aligned}$$

será solución del sistema original de ecuaciones.

(b) Para facilitar los cálculos intercambiaremos las ecuaciones primera y segunda para obtener

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Eliminando x_1 de la segunda y tercera ecuaciones se tiene

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ \qquad - x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ahora bien, multiplicaremos por -1 la segunda ecuación para conseguir el siguiente sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ & 3x_2 & & -4x_3 & = & 0. \end{cases}$$

Eliminaremos a continuación x_2 de las ecuaciones primera y tercera. Esto se hace sumando 2 veces la segunda ecuación a la primera y -3 veces la segunda ecuación a la tercera: el sistema resultante es

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & = & 1 \\ & x_2 & -x_3 & = & -1 \\ & & -x_3 & = & 3. \end{cases}$$

Multiplicando por -1 la tercera ecuación tenemos que

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & = & 1 \\ & x_2 & -x_3 & = & -1 \\ & & x_3 & = & -3. \end{cases}$$

Este sistema es fácil de resolver para x_1, x_2 y x_3. Lo que se obtiene es que

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 + 1 \\ x_2 &= x_3 - 1 \\ x_3 &= -3. \end{aligned}$$

Entonces, si sustituimos lo obtenido para x_3 en las ecuaciones segunda y tercera se llega a que $x_1 = -2$ y $x_2 = -4$. En consecuencia, la solución (única) al sistema original está dada por la terna $(-2, -4, -3)$.

(c) Eliminando x_1 de la segunda y tercera ecuación se adquiere el siguiente nuevo sistema

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ & 2x_2 & & -2x_3 & & -4x_4 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & x_3 & +2x_4 & = & -2. \end{cases}$$

Intercambiando las ecuaciones segunda y tercera obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ & - & x_2 & + & x_3 & +2x_4 & = & -2 \\ & 2x_2 & & -2x_3 & & -4x_4 & = & 1. \end{cases}$$

Multiplicando por -1 la segunda ecuación conseguimos un sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ & x_2 & - & x_3 & & -2x_4 & = & 2 \\ & 2x_2 & & -2x_3 & & -4x_4 & = & 1. \end{cases}$$

Sumando múltiplos adecuados de la segunda ecuación a las ecuaciones primera y tercera se obtiene

$$\left\{\begin{array}{ccccl} x_1 & & +x_3 & +5x_4 & = 1 \\ & x_2 & -x_3 & -2x_4 & = 2 \\ & & & 0 & = 1. \end{array}\right.$$

La presencia de la igualdad $0 = 1$ indica que el sistema original no tiene soluciones.

(d) $\{(-16 - 8s, 9 + 3s, s, 2) : s \in \mathbb{R}\}$.

(e) $\{(-4 + 10s - 3t, 3 - 3s + 2t, s, t, 5) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

(f) $\{(3, 4, -2)\}$.

---

3. Para cada uno de los siguientes grupos de vectores en $\mathbb{R}^3$, determine si el primer vector puede o no ser expresado como una combinación lineal de los otros dos.

(a) $(-2, 0, 3), (1, 3, 0), (2, 4, -1)$

(b) $(1, 2, -3), (-3, 2, 1), (2, -1, -1)$

(c) $(3, 4, 1), (1, -2, 1), (-2, -1, 1)$

(d) $(2, -1, 0), (1, 2, -3), (1, -3, 2)$

(e) $(5, 1, -5), (1, -2, -3), (-2, 3, -4)$

(f) $(-2, 2, 2), (1, 2, -1), (-3, -3, 3)$

Solución.

(a) Se trata de determinar si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} (-2, 0, 3) &= a(1, 3, 0) + b(2, 4, -1) \\ &= (a + 2b, 3a + 4b, -b). \end{aligned}$$

Esta igualdad de vectores implica que a y b deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{cccr} a & +2b & = & -2 \\ 3a & +4b & = & 0 \\ & -\ b & = & 3. \end{array}\right.$$

De la tercera ecuación del sistema anterior se desprende que $b = -3$. Sustituyendo lo anterior en la primera ecuación (o en la segunda) obtenemos que $a = 4$. Por lo tanto, el primer vector sí se puede expresar como una combinación lineal de los otros dos:

$$(-2, 0, 3) = 4(1, 3, 0) - 3(2, 4, -1).$$

(b) El primer vector sí puede ser expresado como una combinación lineal de los otros dos. De hecho, $(1, 2, -3) = 5(-3, 2, 1) + 8(2, -1, -1)$.

(c) Nuevamente, se trata determinar si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned}(3,4,1) &= a(1,-2,1) + b(-2,-1,1) \\ &= (a-2b, -2a-b, a+b).\end{aligned}$$

El problema se reduce entonces al análisis de la resolubilidad del siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & - & 2b & = & 3 \\ -2a & - & b & = & 4 \\ a & + & b & = & 1 \end{array}\right.$$

Al eliminar a de las ecuaciones segunda y tercera se obtiene el sistema siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & - & 2b & = & 3 \\ & - & 5b & = & 10 \\ & & 3b & = & -2 \end{array}\right.$$

Multiplicando a continuación la segunda ecuación por $-\frac{1}{5}$, llegamos al sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & - & 2b & = & 3 \\ & & b & = & -2 \\ & & 3b & = & -2 \end{array}\right.$$

Posteriormente eliminamos b de las ecuaciones primera y segunda: lo que se obtiene al hacer esto es el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} a & = & -1 \\ b & = & -2 \\ 0 & = & 4 \end{array}\right.$$

La presencia de la igualdad espuria $0 = 4$ indica que el sistema de ecuaciones original no tiene soluciones y, por lo tanto, $(3, 4, 1)$ no es una combinación lineal de $(1, -2, 1)$ y $(-2, -1, 1)$.

(d) No, el primer vector no puede ser expresado como una combinación lineal de los otros dos.

(e) No, el primer vector no puede ser expresado como una combinación lineal de los otros dos.

(f) El primer vector sí puede ser expresado como una combinación lineal de los otros dos. De hecho, $(-2, 2, 2) = 4(1, 2, -1) + 2(-3, -3, 3)$.

---

4. Para cada uno de los siguientes grupos de polinomios en $P_3(\mathbb{R})$, determine si el primer polinomio puede o no ser expresado como una combinación lineal de los otros dos.

(a) $x^3 - 3x + 5, x^3 + 2x^2 - x + 1, x^3 + 3x^2 - 1$
(b) $4x^3 + 2x^2 - 6, x^3 - 2x^2 + 4x + 1, 3x^3 - 6x^2 + x + 4$
(c) $-2x^3 - 11x^2 + 3x + 2, x^3, -2x^2 + 3x - 1, 2x^3 + x^2 + 3x - 2$
(d) $x^3 + x^2 + 2x + 13, 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1, x^3 - x^2 + 2x + 3$
(e) $x^3 - 8x^2 + 4x, x^3 - 2x^2 + 3x - 1, x^3 - 2x + 3$
(f) $6x^3 - 3x^2 + x + 2, x^3 - x^2 + 2x + 3, 2x^3 + x^2 - 3x + 1$

Solución.

(a) El problema se reduce a determinar si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 5 &= a(x^3 + 2x^2 - x + 1) + b(x^3 + 3x^2 - 1) \\ &= (a + b)x^3 + (2a + 3b)x^2 + (-a)x + (a - b). \end{aligned}$$

Esta igualdad de polinomios implica que a y b deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 1 \\ 2a & + & 3b & = & 0 \\ & - & a & = & -3 \\ a & - & b & = & 5. \end{array} \right.$$

Resoviendo este sistema de ecuaciones por el método que se utilizó en el problema anterior obtenemos que la solución al sistema es $a = 3$ y $b = -2$. De esto se sigue que

$$x^3 - 3x + 5 = 3(x^3 + 2x^2 - x + 1) - 2(x^3 + 3x^2 - 1),$$

lo cual nos permite concluir que el primer polinomio dado sí se puede escribir como combinación lineal de los otros dos.

(b) Emulando lo hecho en el inciso anterior, todo se reduce a determinar si existen $a, b \in \mathbb{R}$ de tal manera que

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & 3b & = & 4 \\ -2a & - & 6b & = & 2 \\ 4a & + & b & = & 0 \\ a & + & 4b & = & -6. \end{array} \right.$$

Al proceder según el método discutido en el libro, lo que hacemos en primer lugar es eliminar la incógnita a de las ecuaciones segunda, tercera y cuarta y al sistema equivalente al cual llegamos es

$$\begin{cases} a & + & 3b & = & 4 \\ & - & 0 & = & 10 \\ & - & 11b & = & -16 \\ & & b & = & -10. \end{cases}$$

La presencia de la igualdad espuria $0 = 10$ indica que el sistema no tiene solución. Por lo tanto, el primer polinomio dado no se puede escribir como una combinación lineal de los otros dos.

(c) El primer polinomio sí puede ser expresado como una combinación lineal de los otros dos. De hecho, $-2x^3 - 11x^2 + 3x + 2 = 4(x^3 - 2x^2 + 3x - 1) - 3(2x^3 + x^2 + 3x - 2)$.

(d) El primer polinomio sí puede ser expresado como una combinación lineal de los otros dos. De hecho, $x^3 + x^2 + 2x + 13 = -2(2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) + 5(x^3 - x^2 + 2x + 3)$.

(e) No, el primer polinomio no puede expresarse como combinación lineal de los otros dos.

(f) No, el primer polinomio no puede expresarse como combinación lineal de los otros dos.

---

5. En F^n sea e_j el vector cuya coordenada j-ésima es 1 y cuyas otras coordenadas son 0. Demostrar que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ genera a F^n.

Solución.

Se puede ver fácilmente que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ genera a F^n puesto que si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F^n$ entonces

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n.$$

---

6. Mostrar que $P_n(F)$ puede generarse por $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

Solución.

Si $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x_1 + a_0 \in P_n(F)$ entonces se cumple claramente que

$$p(x) \in L(\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}).$$

---

7. Mostrar que las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

generan a $\mathcal{M}_{2\times 2}(F)$.

Solución.
Lo que hay que mostrar es que cualquier elemento de $\mathcal{M}_{2\times 2}(F)$ puede ser expresado como una combinación lineal de las cuatro matrices dadas.
Sea $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(F)$. Puesto que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la conclusión deseada se tiene.

---

8. Demostrar que si

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces el subespacio generado por $\{M_1, M_2, M_3\}$ es el conjunto de todas las matrices simétricas de 2×2.

Solución.
Una matriz simétrica de 2×2 es de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ para algunos escalares a, b y c. Puesto que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = aM_1 + cM_2 + bM_3,$$

se sigue que $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in L(\{M_1, M_2, M_3\})$. Por otra parte, si $M \in L(\{M_1, M_2, M_3\})$ entonces

$$M = \alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3$$

para algunos escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Así

$$M = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$$

y M es entonces una matriz simétrica pues

$$M^t = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} = M.$$

---

9. Para cualquier elemento x en un espacio vectorial, demostrar que $L(\{x\}) = \{ax \mid a \in F\})$. Interpretar este resultado geométricamente en $\mathbb{R}^3$.

Solución.
Si $y \in L(x)$ entonces

$$y = ax,$$

para algún $a \in F$. Inversamente, si $y' \in \{ax \mid a \in F\}$, entonces

$$y' = a_0 x,$$

para algún $a_0 \in F$ y, por lo tanto, $y' \in L(\{x\})$. Puesto que se ha establecido la validez de las dos inclusiones $L(\{x\}) \subseteq \{ax \mid a \in F\})$ y $\{ax \mid a \in F\}) \subseteq L(\{x\})$, el resultado deseado se sigue.

En $\mathbb{R}^3$, el subespacio generado por $\{x\}$ es exactamente igual a la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y el punto x.

---

10. Demostrar que un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio de V si y solo si $L(W) = W$.

Solución.
[$\Rightarrow$] Supongamos que W es un subespacio de W. Puesto que la inclusión $W \subseteq L(W)$ siempre se cumple entonces lo único que resta demostrar es que $L(W) \subseteq W$. Sea $x \in L(W)$. Entonces $x = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_n w_n$ donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares y $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$. Como W es un subespacio entonces en la luz del ejercicio III.**24** se garantiza que $x = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_n w_n \in W$. Se ha establecido así que $L(W) \subseteq W$.
[$\Leftarrow$] Supongamos ahora que $L(W) = W$. Como $L(W)$ es siempre un subespacio del espacio V que contenga a W, la conclusión deseada se sigue.

---

11. Demostrar que si S_1 y S_2 son subconjuntos de un espacio vectorial V tales que $S_1 \subseteq S_2$, $L(S_1) \subseteq L(S_2)$. En particular, si $S_1 \subseteq S_2$ y $L(S_1) = V$, se deduce que $L(S_2) = V$.

Solución.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que tanto S_1 como S_2 son no vacíos. Sea $x \in L(S_1)$. Entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in F$ y $u_1, \ldots, u_n \in S_1$ tales que

$$x = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n.$$

Como $S_1 \subseteq S_2$ entonces se tiene que $u_1, \ldots, u_n \in S_2$ y en consecuencia

$$x = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n \in L(S_2).$$

Esto es justamente lo que se pretendía establecer.

La segunda parte del ejercicio se establece de la siguiente manera: si $L(S_1) = V$ entonces $V = L(S_1) \subseteq L(S_2) \subseteq V$ y, por lo tanto, $L(S_2) = V$.

---

12. Demostrar que si S_1 y S_2 son subconjuntos cualesquiera de un espacio vectorial V, entonces $L(S_1 \cup S_2) = L(S_1) + L(S_2)$.

Solución.
Sea $x \in L(S_1 \cup S_2)$. Entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in F$ y $u_1, \ldots, u_2 \in S_1 \cup S_2$ tales que

$$x = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n.$$

Si ninguno de los vectores u_i pertenece a S_1 entonces cada uno de los vectores u_i pertenece a S_2 y por lo tanto

$$x = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n \in L(S_2), \tag{11}$$

de lo cual se sigue que $x \in L(S_1) + L(S_2)$.

Se puede razonar de manera análoga en el caso de que ninguno de los vectores u_i pertenezca a S_2. De otra manera, el conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\}$ puede escribirse en la forma

$$\{v_1, \ldots, v_k\} \cup \{w_1, \ldots, w_{n-k}\}$$

donde cada v_i es elemento de S_1 y cada w_i es elemento de S_2. En vista de esto se sigue que

$$\begin{aligned} x &= a_1u_1 + \cdots + a_nu_n && (12)\\ &= (\alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_kv_k) + (\alpha_{k+1}w_1 + \cdots + \alpha_nw_{n-k}) && (13) \end{aligned}$$

donde $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$ es un vector que se obtiene mediante una permutación de las entradas del vector $(a_1, \dots, a_n)$. De las igualdades en (12) y (13) se desprende que

$$x \in L(S_1) + L(S_2).$$

Sea ahora $x \in L(S_1) + L(S_2)$. Se cumple así que

$$x = y + z$$

donde $y \in L(S_1)$ y $z \in L(S_2)$. Luego, existen $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in F$, $u_1, \dots, u_n \in S_1$ y $v_1, \dots, v_m \in S_2$ tales que

$$y = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n \tag{14}$$

y

$$z = b_1v_1 + \cdots + b_mv_m. \tag{15}$$

De la ecuaciones (14) y (15) se sigue que

$$x = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n + b_1v_1 + \cdots + b_mv_m.$$

Al tenerse que $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in S_1 \cup S_2$ se concluye que $x \in L(S_1 \cup S_2)$; ergo, $L(s_1) + L(S_2) \subseteq L(S_1 \cup S_2)$ y la demostración culmina.

---

13. Sean S_1 y S_2 subconjuntos de un espacio vectorial V. Demostrar que $L(S_1 \cap S_2) \subseteq L(S_1) \cap L(S_2)$. Dar un ejemplo en el cual $L(S_1 \cap S_2)$ y $L(S_1) \cap L(S_2)$ sean iguales y un ejemplo donde sean distintos.

Solución.

Si $x \in L(S_1 \cap S_2)$ entonces

$$x = a_1u_2 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$$

donde cada a_1 es un escalar del campo que subyace a V y cada u_i es un vector que pertenece a $S_1 \cap S_2$. Se tiene así que cada vector u_i pertenece tanto a S_1 como a S_2 y por consiguiente x puede verse como una combinación lineal de elementos de S_1 y también como una combinación lineal de elementos de S_2. Ergo, $x \in L(S_1) \cap L(S_2)$ y la prueba de esta parte del ejercicio termina.

Para dar un ejemplo donde se cumpla que $L(S_1) \cap L(S_2) = L(S_1 \cap S_2)$ podemos recurrir al ejercicio **10**. En vista de dicho problema se tiene que si S_1 y S_2 son subespacios cualesquiera de V entonces

$$L(S_1 \cap S_2) = S_1 \cap S_2.$$

Finalmente, un ejemplo donde se cumple que $L(S_1 \cap S_2) \neq L(S_1) \cap L(S_2)$ puede obtenerse como sigue: si $S_1 = \{(1,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ y $S_2 = \{(-1,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ entonces $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ y, en consecuencia,

$$L(S_1 \cap S_2) = L(\varnothing) = \{(0,0,0)\}.$$

Por otra parte,

$$L(S_1) \cap L(S_2) = \{(t,0,0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Sección V. Dependencia e independencia lineal

1. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Si S es un conjunto linealmente dependiente, cada elemento de S es una combinación lineal de otros elementos de S.
(b) Cualquier conjunto que contenga al vector cero es linealmente dependiente.
(c) El conjunto vacío es linealmente dependiente.
(d) Subconjuntos de conjuntos linealmente dependientes son linealmente dependientes.
(e) Subconjuntos de conjuntos linealmente independientes son linealmente independientes.
(f) Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son linealmente independientes y $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, todos los escalares a_i son iguales a cero.

Solución.

(a) Falso, si $S = \{(1,0), (2,0), (0,1)\}$ entonces S es linealmente dependiente pero, $(0,1)$ no es combinación lineal de los otros dos elementos de S.
(b) Verdadero, pues en cualquier espacio vectorial V sobre un campo F se cumple que $1_F \cdot 0 = 0$.
(c) Falso, puesto que los conjuntos linealmente dependientes deben de ser necesariamente no vacíos.
(d) Falso, se tiene que $S = \{(1,0), (2,0), (0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es linealmente dependiente pero el $\{(1,0), (0,1)\}$ de S es linealmente independiente.
(e) Verdadero, es lo que afirma el Corolario al Teorema 1.8.
(f) Verdadero, puesto que un conjunto finito es linealmente independiente si la única manera de expresar al cero como combinación lineal de algunos de sus elementos es con puros escalares iguales a 0.

---

2. En F^n sea e_j el vector cuya coordenada j-ésima es 1 y las demás son 0. Demostrar que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es linealmente independiente.

Solución.
Nótese que los vectores e_j son de la forma $(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0\dots,1)$. Luego, si suponemos que $a_1,\dots,a_n \in F$ satisfacen que

$$0_{F^n} = (0,0,\dots,0) = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n = (a_1,a_2,\dots,a_n)$$

entonces $0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Por lo tanto, $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ es un subconjunto linealmente independiente de F^n.

---

3. Demostrar que el conjunto $\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$ es linealmente independiente en $P_n(F)$.

Solución.
Supongamos que se cumple la siguiente igualdad

$$0_{P_n(F)} = a_0 1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Usando el criterio de igualdad de elementos en $P_n(F)$ se desprende inmediatamente que $a_i = 0$ para cada $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$. En consecuencia, el conjunto $\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$ es linealmente independiente.

---

4. Demostrar que las matrices

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

son linealmente independientes en $\mathcal{M}_{2\times 2}(F)$.

Solución.
Lo que se requiere probar es que, si la matriz cero de $\mathcal{M}_{2\times 2}(F)$ se escribe como combinación lineal de las matrices dadas, los escalares que figuren como coeficientes en dicha combinación deben ser todos iguales a 0.

Supongamos pues que $a_1,a_2,a_3,a_4 \in F$ hacen que se cumpla la igualdad

$$a_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Al simplicar la expresión que aparece en el lado izquierdo izquierdo de la igualdad anterior se llega a que

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De lo anterior se desprende $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, lo cual implica a su vez que las matrices dadas son linealmente independientes.

---

5. Encontrar el conjunto de matrices diagonales linealmente independientes que generan al espacio vectorial de matrices diagonales de 2×2.

Solución.
Helo aquí:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

---

6. Demostrar que $\{x, y\}$ es linealmente dependiente si y solo si x o y es un múltiplo del otro.

Solución.
$[\Rightarrow]$ Si $\{x, y\}$ es linealmente dependiente entonces $a_1 x + a_2 y = 0$ para algunos escalares a_1 y a_2, los cuales no son iguales a 0 simultáneamente. Suponiendo—sin pérdida de generalidad—que $a_1 \neq 0$, se obtendría que $x = (-a_2)a_1^{-1}y$, lo que equivale a decir que x es un múltiplo de y.
$[\Leftarrow]$ Si x es múltiplo de y entonces $x = ay$ para algún escalar a; de esto se sigue que $1x+(-a)y = 0$, lo cual nos permite concluir que $\{x, y\}$ es linealmente dependiente. Si acaso fuese y el múltiplo de x, la demostración se llevaría a cabo de manera análoga.

---

7. Dar un ejemplo de tres vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^2$ tales que ninguno de los tres es múltiplo de otro.

Solución.
Considérense por ejemplo los vectores $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$ y $z = (1, 1)$. Puesto que $x + y - z = (0, 0)$, esos tres vectores son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^2$. Se cumple también que ninguno de esos vectores es un múltiplo escalar de alguno de los otros dos.

8. Demostrar el Teorema 1.8 y su Corolario.

Solución.

Demostración del Teorema 1.8. Como S_1 es linealmente dependiente entonces existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **no todos cero** y $u_1, u_2, \ldots, u_n \in S_1$ tales que

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0.$$

Puesto que $S_1 \subseteq S_2$ entonces $u_1, u_2, \ldots, u_n \in S_2$ y por lo tanto el vector cero de V se puede escribir como una combinación lineal no trivial de elementos de S_2: esto implica claramente que S_2 es un subconjunto linealmente dependiente.

Demostración del Corolario al Teorema 1.8. Si S_2 es linealmente independiente entonces S_2 no es linealmente dependiente. De esto y el Teorema 1.8 se sigue entonces que S_1 no es linealmente dependiente. En consecuencia, S_1 es linealmente independiente y esto es lo que se deseaba establecer.

Observación. El Corolario no es sino la proposición contrarrecíproca del Teorema 1.8.

9.

(a) Demostrar que $\{u, v\}$ es linealmente independiente si y solo si $\{u + v, u - v\}$ es linealmente independiente.

(b) Demostrar que $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente si y solo si $\{u + v, u + w, v + w\}$ es linealmente independiente.

Solución.

(a) $[\Rightarrow]$ Supongamos que α y β son escalares tales que

$$\alpha(u + v) + \beta(u - v) = 0.$$

Esta igualdad se puede reescribir de la siguiente manera:

$$(\alpha + \beta)u + (\alpha - \beta)v = 0.$$

Puesto que $\{u, v\}$ es linealmente independiente, la igualdad anterior implica que $\alpha + \beta = 0$ y $\alpha - \beta = 0$. De estas dos igualdades se sigue a su vez que $\alpha = \beta = 0$. Se concluye así que $\{u + v, u - v\}$ es linealmente independiente.

[$\Leftarrow$] Supongamos que α y β son escalares tales que

$$\alpha u + \beta v = 0.$$

Esta igualdad es equivalente a:

$$\frac{(\alpha+\beta)}{2}(u+v) + \frac{(\alpha-\beta)}{2}(u-v) = 0.$$

De esto y la hipótesis de que $\{u+v, u-v\}$ es linealmente independiente podemos concluir que $\frac{(\alpha+\beta)}{2} = 0 = \frac{(\alpha-\beta)}{2}$. De estas igualdades se sigue a su vez que $\alpha = \beta = 0$. Ergo, $\{u, v\}$ es un conjunto linealmente independiente.

(b) [$\Rightarrow$] Supongamos que α, β y γ son escalares tales que

$$\alpha(u+v) + \beta(u+w) + \gamma(v+w) = 0.$$

Esta igualdad se puede reescribir de la siguiente manera:

$$(\alpha+\beta)u + (\alpha+\gamma)v + (\beta+\gamma)w = 0.$$

Puesto que $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente, la igualdad anterior implica que $\alpha+\beta = \alpha+\gamma = \beta+\gamma = 0$. De estas igualdades se obtiene a su vez que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Se concluye así que $\{u+v, u+w, v+w\}$ es linealmente independiente.

[$\Leftarrow$] Supongamos que α, β y γ son escalares tales que

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

Esta igualdad es equivalente a:

$$\frac{(\alpha+\beta-\gamma)}{2}(u+v) + \frac{(\alpha+\gamma-\beta)}{2}(u+w) + \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}(v+w) = 0.$$

De esto y la hipótesis de que $\{u+v, u+w, v+w\}$ es linealmente independiente podemos concluir que $\frac{(\alpha+\beta-\gamma)}{2} = \frac{(\alpha+\gamma-\beta)}{2} = \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} = 0$. De estas igualdades se sigue a su vez que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ergo, $\{u, v\}$ es un conjunto linealmente independiente.

---

10. Demostrar que un conjunto S es linealmente dependiente si y solo si $S = \{0\}$ o si existen vectores distintos $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$ en S tal que y es una combinación lineal de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Solución.

[$\Rightarrow$] Si S es linealmente dependiente y $S \neq \{0\}$ entonces existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **no todos cero** y vectores distintos $w_1, w_2, \ldots, w_n \in S$ tales que

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_n w_n = 0.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a_1 \neq 0$. La combinación lineal anterior se puede reescribir entonces de la siguiente manera:

$$w_1 + \frac{a_2}{a_1}w_2 + \cdots + \frac{a_n}{a_1}w_n = 0.$$

Esto implica que w_1 es una combinación lineal de $w_3, w_2, \ldots, w_n$. La conclusión deseada se sigue al hacer

$$y = w_1, x_1 = w_2, x_2 = w_3, \ldots, x_n = w_n.$$

[$\Leftarrow$] Si $S = \{0\}$ entonces S es claramente un conjunto linealmente dependiente. Supongamos ahora que existen vectores distintos $y, x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ tales que y es una combinación lineal de $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$. Esto indica que existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

o, equivalentemente, tales que

$$0 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + (-1)y.$$

De la igualdad anterior se colige que S es linealmente dependiente.

---

11. Sea $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito de vectores. Demostrar que S es linealmente dependiente si y solo si $x_1 = 0$ o $x_{k+1} \in L(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\})$ para algún $k < n$.

Solución.

[$\Rightarrow$] Supongamos que $x_1 \neq 0$. Esto implica que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares **no todos cero** tales que

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0,$$

entonces $a_j \neq 0$ para al menos un $j \in \{2, \ldots, n\}$. Sea $\ell = \text{máx}\{j \in \mathbb{N} \cap [2, n] \mid a_j \neq 0\}$. Se cumple entonces que

$$a_\ell x_\ell = \sum_{1 \leqslant m \leqslant \ell-1} (-a_m)x_m,$$

de lo cual se desprende que

$$x_\ell = \sum_{1 \leqslant m \leqslant \ell-1} (-a_m)a_\ell^{-1}x_m \in L(\{x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-1}\}).$$

[$\Leftarrow$] Si $x_1 = 0$ entonces S es linealmente dependiente pues cualquier subconjunto de un espacio vectorial V que tiene por elemento a 0_V es linealmente dependiente. Si $x_{k+1} \in L(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\})$

para algún $k < n$ entonces existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tales que $x_{k+1} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k$. De eso se desprende a su vez que

$$0 = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k + (-1)x_{k+1} + 0x_{k+2} + \cdots + 0x_n,$$

lo que nos permite concluir que S es linealmente dependiente.

---

12. Demostrar que un conjunto S de vectores es linealmente independiente si y solo si cada subconjunto finito de S es linealmente independiente.

Solución.
[$\Rightarrow$] Es una consecuencia inmediata del Corolario demostrado en el ejercicio **8** de esta misma sección de problemas.

[$\Leftarrow$] Supongamos que S no es linealmente independiente. Esto quiere decir que existen $a_1, \ldots, a_n \in F$ (**no todos cero**) y vectores distintos $x_1, \ldots, x_n$ tales que

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

De esto se desprende que el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es un subconjunto finito de S que es linealmente dependiente. Lo anterior entra en contradicción con la hipótesis dada y la demostración termina.

---

13. Sea M una matriz cuadrada triangular superior (como se definió en el ejercicio III.**12**) que tenga términos no nulos en la diagonal. Demostrar que las columnas de M son linealmente independientes.

Solución.
Sea $M = (M_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ una matriz triangular superior tal que $M_{ii} \neq 0$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Lo que tenemos que demostrar es que los vectores

$$M_1 = \begin{pmatrix} M_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} M_{13} \\ M_{23} \\ M_{33} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad M_n = \begin{pmatrix} M_{1n} \\ M_{2n} \\ M_{3n} \\ \vdots \\ M_{nn} \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes. Para ello, supongamos que $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ son tales que

$$a_1M_1 + a_2M_2 + \cdots + a_nM_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene entonces que

$$\begin{pmatrix} a_1M_{11} + a_2M_{12} + a_3M_{13} + \cdots + a_nM_{1n} \\ a_2M_{22} + a_3M_{23} + \cdots + a_nM_{2n} \\ a_3M_{33} + \cdots + a_nM_{3n} \\ \vdots \\ a_nM_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como $M_{ii} \neq 0$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots n\}$, de la igualdad anterior se sigue que

$$a_n = 0,\ a_{n-1} = 0,\ a_{n-2} = 0,\ \ldots,\ a_2 = 0 \text{ y } a_1 = 0.$$

De todo lo anterior se colige que el conjunto conformado por las columnas de M es linealmente independiente.

---

14. Sean f y g funciones definidas por $f(t) = e^{rt}$ y $g(t) = e^{st}$, donde $r \neq s$. Demostrar que f y g son linealmente independientes en $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Sugerencia:* Suponer que $ae^{rt} + be^{st} = 0$. Hacer $t = 0$ y obtener una ecuación que involucre a y b. Luego diferenciar $ae^{rt} + be^{st} = 0$ y hacer $t = 0$ para obtener una segunda ecuación en a y b. Resolver ambas ecuaciones para a y b.

Solución.

Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}$ satisfacen que

$$ae^{rt} + be^{st} = 0 \tag{16}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Si evaluamos el lado izquierdo de (16) en $t = 0$ obtenemos la siguiente ecuación:

$$a + b = 0. \tag{17}$$

Por otro lado, si derivamos ambos lados de (16) con respecto a t y después evaluamos el resultado en $t = 0$, se obtiene que

$$ar + bs = 0. \tag{18}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones conformado por las ecuaciones (17) y (18) se obtiene que $a = b = 0$. Concluimos de esto que las funciones f y g sí son linealmente independientes en $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Sección VI. Bases y dimensiones

1. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) El espacio vectorial cero no tiene base.

(b) Todo espacio vectorial generado por un conjunto finito tiene una base.

(c) Todo espacio vectorial tiene una base finita.

(d) Un espacio vectorial no puede tener más de una base.

(e) Si un espacio vectorial tiene una base finita, entonces el número de vectores en todas las bases es el mismo.

(f) La dimensión de $P_n(F)$ es n.

(g) La dimensión de $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ es $m + n$.

(h) Suponer que V es un espacio vectorial dimensionalmente finito, que S_1 es un subconjunto linealmente independiente de V y que S_2 es un subconjunto de V que genera a V. Luego, S_1 no puede tener más elementos que S_2.

(i) Si S genera el espacio vectorial V, entonces todo vector en V puede escribirse como una combinación lineal de elementos de S de una sola manera.

(j) Todo subespacio de un espacio dimensionalmente finito es dimensionalmente finito.

(k) Si V es un espacio vectorial de dimensión n, entonces V tiene exactamente un subespacio de dimensión 0 y exactamente un subespacio de dimensión n.

(l) Si W_1 y W_2 son subespacios dimensionalmente finitos de un espacio vectorial, entonces $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.

Solución.

(a) Falso, del hecho de que $L(\varnothing) = \{0\}$ se sigue que el conjunto $\varnothing$ es una base para el espacio vectorial cero.

(b) Verdadero, que ello es así lo garantiza el Teorema 1.10.

(c) Falso, un contraejemplo lo brinda el espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes reales.

(d) Falso. Por ejemplo, no resulta difícil convencerse de que $\{(1,0),(0,1)\}$ y $\{(1,-1),(1,1)\}$ son bases distintas para $\mathbb{R}^2$.

(e) Verdadero, esto lo garantiza el Corolario 3 del Teorema 1.11.
(f) Falso, la dimensión de $P_n(F)$ es $n+1$.
(g) Falso, la dimensión de $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ es $m \times n$.
(h) Verdadero, ver por ejemplo [**2**, Theorem 1.10].
(i) Falso. Por ejemplo, el conjunto $S = \{(1,0),(0,1),(2,0)\}$ genera al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, pero el elemento $(10,0)$ se puede expresar de dos maneras distintas (al menos) como combinación lineal de elementos de S: $(10,0) = 10(1,0) + 0(0,1) + 0(2,0)$ y $(10,0) = 0(1,0) + 0(0,1) + 5(2,0)$.
(j) Verdadero. De acuerdo con el Teorema 1.12, si V es un espacio vectorial de dimensión n y W es un subespacio de V entonces $\dim(W) \leqslant n$.
(k) Verdadero: el único subespacio de dimensión 0 de V es $\{0_V\}$ y el único subespacio de dimensión n de V es V.
(l) Falso. El Teorema 1.13 indica que si W_1 y W_2 son subespacios dimensionalmente finitos de un espacio vectorial V entonces $W_1 + W_2$ es dimensionalmente finito y $\dim(W_1+W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$. Luego, si $\dim(W_1 \cap W_2) \neq 0$ entonces la igualdad $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$ no se cumple.

2. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son bases para $\mathbb{R}^3$.

(a) $\{(1,0,-1),(2,5,1),(0,-4,3)\}$
(b) $\{(2,-4,1),(0,3,-1),(6,0,-1)\}$
(c) $\{(1,2,-1),(1,0,2),(2,1,1)\}$
(d) $\{(-1,3,1),(2,-4,-3),(-3,8,2)\}$
(e) $\{(1,-3,-2),(-3,1,3),(-2,-10,-2)\}$

Solución.
Basta con determinar cuáles de esos conjuntos son linealmente independientes (si son linealmente dependientes entonces no pueden conformar una base y si son linealmente independientes entonces se aplica el resultado que indica que, en un espacio vectorial V de dimensión n, cualquier subconjunto linealmente independiente de cardinal n es una base de V).

(a) Supongamos que a_1, a_2 y a_3 son escalares tales que

$$a_1(1,0,-1) + a_2(2,5,1) + a_3(0,-4,3) = (0,0,0).$$

Entonces, al desarrollar la expresión que aparece en el lado izquierdo de la igualdad anterior, se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} a_1 & +2a_2 & & = & 0 \\ & 5a_2 & -4a_3 & = & 0 \\ -a_1 & + \ a_2 & +3a_3 & = & 0 \end{cases}$$

Utilizando el método que se empleó en los ejercicios de la sección IV, obtenemos que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Por consiguiente, el conjunto de vectores dado sí es una base para $\mathbb{R}^3$.

(b) Nuevamente, supongamos que $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ cumplen que

$$a_1(2,-4,1) + a_2(0,3,-1) + a_3(6,0,-1) = (0,0,0). \tag{19}$$

Esta ecuación conduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2a_1 & & +6a_3 & = & 0 \\ -4a_1 & +3a_2 & & = & 0 \\ a_1 & -a_2 & -a_3 & = & 0 \end{cases}$$

Aplicando el método aprendido en la sección IV y puesto en práctica en los ejercicios de esa misma sección obtenemos el siguiente sistema equivalente

$$\begin{cases} a_1 & & +3a_3 & = & 0 \\ & a_2 & +4a_3 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

La tercera ecuación indica que el sistema original tiene un número infinito de soluciones; de esto se desprende que pueden existir escalares a_1, a_2, a_3 **no todos cero** que verifiquen (19). En consecuencia, el conjunto de vectores dado no es una base para $\mathbb{R}^3$.

Los incisos faltantes se pueden abordar de manera análoga. Las respuestas que en esos casos se obtienen son:

(c) El conjunto sí es una base para $\mathbb{R}^3$.
(d) El conjunto sí es una base para $\mathbb{R}^3$.
(e) No, el conjunto no es una base para $\mathbb{R}^3$.

---

3. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son bases para $P_2(\mathbb{R})$.

(a) $\{-1 - x + 2x^2, 2 + x - 2x^2, 1 - 2x + 4x^2\}$
(b) $\{1 + 2x + x^2, 3 + x^2, x + x^2\}$
(c) $\{1 + 4x - 2x^2, -2 + 3x - x^2, -3 - 12x + 6x^2\}$
(d) $\{-1 + 2x + 4x^2, 3 - 4x - 10x^2, -2 - 5x - 6x^2\}$

(e) $\{1 + 2x - x^2, 4 - 2x + x^2, -1 + 18x - 9x^2\}$

Solución.

Al igual que en el problema anterior, todo se reduce a determinar cuáles de esos subconjuntos de $P_2(\mathbb{R})$ son linealmente independientes.

(a) Supongamos que se cumple que a_1, a_2 y a_3 son escalares tales que

$$a_1(-1 - x + 2x^2) + a_2(2 + x - 2x^2) + a_3(1 - 2x + 4x^2) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2.$$

La igualdad anterior se puede reescribir de la siguiente manera

$$(2a_1 - 2a_2 + 4a_3)x^2 + (-a_1 + a_2 - 2a_3)x + (-a_1 + 2a_2 + a_3) = 0.$$

Esta igualdad implica que a_1 a_2 y a_3 deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2a_1 & -2a_2 & +4a_3 & = & 0 \\ -a_1 & + \ a_2 & -2a_3 & = & 0 \\ -a_1 & +2a_2 & + \ a_3 & = & 0 \end{cases}$$

Utilizando el método que se empleó en los ejercicios de la sección IV se obtiene que el conjunto solución del sistema anterior es infinito. Ergo, este conjunto de vectores no es linealmente independiente y, consecuentemente, no es una base para $P_2(\mathbb{R})$.

(b) Supongamos que a_1, a_2 y a_3 son escalares tales que se satisface la siguiente igualdad

$$a_1(1 + 2x + x^2) + a_2(3 + x^2) + a_3(x + x^2) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2.$$

La igualdad anterior nos conduce a plantear el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1 & + \ a_2 & +a_3 & = & 0 \\ 2a_1 & & +a_3 & = & 0 \\ a_1 & +3a_2 & & = & 0 \end{cases}$$

Al aplicar nuevamente el método, obtenemos que la única solución a este sistema es la trivial; esto nos indica que el conjunto $\{1 + 2x + x^2, 3 + x^2, x + x^2\}$ sí es linealmente independiente y por lo tanto sí es una base para $P_2(\mathbb{R})$.

Los incisos faltantes se resuelven de manera similar.

(c) El conjunto no es siquiera un subconjunto de $P_2(\mathbb{R})$ linealmente independiente.

(d) En este caso, el conjunto dado sí es una base de $P_2(\mathbb{R})$.

(e) El conjunto no es siquiera un subconjunto de $P_2(\mathbb{R})$ linealmente independiente.

4. ¿Generan los polinomios $x^3 - 2x^2 + 1, 4x^2 - x + 3$ y $3x - 2$ a $P_3(\mathbb{R})$? Justifique su respuesta.

Solución.
No, pues de acuerdo con el Corolario 4 del Teorema 1.11 cualquier conjunto finito que genere a un espacio vectorial de dimensión 4 debe constar exactamente de 4 elementos.

---

5. ¿Es $\{(1,4,-6),(1,5,8),(2,1,1),(0,1,0)\}$ un subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^3$? Justifique su respuesta.

Solución.
No, pues $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3 y, de acuerdo con el Corolario 2 del Teorema 1.11, cualquier subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial de dimensión 3 contiene como máximo 3 elementos.

---

6. Dar tres bases diferentes para $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Solución.
La base canónica de $\mathbb{R}^2$ es la siguiente

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para generar nuevas bases en $\mathbb{R}^2$ nos podemos ayudar del ejercicio V.**9**-(a) (donde se demostró que el subconjunto $\{u,v\}$ del espacio vectorial V es linealmente independiente si y solo si $\{u+v,u-v\}$ es linealmente independiente). Ese ejercicio nos permite garantizar que

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

son otras dos bases para $\mathbb{R}^2$.

En $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ la base estándar es

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Considerando múltiplos escalares de los elementos de esa base podemos producir otras bases del espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

---

7. Los vectores $x_1 = (2, -3, 1), x_2 = (1, 4, -2), x_3 = (-8, 12, -4), x_4 = (1, 37, -17)$ y $x_5 = (-3, -5, 8)$ generan a $\mathbb{R}^3$. Encontrar un subconjunto de $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ que sea una base para $\mathbb{R}^3$.

Solución.

Para empezar, selecciónese cualquier elemento no nulo del conjunto generatriz, digamos x_1, como uno de los elementos de la base. Como $-4x_1 = x_3$, el conjunto $\{x_1, x_3\}$ es linealmente dependiente (cf. ejercicio V.**6**) y, por lo tanto, x_3 no puede ser incluido en la base. Además, como x_2 no es múltiplo escalar de x_1 y $-3x_1 + 7x_2 = x_4$, entonces x_4 tampoco puede ser incluido en la base (pero x_2 sí). Finalmente, al tenerse que $x_5 \notin L(\{x_1, x_2\})$, se sigue que $\{x_1, x_2, x_5\}$ es linealmente independiente. Puesto que $\{x_1, x_2, x_5\}$ tiene el cardinal adecuado se concluye que es una base para $\mathbb{R}^3$.

---

8. Sea V el espacio vectorial que consta de todos los vectores de $\mathbb{R}^5$ para los cuales la suma de las coordenadas es cero. Los vectores

$$x_1 = (2, -3, 4, -5, 2), x_2 = (-6, 9, -12, 15, -6), x_3 = (3, -2, 7, -9, 1), x_4 = (2, -8, 2, -2, 6)$$

$$x_5 = (-1, 1, 2, 1, -3), x_6 = (0, -3, -18, 9, 12), x_7 = (1, 0, -2, 3, -2), x_8 = (2, -1, 1, -9, 7)$$

generan a V. Encontrar un subconjunto de $\{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$ que sea una base para V.

Solución.

En este conjunto generatriz, vamos a seleccionar un elemento no nulo, digamos x_1, como uno de los elementos de la base. Como $-3x_1 = x_2$, el conjunto $\{x_1, x_2\}$ es linealmente dependiente (cf. ejercicio V.**6**) y, por lo tanto, x_2 no puede ser incluido en nuestra base. Como x_3 no es múltiplo de x_1 y viceversa, el conjunto $\{x_1, x_3\}$ es linealmente independiente y, por lo tanto, x_3 puede ser incluido en la base. Para decidir si al agregar el vector x_4 al conjunto $\{x_1, x_3\}$ el nuevo conjunto sigue siendo linealmente independiente, lo único que se tiene que determinar es si x_4 pertenece o no a $L(\{x_1, x_3\})$. Puesto que

$$x_4 = 4x_1 - 2x_3,$$

se sigue que el conjunto $\{x_1, x_3, x_4\}$ no es linealmente independiente. Lo que se hace a continuación es determinar si al agregar el vector x_5 al conjunto $\{x_1, x_3\}$ se obtiene un conjunto linealmente independiente. Puede verse que $x_5 \notin L(\{x_1, x_3\})$. De esto se sigue que el conjunto $\{x_1, x_3, x_5\}$ sí es linealmente independiente. Nuevamente, para decidir si al agregar el vector x_6 al conjunto $\{x_1, x_3, x_5\}$ el nuevo conjunto sigue siendo linealmente independiente, lo único que se tiene que determinar es si x_6 pertenece o no a $L(\{x_1, x_3, x_5\})$. En vista de que

$$x_6 = x_1 - 2x_3 - 4x_5,$$

se sigue que el conjunto $\{x_1, x_3, x_5, x_6\}$ no es linealmente independiente. Determinaremos ahora si al unir $\{x_7\}$ con $\{x_1, x_3, x_5\}$ se obtiene un conjunto linealmente independiente. No resulta difícil convencerse de que $x_7 \notin L(\{x_1, x_3, x_5\})$. De esto y del hecho de que $\dim(V) = 4$, concluimos que $\{x_1, x_3, x_5, x_7\}$ es una base para V.

---

9. Los vectores $x_1 = (1, 1, 1, 1), x_2 = (0, 1, 1, 1), x_3 = (0, 0, 1, 1)$ y $x_4 = (0, 0, 0, 1)$ forman una base para F^4. Encontrar la única representación de un vector arbitrario (a_1, a_2, a_3, a_4) en F^4 como combinación lineal de los vectores x_1, x_2, x_3 y x_4.

Solución.

Si suponemos que $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$ son tales que

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3, a_4) &= \alpha(1, 1, 1, 1) + \beta(0, 1, 1, 1) + \gamma(0, 0, 1, 1) + \delta(0, 0, 0, 1)\\ &= (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma + \delta)\end{aligned}$$

entonces $\alpha = a_1$, $\beta = a_2 - a_1$, $\gamma = a_3 - a_2$ y $\delta = a_4 - a_3$. Se concluye así que si (a_1, a_2, a_3, a_4) es un vector arbitrario de F^4 entonces

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1(1, 1, 1, 1) + (a_2 - a_1)(0, 1, 1, 1) + (a_3 - a_2)(0, 0, 1, 1) + (a_4 - a_3)(0, 0, 0, 1).$$

---

10. Sea

$$V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \qquad W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in V \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

y

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} \in V : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios de V y encontrar las dimensiones de W_1, W_2, $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$.

Solución.

Recordemos que para que un suconjunto W de un espacio vectorial V sea subespacio debe cumplir las tres condiciones siguientes:

(a) $0_V \in W$.

(b) Si $u, v \in W$ entonces $u + v \in W$.

(c) Si $\alpha \in F$ y $u \in W$ entonces $\alpha u \in W$.

Mostraremos a continuación que W_1 satisface esas tres condiciones. Puesto que $0_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces se cumple que $0_V \in W_1$. Esto establece la condición (a) para W_1. Supongamos ahora que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & a' \end{pmatrix} \in W_1$. Entonces $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & a + a' \end{pmatrix}$ también pertenece a W_1, pues claramente sus entradas satisfacen la condición que define a los elementos de W_1: esto nos indica que W_1 cumple la condición (b). Por último, sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in W_1$. Dado que

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha a \end{pmatrix} \in W_1,$$

tenemos que W_1 satisface la condición (c). De todo lo anterior podemos concluir que W_1 sí es un subespacio de V. La demostración de que W_2 también es subespacio de V es completamente análoga.

Calculemos la dimensión de W_1. Puesto que para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces se sigue que

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq W_1$$

genera a W_1. Además, puede verse fácilmente que $\mathcal{B}$ es un subconjunto de W_1 que es linealmente independiente. Concluimos de todo esto que

$$\dim(W_1) = 3.$$

Calculemos ahora la dimensión de W_2. Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Notemos que en este caso

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

esto nos indica que una base para W_2 es

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

De esto se desprende que

$$\dim(W_2) = 2.$$

Para determinar la dimensión de $W_1 \cap W_2$, observemos en primer lugar que

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W_1 \text{ y } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W_2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : a = d, a = 0, c = -b \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \in V : b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in V : b \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

En consecuencia, una base para $W_1 \cap W_2$ es

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por lo tanto, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Finalmente,

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

---

11. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea un S un subconjunto de V que genera a V.

(a) Demostrar que S contiene al menos n elementos.
(b) Demostrar que un subconjunto de S es base para V. (Tenga cuidado de no suponer que S sea finito.)

Solución.

(a) Supongamos que $|S| < n$. En tal caso, el Teorema 1.10 nos permite garantizar la existencia de una base S_0 de V contenida en S. Como cualesquiera dos bases de un espacio vectorial han de tener el mismo número de elementos entonces se tiene que

$$\dim(V) = n = |S_0| \leqslant |S| < n,$$

lo cual es decididamente absurdo y la validez del aserto en cuestión se sigue.

(b) Supóngase que $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V. Puesto que $L(\mathcal{B}) = V$ entonces existen $s_{11}, s_{21}, \ldots, s_{n1}, \ldots, s_{1n}, s_{2n}, \ldots, s_{nn} \in S$ y escalares $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{nn}$ tales que

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & \alpha_{11}s_{11} + \alpha_{21}s_{21} + \ldots + \alpha_{n1}s_{n1} \\ \vdots & = & \vdots \\ v_n & = & \alpha_{1n}s_{1n} + \alpha_{2n}s_{2n} + \ldots + \alpha_{nn}s_{nn}. \end{array}$$

Claramente se cumple que $\mathcal{B} \subseteq L(\{s_{11}, s_{21}, \ldots, s_{n1}, \ldots, s_{1n}, s_{2n}, \ldots, s_{nn}\})$; de esto y el ejercicio IV.**11** se desprende que $\{s_{11}, s_{21}, \ldots, s_{n1}, \ldots, s_{1n}, s_{2n}, \ldots, s_{nn}\}$ es un conjunto finito que genera a V. Apelando nuevamente al Teorema 1.10 podemos concluir que existe $S_0 \subseteq \{s_{11}, s_{21}, \ldots, s_{n1}, \ldots, s_{1n}, s_{2n}, \ldots, s_{nn}\} \subseteq S$ que es base para V.

---

12. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V de dimensiones m y n, respectivamente, donde $m \geqslant n$. Demostrar que $\dim(W_1 \cap W_2) \leqslant n$ y que $\dim(W_1 + W_2) \leqslant m + n$. Dar ejemplos de subespacios de $\mathbb{R}^3$ donde cada desigualdad se convierte en igualdad.

Solución.

La desigualdad $\dim(W_1 \cap W_2) \leqslant n$ es una consecuencia inmediata del hecho de que $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de W_2. Por otra parte, la desigualdad $\dim(W_1 + W_2) \leqslant m + n$ se desprende del Teorema 1.13: de acuerdo con ese teorema

$$\begin{array}{rcl} \dim(W_1 + W_2) & = & \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) \\ & = & m + n - \dim(W_1 \cap W_2) \\ & \leqslant & m + n. \end{array}$$

La igualdad $\dim(W_1 \cap W_2) = n$ se cumple, por ejemplo, cuando $V = \mathbb{R}^n$, $W_1 = \mathbb{R}^n$ y $W_2 = \{0_V\}$ pues en este caso se cumple incluso que $W_1 \cap W_2 = W_2$.

La igualdad $\dim(W_1 + W_2) = m + n$ se cumple siempre que $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$. Por ejemplo, si $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = L(\{(0, 1)\})$ y $W_2 = L(\{(1, 0)\})$ entonces $W_1 + W_2 = V$ y, en consecuencia,

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(V) = 2 = 1 + 1 = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

---

13. Sea $\{x, y\}$ una base de un espacio vectorial V. Mostrar que tanto $\{x+y, x-y\}$ como $\{ax, by\}$ son bases para V, donde a y b son escalares arbitrarios no nulos.

Solución.
Como $\{x, y\}$ es un subconjunto linealmente independiente de V entonces, apelando al ejercicio V.**9**(a), se obtiene que $\{x + y, x - y\}$ también es un subconjunto linealmente independiente de V. Puesto que $\dim(V) = 2$, el Corolario 1 del Teorema 1.11 nos permite concluir que $\{x + y, x - y\}$ es una base para V.

Del Corolario 1 previamente invocado se sigue también que, para demostrar que $\{ax, by\}$ es base de V, lo único que hay que demostrar es que $\{ax, by\}$ es un subconjunto linealmente independiente de V: supongamos para tal fin que α y β son escalares tales que

$$\alpha(ax) + \beta(by) = 0.$$

Como $\{x, y\}$ es un subconjunto linealmente independiente de V, de la igualdad anterior se desprende que $0 = \alpha \cdot a = \beta \cdot b$. Al ser a y b escalares no nulos, estas igualdades nos permiten concluir a su vez que $\alpha = 0 = \beta$. Consecuentemente, $\{ax, by\}$ sí es un subconjunto linealmente independiente de V.

---

14. Suponer que V es un espacio vectorial con base $\{x_1, x_2, x_3\}$. Demostrar que $\{x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_3\}$ también es una base para V.

Solución.
Al igual que en la primera parte del ejercicio anterior, todo se reduce a demostrar que $\{x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_3\}$ es un subconjunto linealmente independiente de V. Supongamos que α,β y γ son escalares tales que

$$\alpha(x_1 + x_2 + x_3) + \beta(x_2 + x_3) + \gamma x_3 = 0.$$

Claramente esa igualdad se puede reescribir de la siguiente forma

$$\alpha x_1 + (\alpha + \beta)x_2 + (\alpha + \beta + \gamma)x_3 = 0.$$

De la igualdad anterior y la independencia lineal del conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$ se sigue que $\alpha = \beta = \gamma = 0$: podemos concluir así que $\{x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_3\}$ sí es un subconjunto linealmente independiente de V y la demostración termina.

---

15. El conjunto de soluciones para el sistema

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Encontrar una base para este subespacio.

Solución.
No resulta difícil convencerse de que si W es el conjunto de soluciones del sistema dado, entonces

$$\begin{aligned} W &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\} \\ &= \{(x_3, x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_3(1, 1, 1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Puesto que cualquier vector en W es un múltiplo escalar del vector $(1, 1, 1)$, concluimos que una base para el subespacio en cuestión es

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1)\}.$$

---

16. Encontrar bases para los siguientes subespacios de F^5:

$$W_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in F^5 \mid a_1 - a_3 - a_4 = 0\}$$

y

$$W_2 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in F^5 \mid a_2 = a_3 = a_4 = 0, a_1 + a_5 = 0\}.$$

¿Cuáles son las dimensiones de W_1 y W_2?

Solución.
Puesto que

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in F^5 \mid a_1 = a_3 + a_4\} \\ &= \{(a_3 + a_4, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid a_2, a_3, a_4, a_5 \in F\} \\ &= \{(a_3, 0, a_3, 0, 0) + (a_4, 0, 0, a_4, 0) + (0, a_2, 0, 0, 0) + (0, 0, 0, 0, a_5) \mid a_2, a_3, a_4, a_5 \in F\}, \end{aligned}$$

entonces tenemos que una base para W_1 es

$$\{(1,0,1,0,0),(1,0,0,1,0),(0,1,0,0,0),(0,0,0,0,1)\}$$

y, en consecuencia, $\dim(W_1) = 4$.

Por otra parte, como

$$\begin{aligned} W_2 &= \{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) \in F^5 \mid a_2 = a_3 = a_4, a_5 = -a_1\} \\ &= \{(a_1,a_2,a_2,a_2,-a_1) \mid a_1,a_2 \in F\} \\ &= \{(a_1,0,0,0,-a_1) + (0,a_2,a_2,a_2,0) \mid a_1,a_2 \in F\} \end{aligned}$$

se sigue que una base para W_2 está dada por

$$\{(1,0,0,0,-1),(0,1,1,1,0)\}.$$

Por consiguiente, $\dim(W_2) = 2$.

---

17. El conjunto de todas las matrices de $n \times n$ cuya traza es igual a cero es un subespacio W de $\mathcal{M}_{n\times n}(F)$. Encontrar una base para W. ¿Cuál es la dimensión de W?

Solución.
Abordaremos el caso cuando $n = 3$. Entendiendo bien este caso, resultará claro cómo abordar y responder el problema en forma general.

Si $A \in W$ entonces las entradas en la diagonal de A están sometidas a la restricción

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0.$$

De esto y del hecho que no hay restricciones esenciales sobre los elementos fuera de la diagonal de A se sigue que un conjunto de matrices de W que es candidato a ser base de W es

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{M}^{21}, \mathbf{M}^{31}, \mathbf{M}^{32}, \mathbf{M}^{12}, \mathbf{M}^{13}, \mathbf{M}^{23} \right\}$$

donde con $\mathbf{M}^{ij}$ denotamos a la matriz cuya única entrada distinta de 0 es igual a 1 y se encuentra en la i-ésima fila y j-ésima columna. No resulta difícil convencerse de que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente: además, puesto que para cada $A \in W$ se tiene que

$$A = A_{21}\mathbf{M}^{21} + A_{31}\mathbf{M}^{31} + A_{32}\mathbf{M}^{32} + A_{12}\mathbf{M}^{12} + A_{13}\mathbf{M}^{13} + A_{23}\mathbf{M}^{23} + A_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + A_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

se sigue que $\mathcal{B}$ genera a W. De todo lo anterior se desprende que $\mathcal{B}$ es una base del subespacio W y que $\dim(W) = 3^2 - 1$.

---

18. El conjunto de todas las matrices triangulares superiores de $n \times n$ es un subespacio de W de $\mathcal{M}_{n\times n}(F)$. (Ver ejercicio III.**12**.) Encontrar una base para W. ¿Cuál es la dimensión de W?

Solución.
La base más sencilla que puede proponerse para el subespacio de las matrices triangulares superiores de $n \times n$ es

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{M}^{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\},$$

donde $\mathbf{M}^{ij} \in W$ es la matriz cuya única entrada distinta de 0 es igual a 1 y se encuentra en la i-ésima fila y j-ésima columna. De esto se sigue que

$$\dim(W) = |\mathcal{B}| = |\{(i, j) \mid 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}| = n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

---

19. El conjunto de todas las matrices antisimétricas de $n \times n$ es un subespacio W de $\mathcal{M}_{n\times n}(F)$. (Ver ejercicio III.**25**.) Encontrar una base para W. ¿Cuál es la dimensión de W?

Solución.
Lo primero que se observa es que las entradas en la diagonal de cualquier matriz antisimétrica son todas iguales a 0. Luego, para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ denotemos con M^{ij} a la matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(F)$ cuyas entradas son todas cero con excepción de la entrada en la i-ésima fila y j-ésima columna, la cual es igual a 1, y la entrada en la j-ésima fila e i-ésima columna, la cual es igual a -1. De la mera definición de las matrices M^{ij} se sigue

$$B = \{\mathrm{M}^{ij} \mid 2 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j < i\}$$

es una base del subespacio W. Consecuentemente,

$$\dim(W) = |B| = |\{(i, j) \mid 2 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j < i\}| = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

20.

(a) Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V tales que $V = W_1 \oplus W_2$. Si β_1 y β_2 son bases para W_1 y W_2, respectivamente, demostrar que $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$ y que $\beta_1 \cup \beta_2$ es una base para V.

(b) Recíprocamente, sean β_1 y β_2 bases disjuntas para subespacios W_1 y W_2, respectivamente, de un espacio vectorial V. Demostrar que si $\beta_1 \cup \beta_2$ es una base para V, entonces $V = W_1 \oplus W_2$.

Solución.

(a) Como β_1 es base de W_1 y β_2 es base de W_2, entonces $\beta_1 \cap \beta_2 \subseteq W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Luego, si $\beta_1 \cap \beta_2 \neq \emptyset$ entonces $\beta_1 \cap \beta_2 = \{0\}$: esto último implica que $0 \in \beta_1$, lo cual es un absurdo. Probaremos a continuación que $\beta_1 \cup \beta_2$ es base de V. Sea $v \in V$. Dado que $V = W_1 \oplus W_2$, podemos garantizar la existencia de $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$. Ahora bien, como β_1 y β_2 son bases de W_1 y W_2, respectivamente, entonces

$$v = w_1 + w_2 \in L(\beta_1) + L(\beta_2) = L(\beta_1 \cup \beta_2),$$

donde la última igualdad en el renglón anterior está justificada por el ejercicio IV.**12**. Se ha establecido así que $\beta_1 \cup \beta_2$ genera a V. Resta mostrar que $\beta_1 \cup \beta_2$ es un subconjunto de V que es linealmente independiente: esto lo haremos mediante *reductio*. Si $\beta_1 \cup \beta_2$ fuera linealmente dependiente entonces existirían $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \beta_1 \cup \beta_2$ y escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **no todos cero** tales que

$$0 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Como hemos probado ya que $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$, se sigue que la suma que aparece a la derecha de la igualdad previa puede reescribirse como $\sum_{x_k \in \beta_1} a_kx_k + \sum_{x_\ell \in \beta_2} a_\ell x_\ell$. De esto y la igualdad se desprende que

$$\sum_{x_k \in \beta_1} a_kx_k = -\sum_{x_\ell \in \beta_2} a_\ell x_\ell,$$

lo cual implica a su vez que $\sum_{x_k \in \beta_1} a_kx_k, \sum_{x_\ell \in \beta_2} a_\ell x_\ell \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Así, de

$$\begin{aligned} \sum_{x_k \in \beta_1} a_kx_k &= 0, \\ \sum_{x_\ell \in \beta_2} a_\ell x_\ell &= 0 \end{aligned}$$

y el hecho de que β_i es un subconjunto linealmente independiente de W_i, se colige que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Lo anterior en contradicción con el supuesto inicial hecho sobre los escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y con ello concluimos nuestra demostración de la independencia lineal de $\beta_1 \cup \beta_2$.

(b) De la hipótesis de que $\beta_1 \cup \beta_2$ es base de V resulta fácil deducir que $V = W_1 + W_2$. Lo único que habría que establecer cuidadosamente entonces es que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Supongamos que $x \in W_1 \cap W_2$. Existen entonces escalares $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ y vectores $x_1, \ldots, x_n \in \beta_1$ y $y_1, \ldots, y_m \in \beta_2$ tales que

$$x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m.$$

De lo anterior se desprende que

$$0 = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + (-b_1) y_1 + \cdots + (-b_m) y_m.$$

Luego, al tenerse que $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$ y que $\beta_1 \cup \beta_2$ es una base de V, la igualdad de arriba implica que que $a_1 = \cdots = a_n = b_1 = \cdots b_m = 0$. De esto se sigue que

$$x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

y la demostración termina.

---

21. Completar la demostración del Teorema 1.9.

Solución.

Sea $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots x_n\} \subseteq V$ y supongamos que cada $y \in V$ se puede expresar de manera única como una combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$. Se cumple entonces que $\mathcal{B}$ genera a V; además, si $a_1, \ldots, a_n \in F$ son tales que

$$0_V = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

entonces se tiene necesariamente que $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Así pues, $\mathcal{B}$ es también un subconjunto de V que es linealmente independiente. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base para V.

---

22. Sea W un subespacio de un espacio vectorial dimensionalmente finito V. Determinar la dimensión del espacio vectorial V/W, el espacio cociente de V módulo W. (Cf. ejercicio III.**29**.) Justifique su respuesta.

Solución.

Supongamos que $\{w_1, \ldots, w_k\}$ es una base del subespacio W. El Corolario del Teorema 1.12 nos permite garantizar la existencia de vectores $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n \in V \setminus W$ tales que

$$\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$$

es una base para V. Afirmamos que el conjunto

$$\mathfrak{B} = \{v_{k+1} + W, \ldots, v_n + W\}$$

es una base del espacio cociente V/W.

Que $\mathfrak{B}$ genera a V/W es claro pues si $v \in V$ entonces existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$v = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} v + W &= (\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n) + W \\ &= (\alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n) + W \\ &= (\alpha_{k+1} v_{k+1} + W) + \cdots + (\alpha_n v_n + W) \\ &= \alpha_{k+1}(v_{k+1} + W) + \cdots + \alpha_n(v_n + W). \end{aligned}$$

Demostraremos a continuación que $\mathfrak{B}$ es un subconjunto de V/W que es linealmente independiente. Supongamos para tal fin que $a_{k+1}, \ldots, a_n$ son escalares tales que

$$\begin{aligned} 0_V + W &= a_{k+1}(v_{k+1} + W) + \cdots + a_n(v_n + W) \\ &= (a_{k+1} v_{k+1} + W) + \cdots + (a_n v_n + W) \\ &= (a_{k+1} v_{k+1} + \cdots + a_n v_n) + W; \end{aligned}$$

de lo anterior y el ejercicio III.**29**-(b) se desprende que $a_{k+1} v_{k+1} + \cdots + a_n v_n \in W$. Luego, al tenerse que

$$\{w_1, \ldots, w_k\}$$

es una base de W, podemos garantizar la existencia de escalares $c_1, \ldots, c_k$ tales que

$$a_{k+1} v_{k+1} + \cdots + a_n v_n = c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k.$$

Si al menos uno de los escalares $a_{k+1}, \ldots, a_n$ fuera distinto de 0, la igualdad anterior entraría en contradicción con el hecho de que $\mathcal{B}$ es base de V. En consecuencia, $a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$ y la independencia lineal de $\mathfrak{B}$ se sigue.

De todo el análisis previo se concluye que

$$\dim(V/W) = n - k = \dim(V) - \dim(W).$$

---

23. Encontrar una base para el espacio vectorial de sucesiones no nulas en un campo F.

Solución.

Denotemos con A_k a la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ en la que $a_k = 1$ y $a_n = 0$ para cada $n \neq k$. Afirmamos que $\mathcal{B} = \{A_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ es una base para el espacio vectorial V de sucesiones finitas no nulas en F. $\mathcal{B}$ genera a V: en efecto, pues si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión finita no nula en V entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$N = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

y se cumple entonces que

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_NA_N.$$

Esto implica que $L(\mathcal{B}) = V$. Mostraremos a continuación que $\mathcal{B}$ es un subconjunto de V que es linealmente independiente. Esto lo podemos hacer mediante reducción al absurdo. Supongamos que existen $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_k} \in \mathcal{B}$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ **no todos cero** tales que

$$0_V = \alpha_1A_{n_1} + \alpha_2A_{n_2} + \cdots + \alpha_kA_{n_k}.$$

De esta igualdad se desprende que si j es el menor número natural que $\alpha_j \neq 0$, entonces el término j-ésimo de la sucesión $\alpha_1A_{n_1} + \alpha_2A_{n_2} + \cdots + \alpha_kA_{n_k}$ es precisamente α_j, mientras que el término en esa posición en la sucesión 0_V es 0. Esto indica que $\alpha_j = 0$, lo cual es absurdo en vista de la manera en que j fue elegido. De todo el análisis previo se concluye que $\mathcal{B}$ es una base para V.

---

24. Demostrar que si W_1 es un subespacio cualquiera de un espacio vectorial dimensionalmente finito V, entonces existe un subespacio W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$.

Solución.

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para W_1. Por el Corolario al Teorema 1.12 sabemos que existe una base $\mathcal{B}'$ de V tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. Luego, si $\mathcal{B}'\backslash\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ y $W_2 = L(\mathcal{B}'\backslash\mathcal{B})$, entonces afirmamos que:

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

En primer lugar, se cumple que

$$\begin{aligned} V = L(\mathcal{B}') &= L(\mathcal{B} \cup (\mathcal{B}'\backslash\mathcal{B})) \\ &= L(\mathcal{B}) + L(\mathcal{B}'\backslash\mathcal{B}) \\ &= W_1 + W_2. \end{aligned}$$

Así, para poder concluir que $V = W_1 \oplus W_2$ lo único que hace falta es verificar que $W_1 \cap W_2 \subseteq \{0\}$. Sea $x \in W_1 \cap W_2$. Entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n. \tag{20}$$

Por otro lado, como $x \in W_2$ entonces existen escalares $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ tales que

$$x = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \cdots + \gamma_k u_k. \tag{21}$$

De (20) y (21) se sigue que

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n - \gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2 - \cdots - \gamma_k u_k.$$

Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_k\} = \mathcal{B}'$ es una base para V entonces

$$0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_k.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \\ &= 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n \\ &= 0, \end{aligned}$$

que es justamente lo que deseabamos obtener.

---

25. Demostrar que un espacio vectorial es dimensionalmente infinito si y solo si contiene un subconjunto infinito linealmente independiente.

Solución.

Si V es un espacio vectorial dimensionalmente infinito entonces V tiene una base $\mathcal{B}$ que no es finita. En tal caso, $\mathcal{B}$ brinda, de acuerdo con la definición de base, un ejemplo de un subconjunto infinito de V que es linealmente independiente. Recíprocamente, si un espacio vectorial V posee un subconjunto infinito B que es linealmente independiente entonces V no puede ser dimensionalmente finito pues, en caso contrario, el Corolario 2 del Teorema 1.11 nos permitiría afirmar que

$$|B| \leqslant \dim(V) < \infty.$$

Lo anterior entra en contradicción con la infinitud de B y la validez del aserto en cuestión se sigue.

Apéndice

Teorema 1.1. (Ley de la cancelación para la suma vectorial) Si x, y y z son elementos de un espacio vectorial V tal que $x + z = y + z$, entonces $x = y$.

Corolario 1. El vector cero es único.

Corolario 2. El inverso aditivo de un vector es único.

Teorema 1.2. En cualquier espacio vectorial V son verdaderos los siguientes enunciados:

(a) $0x = 0$ para toda $x \in V$.
(b) $(-a)x = -(ax)$ para toda $a \in F$ y toda $x \in V$.
(c) $a0 = 0$ para toda $a \in F$.

Teorema 1.3. Sean V un espacio vectorial y W un subconjunto de V. Entonces, W es un subespacio de V si y solo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

(a) $0 \in W$.
(b) $x + y \in W$ siempre que $x \in W$ y $y \in W$.
(c) $ax \in W$ siempre que $a \in F$ y $x \in W$.

Teorema 1.4. Cualquier intersección de subespacios de un espacio vectorial V es un subespacio.

Teorema 1.5. Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial V, entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio de V.

Corolario. La suma de cualquier número finito de subespacios de V es un subespacio de V.

Teorema 1.6. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Entonces, V es la suma directa de W_1 y W_2 si y solo si cada elemento de V puede ser escrito de manera única como $x_1 + x_2$ donde $x_1 \in W_1$ y $x_2 \in W_2$.

Teorema 1.7. Si S es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V, entonces el conjunto W integrado por todas las combinaciones lineales de elementos de S es el subespacio de V más pequeño que contiene a S.

Teorema 1.8. Sea V un espacio vectorial y sean $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. Si S_1 es linealmente dependiente entonces S_2 también lo es.

Corolario. Sea V un espacio vectorial y sean $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. Si S_2 es linealmente independiente entonces S_1 también lo es.

Teorema 1.9. Sean V un espacio vectorial y $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un subconjunto de V. Luego, β es una base de V si y solo si cada vector $y \in V$ puede ser expresado de manera única como una combinación lineal de vectores de β, es decir, puede ser expresado en la forma

$$y = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

para escalares únicos $a_1, \ldots, a_n$.

Lema. Sea S un subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial V y sea x un elemento que no está en S. Luego, $S \cup \{x\}$ es linealmente dependiente si y solo si $x \in L(S)$.

Teorema 1.10. Si un espacio vectorial V es generado por un conjunto finito S_0, entonces un subconjunto de S_0 es una base para V. Por lo tanto, V tiene una base finita.

Teorema 1.11. Sea V un espacio vectorial que tiene una base β con exactamente n elementos. Sea $S = \{y_1, \ldots, y_m\}$ un subconjunto linealmente independiente de V que contiene exactamente m elementos, donde $m \leqslant n$. Entonces, existe un subconjunto S_1 de β que contiene exactamente $n - m$ elementos tales que $S \cup S_1$ genera a V.

Corolario 1. Sea V un espacio vectorial que tiene una base β que contiene exactamente n elementos. Entonces, cualquier subconjunto linealmente independiente de V que contiene exactamente n elementos es una base de V.

Corolario 2. Sea V un espacio vectorial que tiene una base β con exactamente n elementos. Entonces, cualquier subconjunto de V que contiene más de n elementos es linealmente dependiente. Consecuentemente, cualquier subconjunto de V linealmente independiente contiene como máximo n elementos.

Corolario 3. Sea V un espacio vectorial que tiene una base β con exactamente n elementos. Entonces, toda base para V contendrá exactamente n elementos.

Corolario 4. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea S un subconjunto de V que genera a V y que contiene como máximo n elementos. Entonces S es una base para V y, por lo tanto, contiene exactamente n elementos.

Corolario 5. Sea β una base de un espacio vectorial V de dimensión n y sea S un subconjunto linealmente independiente de V que contiene m elementos. Entonces, existe un subconjunto S_1 de β tal que $S \cup S_1$ es una base de V.

Teorema 1.12. Sea W un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión n. Entonces, W es dimensionalmente finito y $\dim(W) \leqslant n$. Además, si $\dim(W) = n$, entonces $W = V$.

Corolario. Si W es un subespacio de un espacio vectorial V dimensionalmente finito, entonces W tiene una base finita y cualquier base para W es un subconjunto de una base para V.

Teorema 1.13. Sean W_1 y W_2 subespacios dimensionalmente finitos de un espacio vectorial V. Entonces, $W_1 + W_2$ es dimensionalmente finito y

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Corolario. Sean W_1 y W_2 subespacios dimensionalmente finitos de un espacio vectorial V tales que $V = W_1 + W_2$. Luego, V es la suma directa de W_1 y W_2 si y solo si

$$\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

Bibliografía

[1] S. H. Friedberg, A. J. Insel y L. E. Spence. *Álgebra lineal* (Traducción al español de la primera edición en inglés). Publicaciones Cultural, S.A., México, 1982. ISBN: 9684391978 | 9789684391970.

[2] S. H. Friedberg, A. J. Insel y L. E. Spence. *Linear algebra.* Fourth edition, Prentice-Hall, USA, 2003. ISBN: 0-13-008451-4.