Mosaicos y funciones complejas

Jesús Muciño Raymundo

muciray@matmor.unam.mx
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM Campus Morelia

Láminas en colaboración con Roberto Gutiérrez Soto

•

XIX Escuela de Verano en Matemáticas
24–28 Junio 2019

La Escuela tiene asistencia y participación.

Método de participación.
Enviar un mensaje a

muciray@matmor.unam.mx

el asunto/titulo (subject) del mensaje debe ser

polinomios-complejos Mi-Nombre-Mi-Apellido.

El mensaje debe contener: de entre 5 y 10 renglones, explicando en tus propias palabras alguna característica de un ejemplo del curso. Yo contestare los mensajes, preguntando en cada caso, lo que no me quede claro.

La fecha límite es;
24 hrs., tiempo de Morelia, del 7 de agosto.

La dirección para la descarga

- de las notas,
- del listado de ejercicios propuestos,

es:

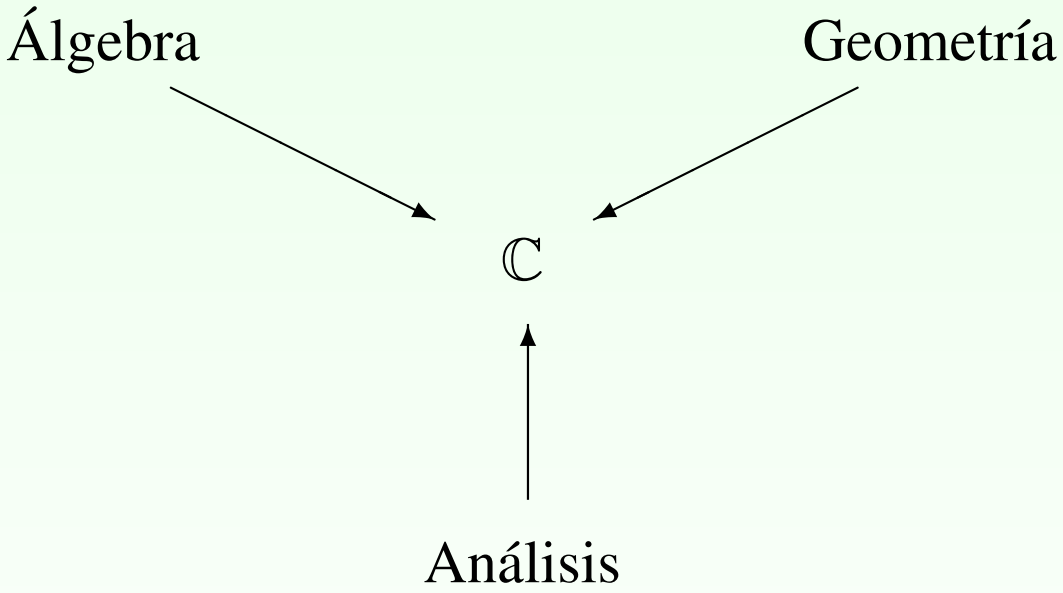
`https://drive.google.com/drive/folders/...`

Índice

- Polinomios reales y complejos, pág. **5**.
- Teselaciones de grado 2, 3 y 4, pág. **25**.
- El Teorema (principal) de existencia de teselaciones, pág. **73**.
- ¿Qué significa la forma de un polinomio?, pág. **85**.
- Bosquejo de la prueba del Teorema principal (Schwarz–Klein), pág. **90**.
- Teselaciones para funciones holomorfas, pág. **99**.
- Referencias, pág. **111**.

¿Los números complejos $\mathbb{C}$ son bonitos o feos?

¿ . . . son amigables o repelentes?



En $\mathbb{C}$ las tres grandes ramas de las matemáticas confluyen.

¿Cómo hacemos matemáticas?

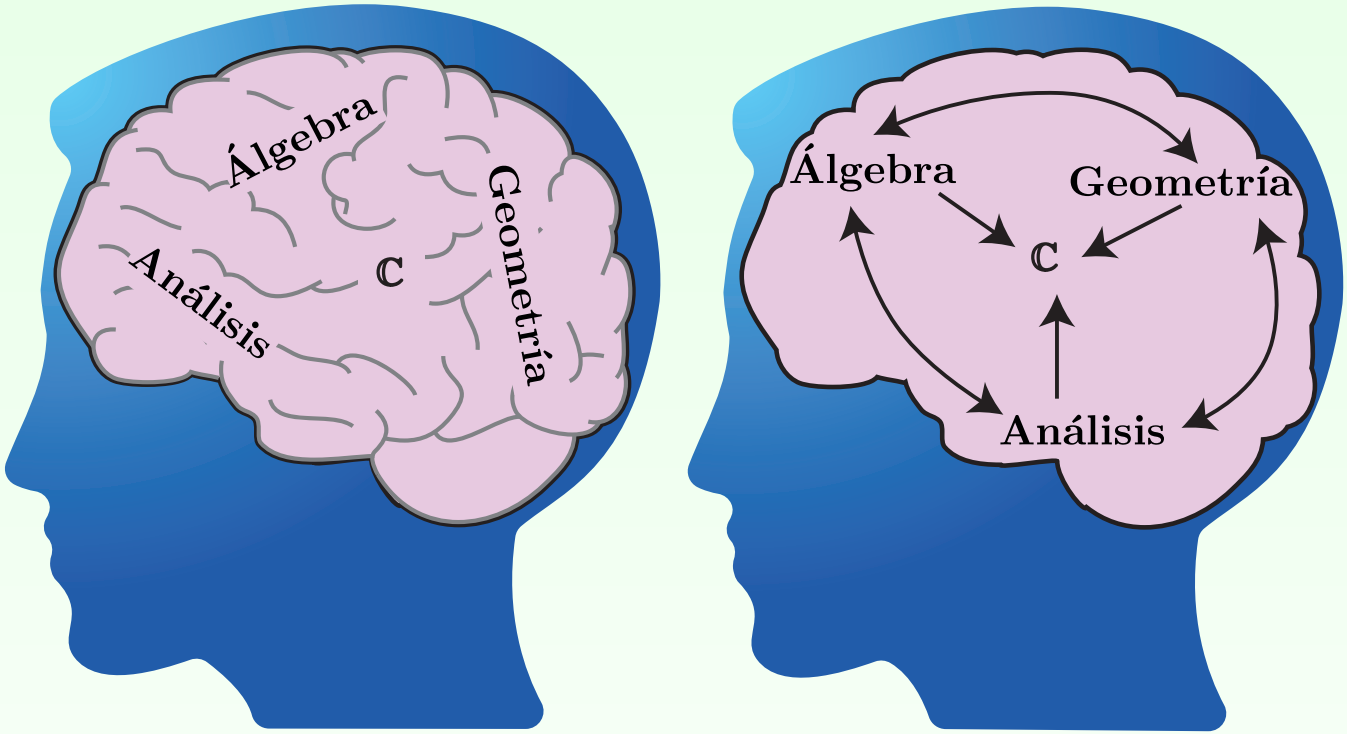


Figure: Objetos matemáticos aparentemente distintos, al madurar en nuestro intelecto confluyen. ¿Ejemplos?

$a^2 + b^2 = c^2, \ldots$

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1, \ldots$$

$$sen^2 z + cos^2 z = 1, \ldots$$

¿Como hacemos matemáticas?

1. Buscamos una pregunta u objeto.
2. Hacemos experimentos, para entender como funciona el objeto.
3. El **"Teorema"** es una frase
   corta,
   críptica,
   casi un poema,
   que describe el funcionamiento del objeto.

Nuestro escenario de trabajo es el plano complejo $\mathbb{C} = \{x + iy\}$,

nuestro objeto son las funciones complejas

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{f} : \mathbb{C}_z & \longrightarrow & \mathbb{C}_t \\ z & \longmapsto & \mathbb{f}(z) = \mathfrak{Re}\left(\mathbb{f}(z)\right) + i\mathfrak{Im}\left(\mathbb{f}(z)\right). \end{array}$$

Los casos más simples son:

- monomios $P(z) = z^n$,
- polinomios mónicos $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$,
- funciones racionales $\dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_{m-1} z^{m-1} + z^m}$

de tal manera que $P(z)$ no tiene factores comunes con $Q(z)$.

Pregunta de William P. Thurston en 2010:

¿Cuál es la forma de una

función racional compleja?

Figure: William P. Thurston (1946 – 2012) fue un matemático estadounidense. En 1982 la Unión Matemática Internacional le concedió la Medalla Fields; el Premio Nobel es el equivalente a la Medalla Fields. La pregunta es sorprendente, pues en 2010 cuando la enunció, Thurston había hallado ya resultados muy profundos para funciones racionales complejas.

¿Cuál es la forma de un

polinomio real?

El método de las bandas. Trazando la gráfica de un polinomio arbitrario conocidas sus raíces.

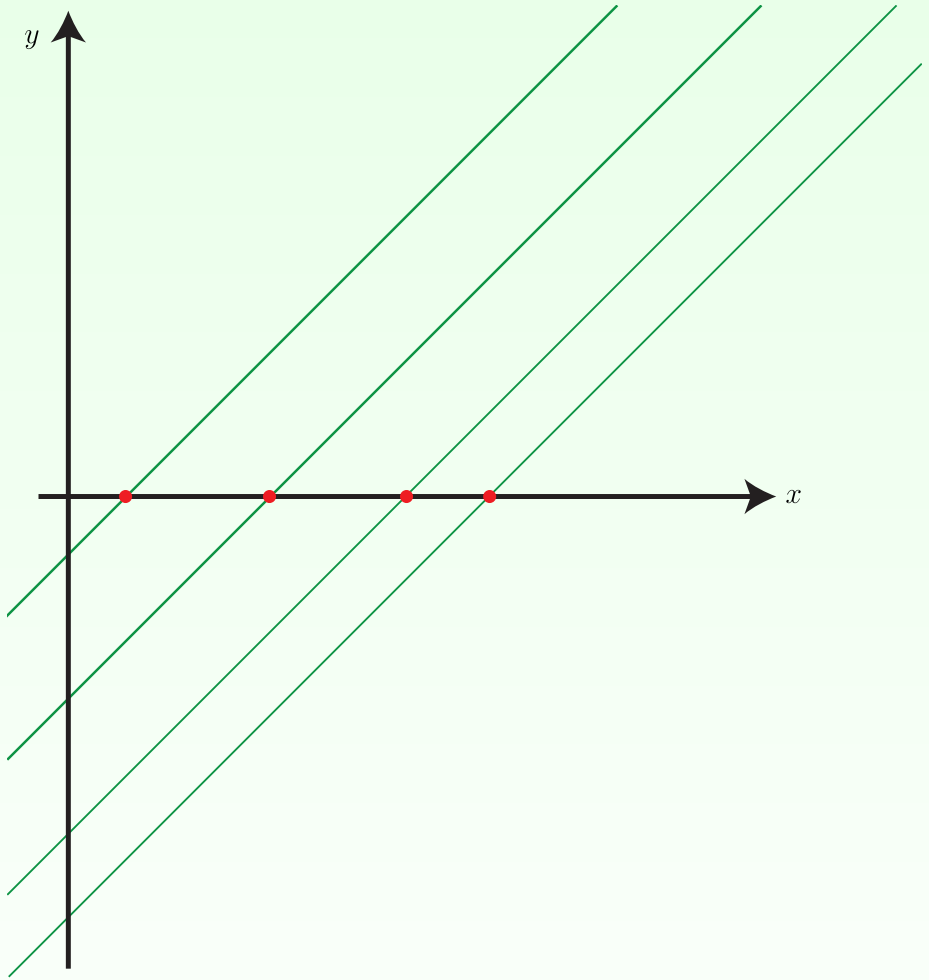


Figure: Un polinomio cúartico se escribe como el producto de sus factores lineales $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$.

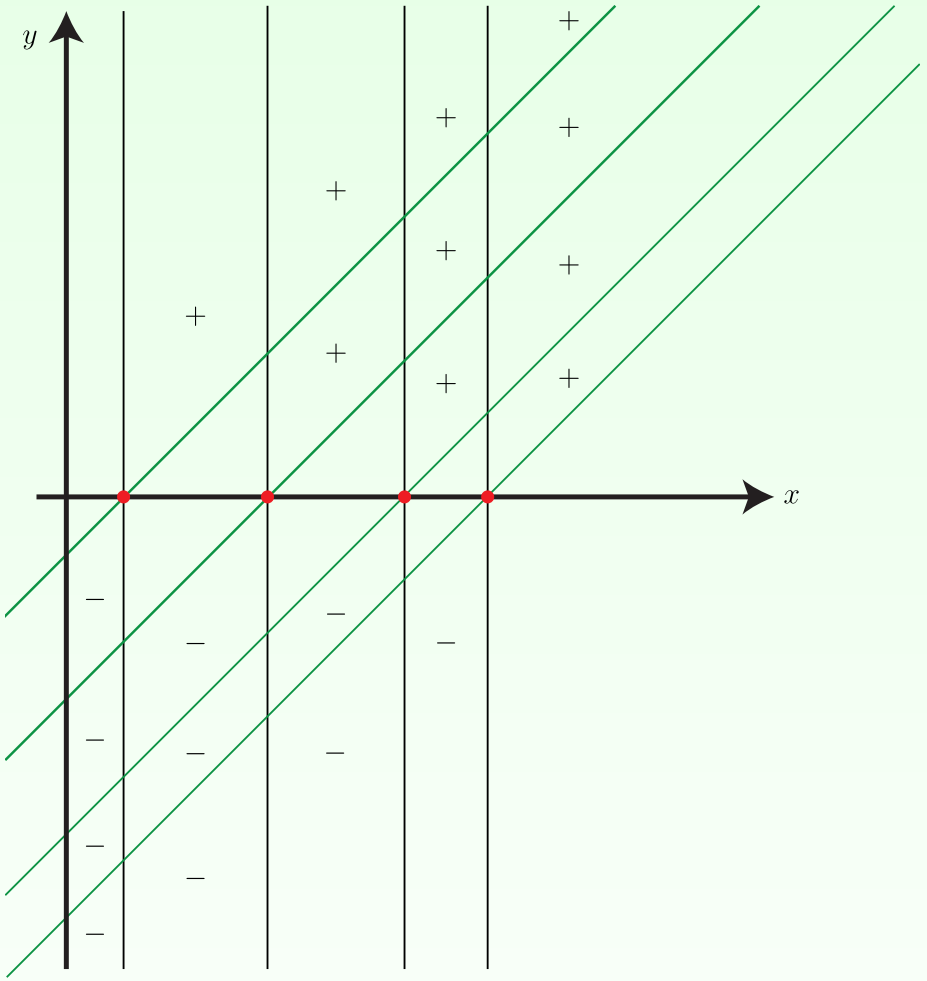


Figure: Señalamos bandas verticales entre dos raíces consecutivas y multiplicamos los signos.

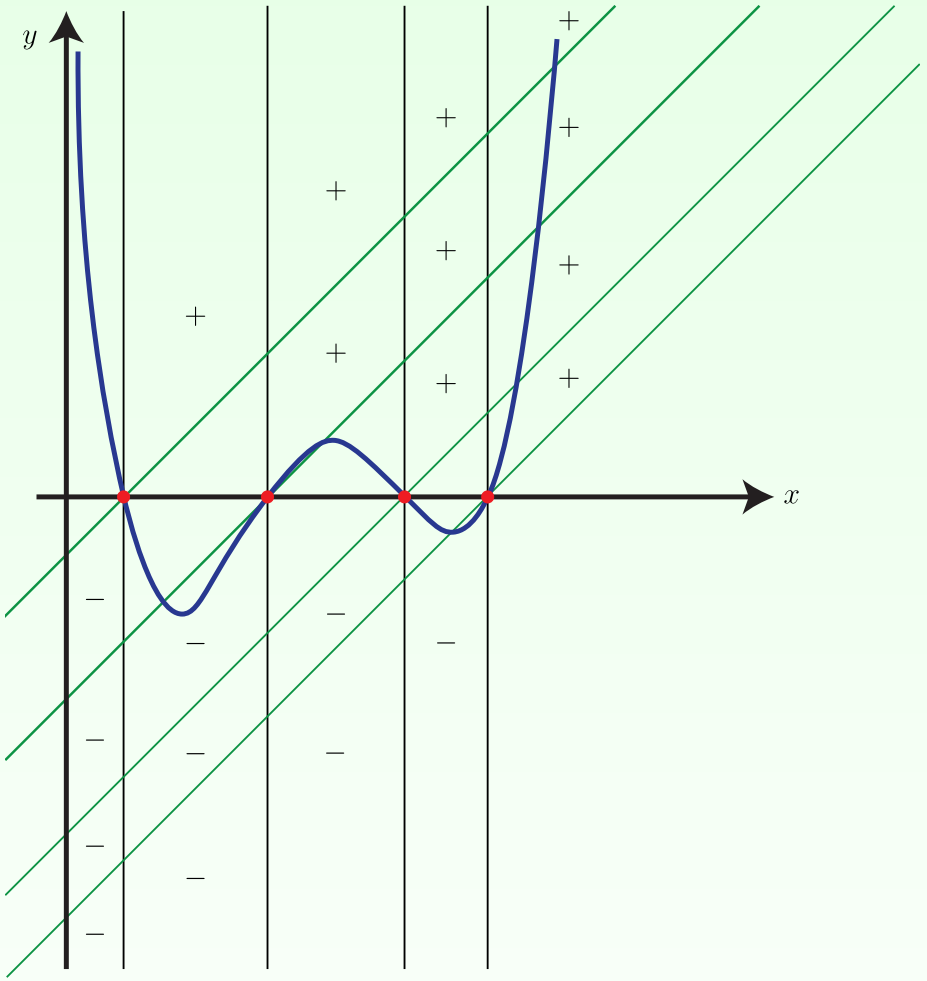


Figure: El “Teorema” es; por continuidad el producto de los signos en cada banda vertical indica el comportamiento de la gráfica del polinomio.

Preguntas sobre el "método de las bandas".

- ¿Qué pasa si dos raíces colapsan?, Fig. a.
- ¿Qué pasa si hay menos raíces de las esperadas?, Fig. b.

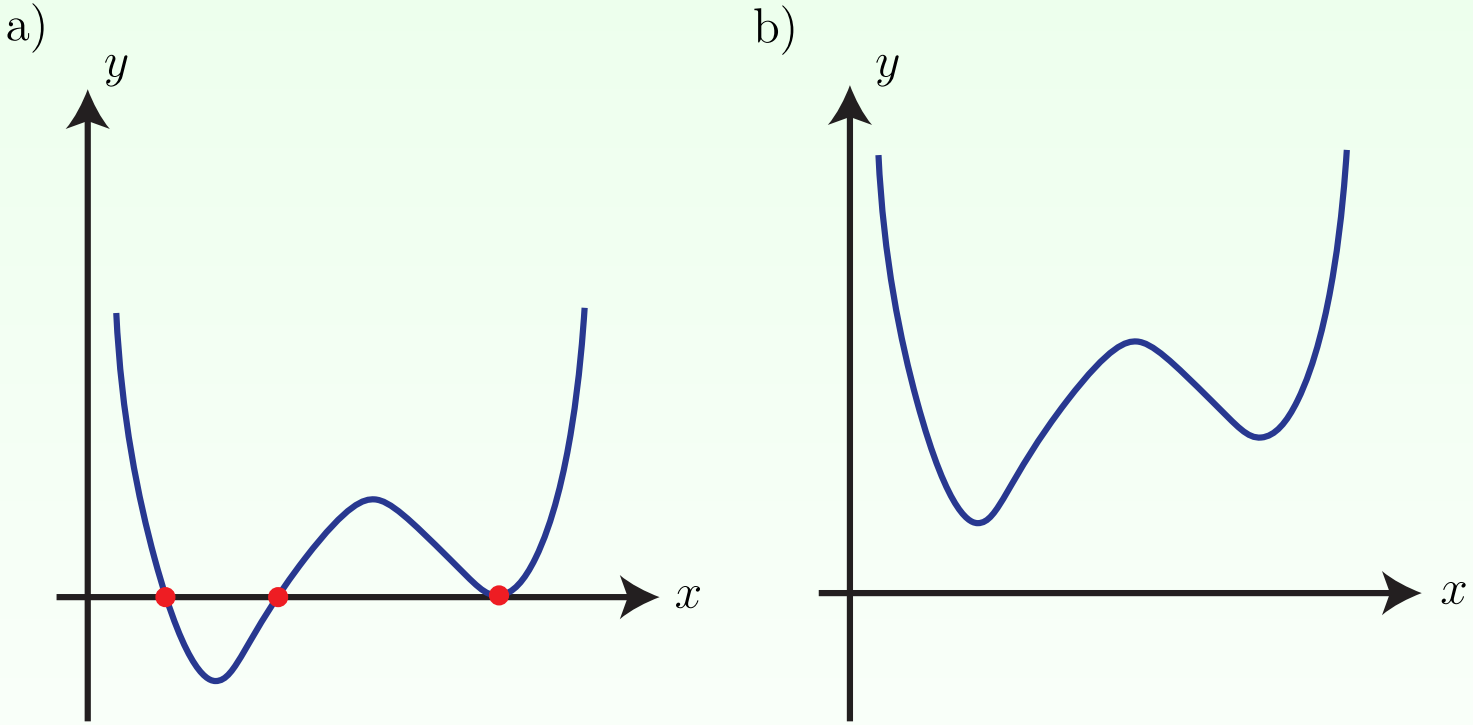
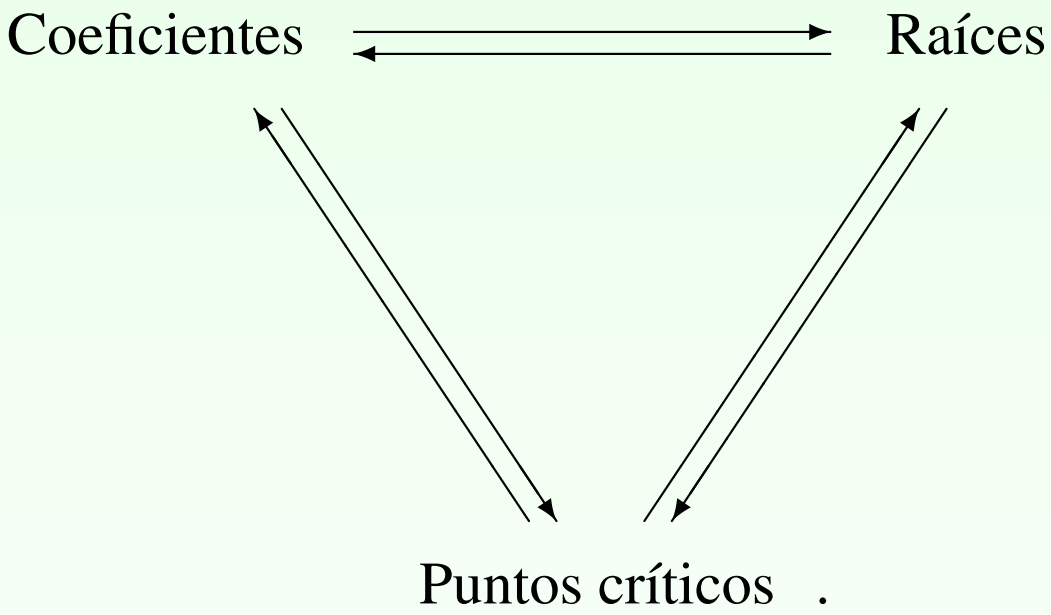


Figure: Bosquejamos $P(x)$ y $P(x) + a_0$.

Una sorpresa:

Hay al menos tres maneras equivalentes de escribir los polinomios complejos mónicos de grado n



Coeficientes y raíces nos llevan al álgebra.
Los puntos críticos (aquellos donde se anula la derivada) nos llevan al cálculo diferencial e integral, al análisis.

El objeto es la aplicación de Viète $\mathcal{V}_2$ para polinomios mónicos cuadráticos.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{raíces} & \longmapsto & \text{raíces sin orden} & \longmapsto & \text{coeficientes} \\
\mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \frac{\mathbb{C}^2}{Sim(2)} & \xrightarrow[\xleftarrow{\mathcal{V}_2^{-1}}]{\mathcal{V}_2} & \mathbb{C}^2 \\
(z_1, z_2) & \longmapsto & [z_1 : z_2] & \longmapsto & (c, b) \\
 & & & & = \left(z_1 z_2, -(z_1 + z_2)\right) \\
 & & & & = \underbrace{z_1 z_2}_{c} + \underbrace{(-z_1 - z_2)}_{b} z + \underbrace{1}_{a} z^2
\end{array}$$

$Sim(n)$ es el grupo simétrico cuyos elementos son los intercambios posibles en n posiciones.
$\mathcal{V}^{-1}$ es la aplicación de sacar las raíces.

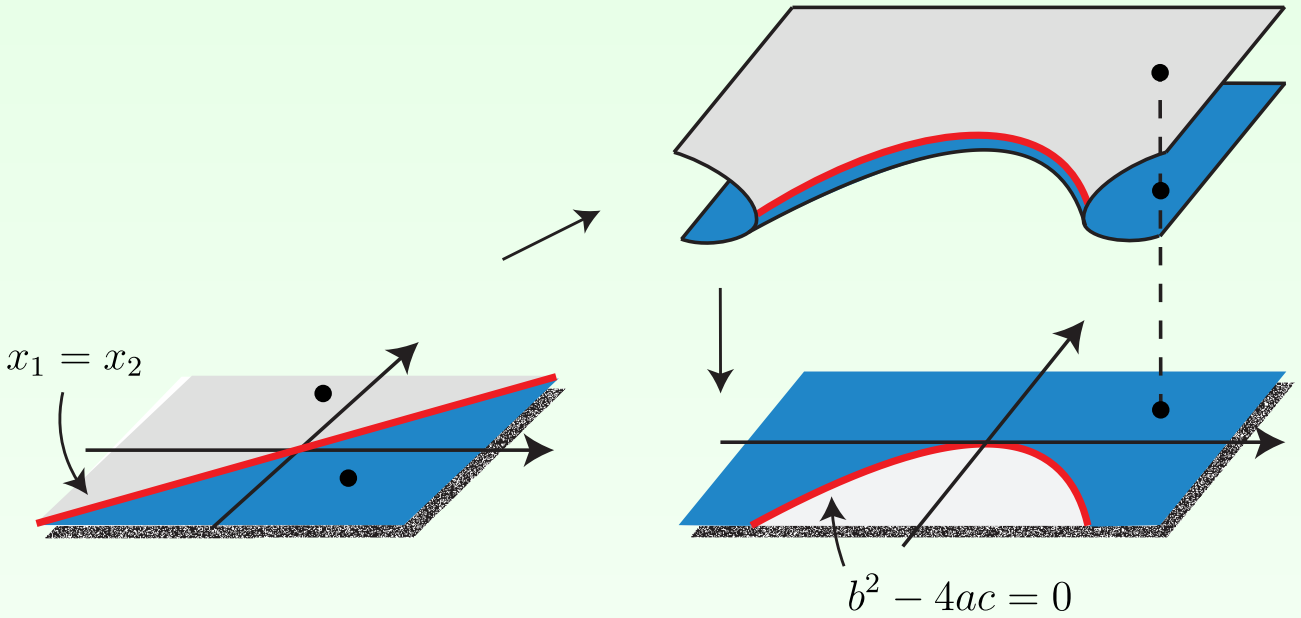


Figure: ¿Cómo funciona el objeto? Bosquejo de la aplicación de Viète $\mathcal{V}_2$ para polinomios reales mónicos cuadráticos.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{V}_2 : \mathbb{R}^2_{\textit{raíces con orden}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2_{\textit{coeficientes}} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \left(x_1 x_2,\ -x_1 - x_2\right) \doteq (c, b), \end{array}$$

usando nuestros conocimientos elementales

$$(x - x_1)(x - x_2) = x_1 x_2 + (-x_1 - x_2)x + x^2.$$

El "Teorema" es: aplicación de Viète $\mathcal{V}_n$ para polinomios mónicos de grado n, véase [4].

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{raíces} & \longmapsto & \text{raíces sin orden} & \longmapsto & \text{coeficientes} \\
\mathbb{C}^n & \longrightarrow & \frac{\mathbb{C}^n}{Sim(n)} & \xrightarrow[\mathcal{V}_n^{-1}]{\mathcal{V}_n} & \mathbb{C}^n \\
(z_1, \ldots, z_n) & \longmapsto & [z_1 : \cdots : z_n] & \longmapsto & (a_0, \ldots, a_{n-1})
\end{array}
$$

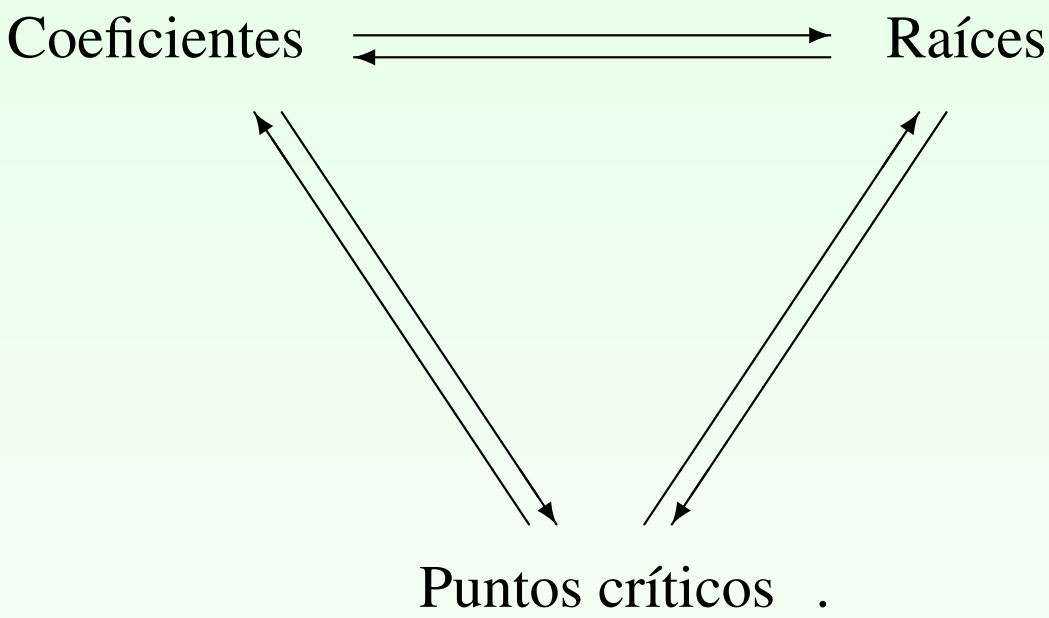
$$
\begin{aligned}
&= \Big((-1)^n (z_1 \cdots z_n), \\
&\quad \vdots \\
&\quad -(z_1 + \ldots + z_n) \Big) \\
&= \underbrace{(-1)^n (z_1 \cdots z_n)}_{a_0} + \ldots \underbrace{-(z_1 + \ldots + z_n)}_{a_{n-1}} z^{n-1} + z^n
\end{aligned}
$$

De puntos críticos a polinomios mónicos, . . . R. Thom:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{puntos críticos con orden} & & \text{puntos críticos sin orden} & & \text{coeficientes} \\
\mathbb{C}^{n-1} & \to & \frac{\mathbb{C}^{n-1}}{Sim(n)} & \to & \mathbb{C}^n_{coef} \\
(c_1,\ldots,c_{n-1}) & \mapsto & [c_1,\ldots,c_{n-1}] & \mapsto & n\int_0^z (z-c_1)\cdots(z-c_{n-1})dz \\
 & & & & = (\underbrace{a_0}_{=0}, a_1, \ldots, a_{n-1})\,.
\end{array}$$

Nota que solo usamos $n-1$ puntos críticos.

Hemos completado el diagrama



Un polinomio esta determinado por sus
coeficientes.
Un polinomio posee dos tipos de puntos **importantes**
sus raíces y sus puntos críticos,
mismos que “esencialmente lo determinan”.

Denotamos $\mathbb{f}'(z) = \frac{d\mathbb{f}}{dz}(z)$ a la derivada (como es usual),

Lema.

Para $\mathbb{f}$ un polinomio (real o complejo),
$\mathbb{f}'(z_0) \neq 0$ si y solo si $\mathbb{f}$ es una biyección local en una vecindad de z_0.

Lema.

Para $\mathbb{f}$ un polinomio complejo, si $\mathbb{f}'(z_1) = 0$,
entonces $\mathbb{f}$ es k a 1 en una vecindad perforada de z_1, donde $k \geq 2$.

Un **punto crítico** de $\mathbb{f}$ es un punto z_1 tal que $\mathbb{f}'(z_1) = 0$.

El **valor crítico** de un punto crítico z_1 es $t_1 = \mathbb{f}(z_1)$.

Un **punto cocrítico** de $\mathbb{f}$ es un punto z_{cc} tal que
$\mathbb{f}'(z_{cc}) \neq 0$ y $\mathbb{f}(z_{cc}) = t_1$ es un valor crítico.

Ejemplo. Puntos críticos, valores críticos y puntos cocríticos.

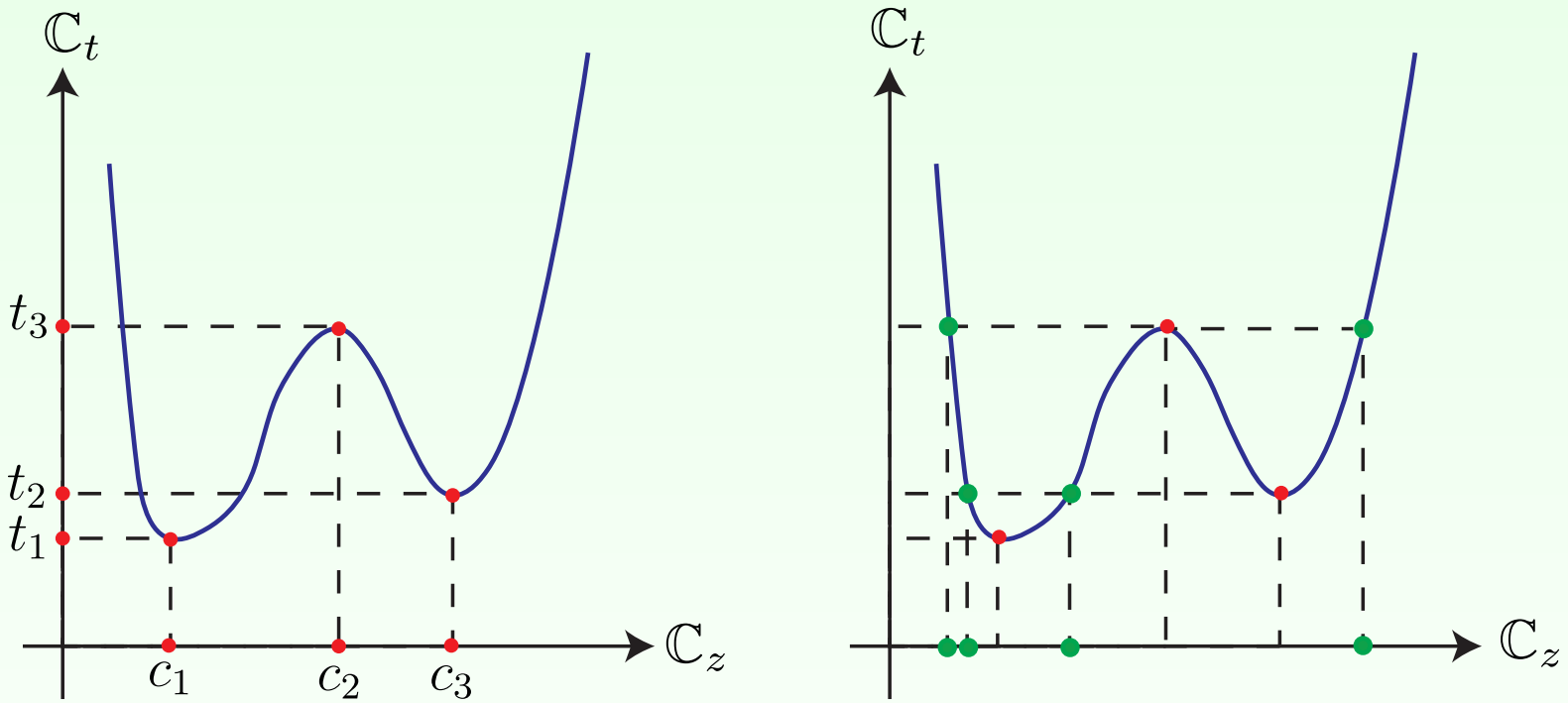


Figure: Un polinomio cúartico $P(z) : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_t$ con 3 puntos críticos $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}_z$, 3 valores críticos $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}_t$ (todos en rojo) y 4 puntos cocríticos en $\mathbb{C}_z$ (en verde).

... ¡Pensé que entendía de polinomios!

Nuestro objeto son los polinomios complejos.

Nuestro objeto es bonito, amigable, inocente.

El caso de polinomios cuadráticos.

Ejemplo (objeto). El monomio $P(z) = z^2$.

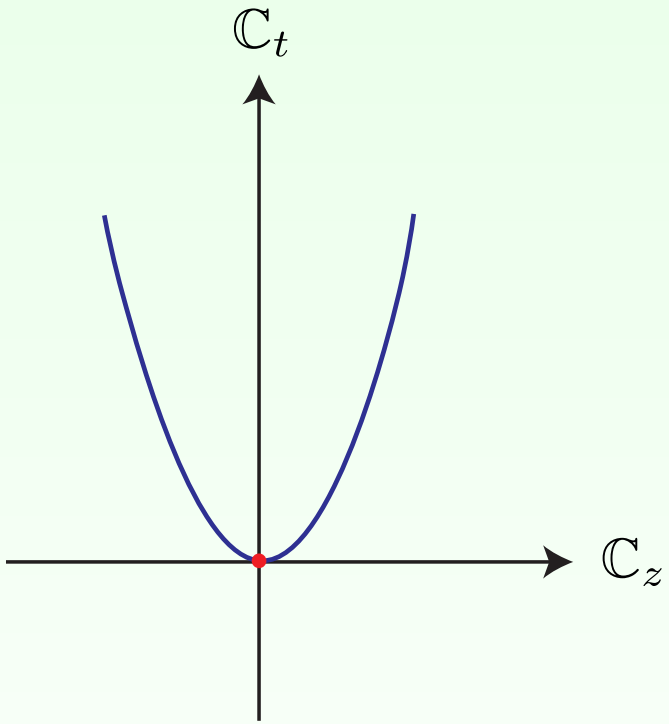
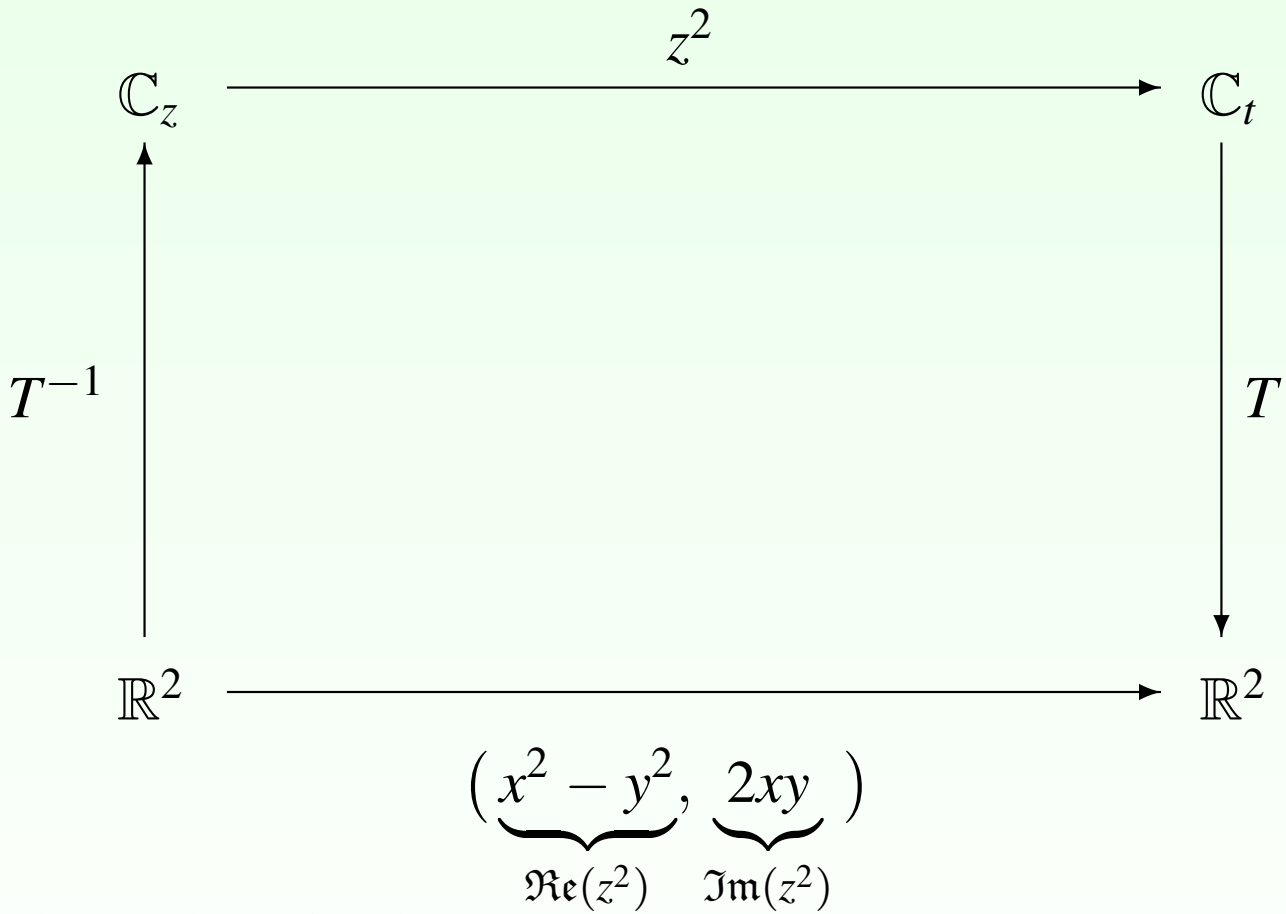


Figure: El monomio $P(z) = z^2$ posee un punto crítico en $0 \in \mathbb{C}_z$ y un valor crítico en $0 \in \mathbb{C}_t$.

Recordemos que $P(z) = z^2$ es una aplicación del plano en el plano, como muestra el diagrama



donde $T(x + iy) = (x, y)$ es el traductor.

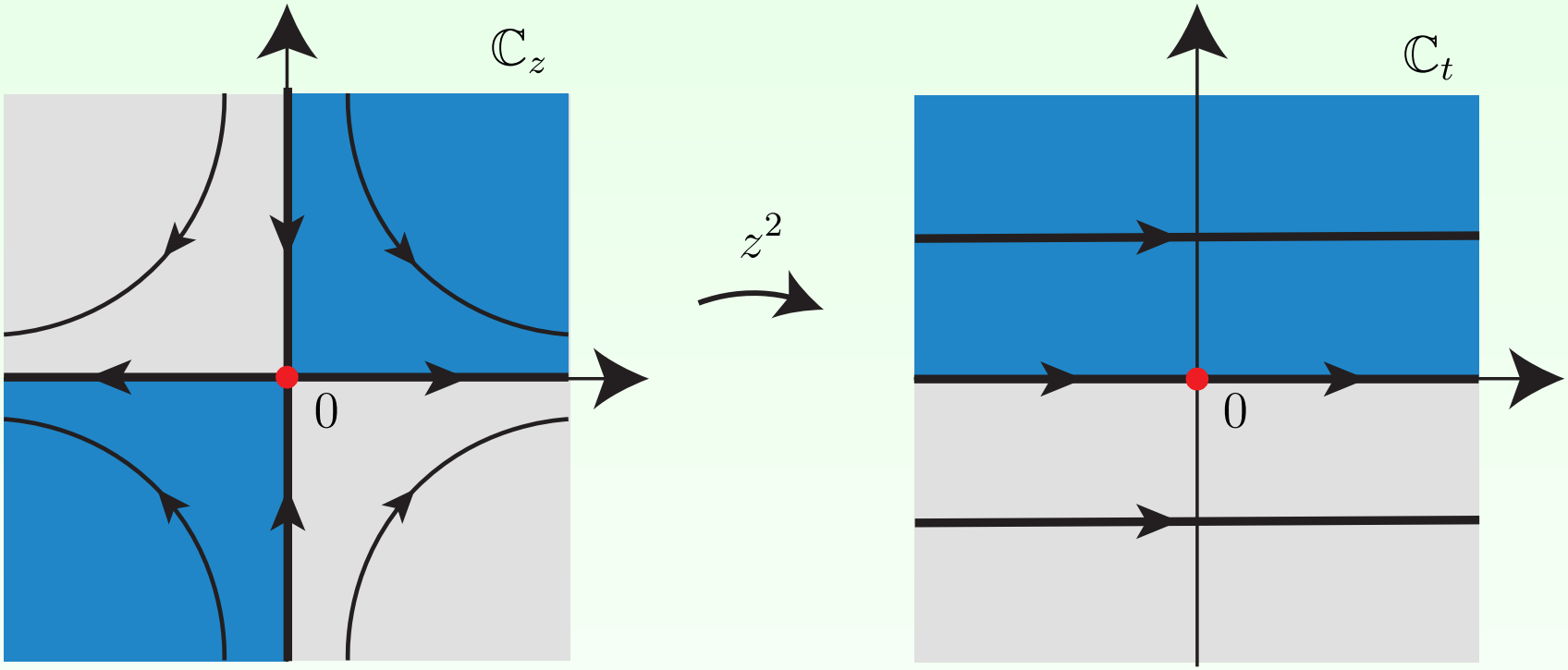


Figure: El "Teorema" es: un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es azul si y solo si $\mathfrak{Im}\left(z_0^2\right) > 0$, un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es blanco si y solo si $\mathfrak{Im}\left(z_0^2\right) < 0$. Decimos que las cuatro teselas o losetas en $\mathbb{C}_z$ son una teselación.

¡La teselación es la forma de $P(z) = z^2$!

Comportamiento de las dos raíces reales de $\{z^2 + \epsilon = 0 \mid \epsilon \in \mathbb{R}\}$.

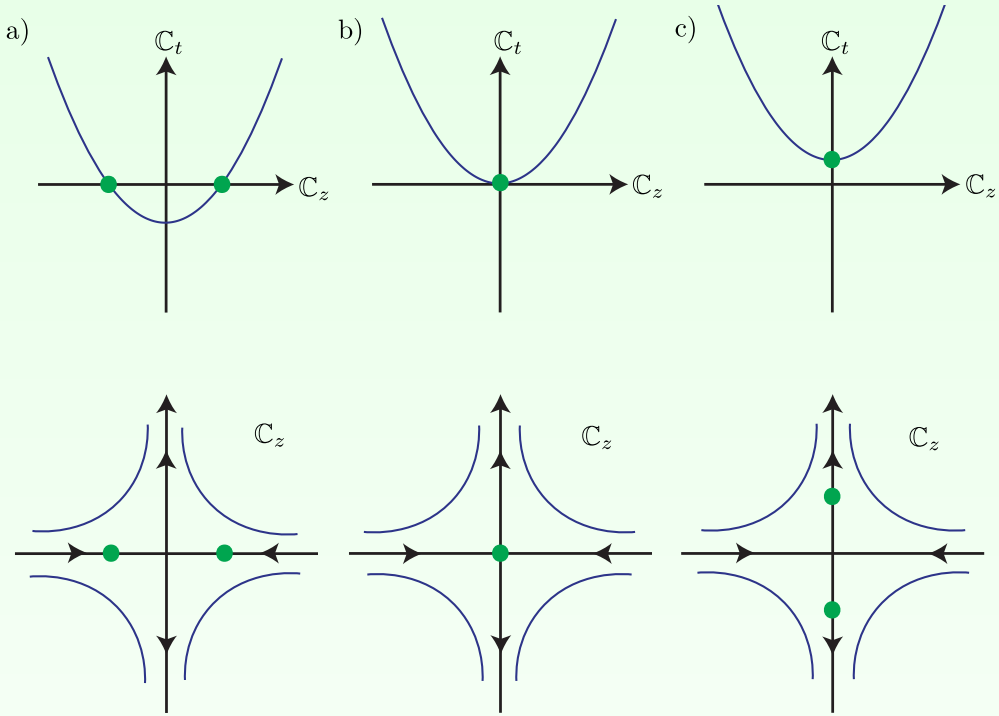


Figure: Arriba gráficas $\{(x, x^2 + \epsilon)\}$, abajo planos de raíces $\mathbb{C}_z$.

El Lema es . . .

Para $\epsilon < 0$, hay dos raíces reales distintas.

Para $\epsilon = 0$, las raíces colapsan.

Para $\epsilon > 0$, hay dos raíces imaginarias puras distintas.

El comportamiento de las raíces es continuo respecto a $\epsilon \in \mathbb{R}$.

Ejemplo (objeto/experimento).
¿Qué sucede para un polinomio cuadrático mónico general?

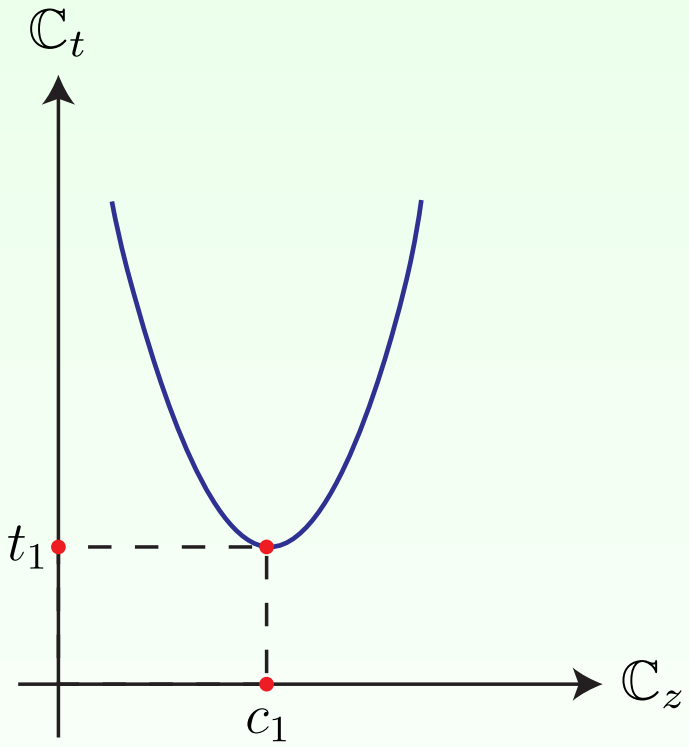


Figure: El polinomio cuadrático $P(z) = a_0 + a_1 z + z^2$ posee un punto crítico $c_1 \in \mathbb{C}_z$ y un valor crítico $t_1 \in \mathbb{C}_t$ (ambos en rojo).

Dos formas equivalentes de escribir un polinomio cuadrático mónico $P(z)$.

La forma del algebrista: usando sus coeficientes (a_0, a_1), *i.e.*

$$\begin{aligned} P(z) : \mathbb{C}_z &\longrightarrow \mathbb{C}_t \\ z &\longmapsto a_0 + a_1 z + z^2 \, . \end{aligned}$$

La forma del analista: usando su punto crítico y su término constante (c_1, a_0), *i.e.*

$$\begin{aligned} P(z) : \mathbb{C}_z &\longrightarrow \mathbb{C}_t \\ z &\longmapsto 2\int_0^z (z - c_1)dz + a_0 = a_0 + \underbrace{(-2c_1)}_{a_1} z + z^2 \, . \end{aligned}$$

c_1 es el punto crítico de $P(z)$,
equivalentemente
c_1 es el cero de la derivada $P'(z)$.

Dado un polinomio $P(z)$ asignamos colores azul y blanco a los puntos del plano $\mathbb{C}_z$ de forma continua y sencilla.

- Consideramos el polinomio

$$P(z) = a_0 - 2c_1 z + z^2 \,,$$

con punto crítico $c_1 \doteq \mathfrak{c}_1 + i\mathfrak{c}_2$
y valor crítico $t_1 = P(c_1) \doteq \mathfrak{t}_1 + i\mathfrak{t}_2$.

- Consideramos la recta horizontal γ que pasa por el valor crítico t_1, *i.e.*

$$\gamma = \left\{ t \mid \mathfrak{Im}\,(t) = \mathfrak{t}_2 \right\} \subset \mathbb{C}_t.$$

- γ determina una teselación o mosaico $\mathfrak{M}_\gamma$ del plano $\mathbb{C}_t$ como sigue

$$\mathbb{C}_t \backslash \gamma = \underbrace{T}_{\substack{\text{tesela} \\ \text{azul}}} \cup \underbrace{T'}_{\substack{\text{tesela} \\ \text{blanca}}} \doteq \mathfrak{M}_\gamma. \tag{1}$$

  Un punto $t_0 \in \mathbb{C}_t$ es azul si y solo si $\mathfrak{Im}(t_0) > \mathfrak{t}_2$,

  un punto $t_0 \in \mathbb{C}_t$ es blanco si y solo si $\mathfrak{Im}(t_0) < \mathfrak{t}_2$.

- La curva Γ en $\mathbb{C}_z$ que bajo $P(z)$ coincide con γ es llamada la **curva generadora** de $P(z)$,

$$\begin{array}{rcl} P : \mathbb{C}_z & \longrightarrow & \mathbb{C}_t \\ \Gamma & \longmapsto & \gamma. \end{array}$$

  ¿Cómo es la curva Γ?, ¿existen ecuaciones que describan a Γ?

¡La curva generadora Γ es algebraica[1]!

$$\Gamma \doteq \{\Im\mathrm{m}\,(P(z)) = \mathfrak{t}_2\} = \{\Im\mathrm{m}\,(a_0 - 2c_1 z + z^2) = \mathfrak{t}_2\}$$
$$= \{\mathfrak{a}_2 + 2(xy - \mathfrak{c}_2 x - \mathfrak{c}_1 y) = \mathfrak{a}_2 - 2\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\}$$
$$= \{xy - \mathfrak{c}_2 x - \mathfrak{c}_1 y + \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2 = 0\}$$
$$= \{(\underbrace{x - \mathfrak{c}_1}_{\substack{\text{recta}\\ \text{vertical}\\ \text{por } c_1}})(\underbrace{y - \mathfrak{c}_2}_{\substack{\text{recta}\\ \text{horizontal}\\ \text{por } c_1}}) = 0\}.$$

[1] Esto significa que Γ es el cero de un polinomio de dos variables x e y. No toda curva en $\mathbb{R}^2$ es algebraica, ser algebraica es una condición de simplicidad.

¡La curva generadora Γ es algebraica[1]!

$$
\begin{aligned}
\Gamma \dot{=} \{\mathfrak{Im}\,(P(z)) = \mathfrak{t}_2\} &= \{\mathfrak{Im}\,(a_0 - 2c_1 z + z^2) = \mathfrak{t}_2\} \\
&= \{\mathfrak{a}_2 + 2(xy - \mathfrak{c}_2 x - \mathfrak{c}_1 y) = \mathfrak{a}_2 - 2\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\} \\
&= \{xy - \mathfrak{c}_2 x - \mathfrak{c}_1 y + \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2 = 0\} \\
&= \Big\{ (\underbrace{x - \mathfrak{c}_1}_{\substack{\text{recta} \\ \text{vertical} \\ \text{por } c_1}})(\underbrace{y - \mathfrak{c}_2}_{\substack{\text{recta} \\ \text{horizontal} \\ \text{por } c_1}}) = 0 \Big\}.
\end{aligned}
$$

[1] Esto significa que Γ es el cero de un polinomio de dos variables x e y. No toda curva en $\mathbb{R}^2$ es algebraica, ser algebraica es una condición de simplicidad.

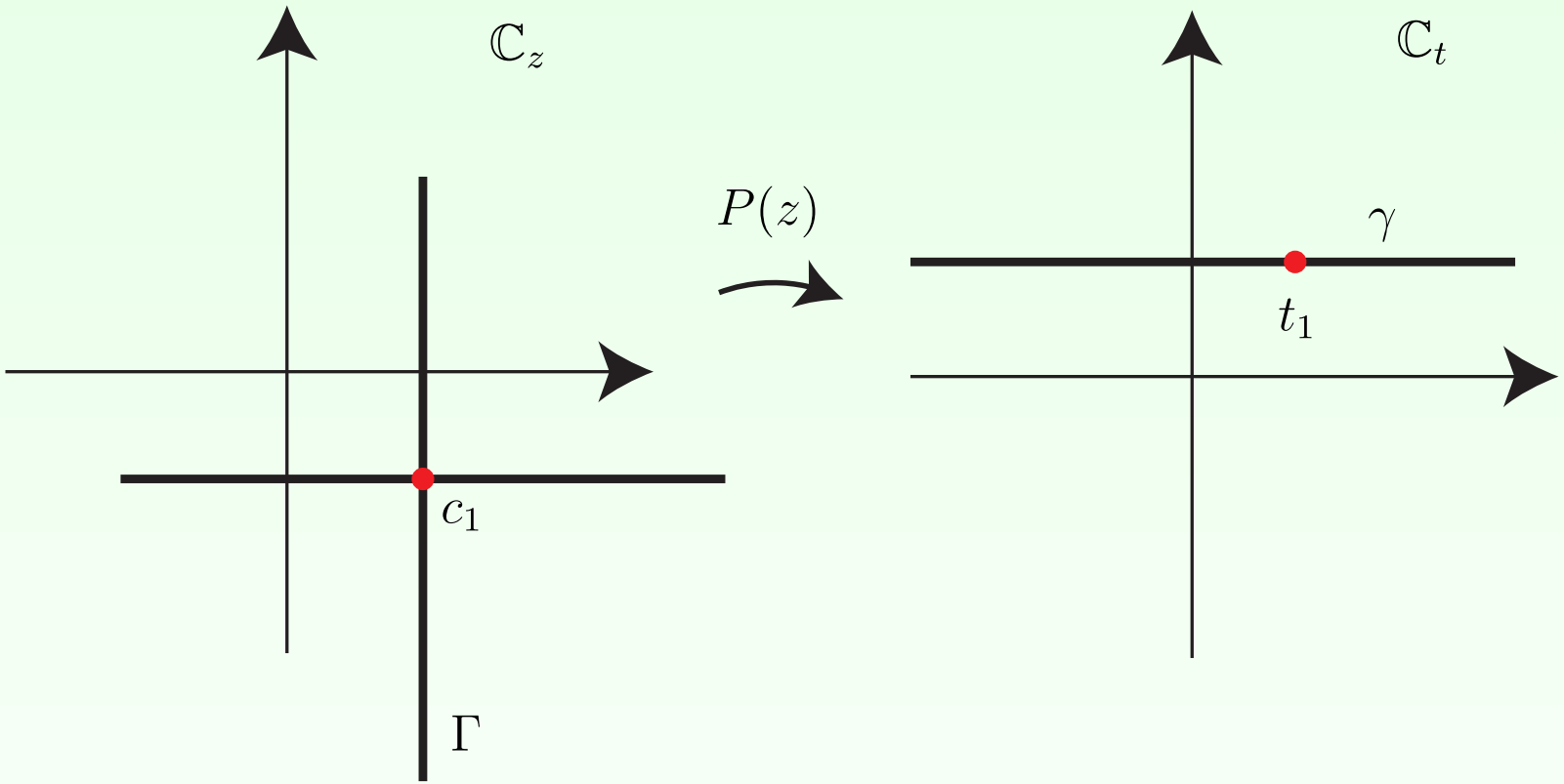


Figure: La curva generadora Γ del polinomio $P(z) = a_0 - 2c_1 z + z^2$ es la unión de las rectas horizontal y vertical que pasan por el punto crítico $c_1 \in \mathbb{C}_z$.

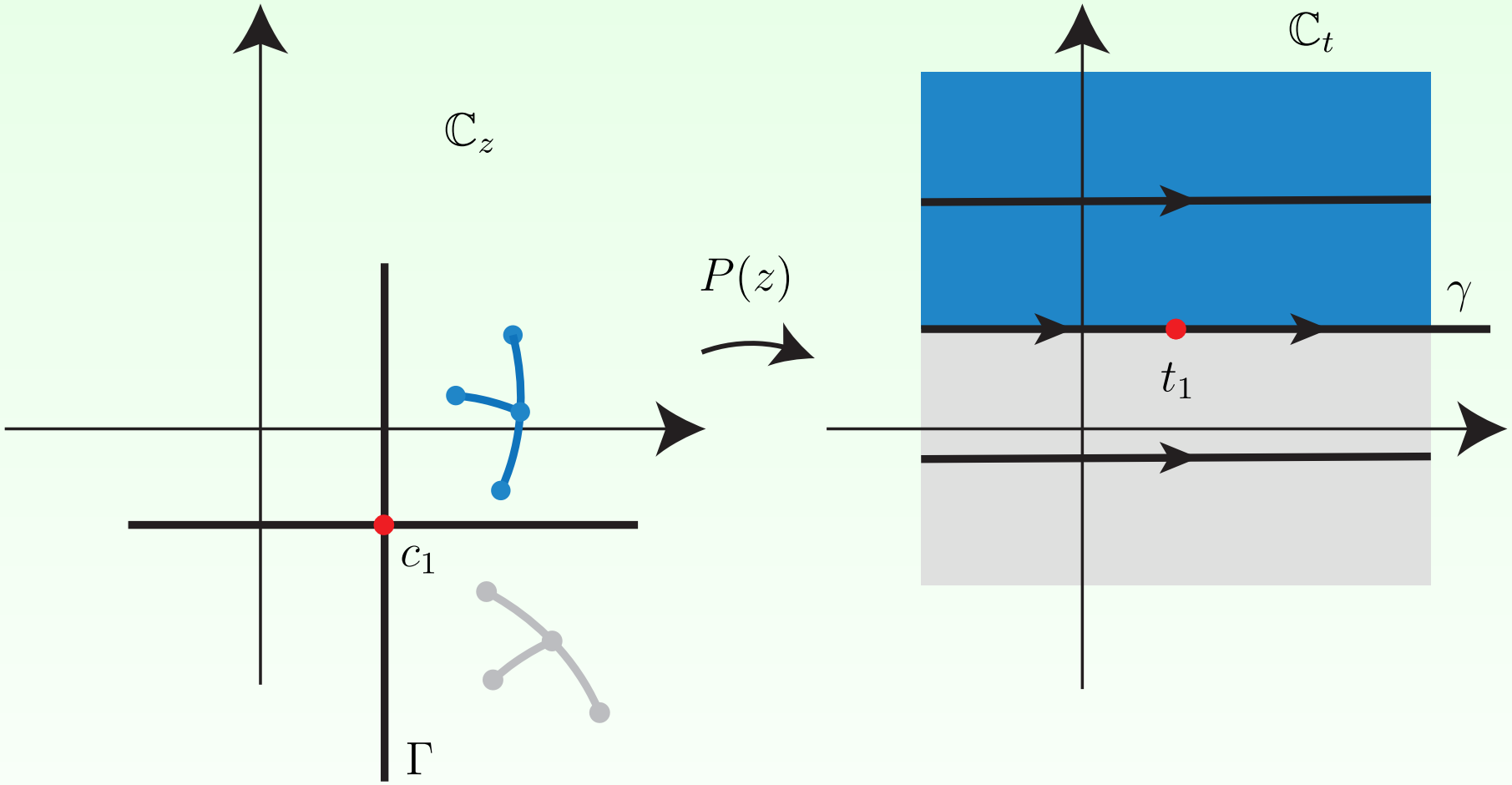


Figure: El polinomio $P(z)$ determina continuamente los colores azul o blanco en $\mathbb{C}_z \backslash \Gamma$. Dado un punto azul en $\mathbb{C}_z$ los puntos vecinos son azules siempre y cuando exista trayectoria entre ellos que no cruce Γ.

- La curva generadora Γ determina una teselación $\mathfrak{M}_\Gamma$ del plano $\mathbb{C}_z$ como sigue

$$\mathbb{C}_z \backslash \Gamma = \underbrace{T_1 \cup T_2}_{\substack{\text{teselas} \\ \text{azules}}} \cup \underbrace{T_1' \cup T_2'}_{\substack{\text{teselas} \\ \text{blancas}}} \doteq \mathfrak{M}_\Gamma. \tag{2}$$

- Un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es azul si y solo si $P(z_0)$ es azul en $\mathbb{C}_t$,

  un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es blanco si y solo si $P(z_0)$ es blanca en $\mathbb{C}_t$.

¡ La teselación $\mathfrak{M}_\Gamma$ es

la forma de $P(z) = a_0 - 2c_1 z + z^2$!

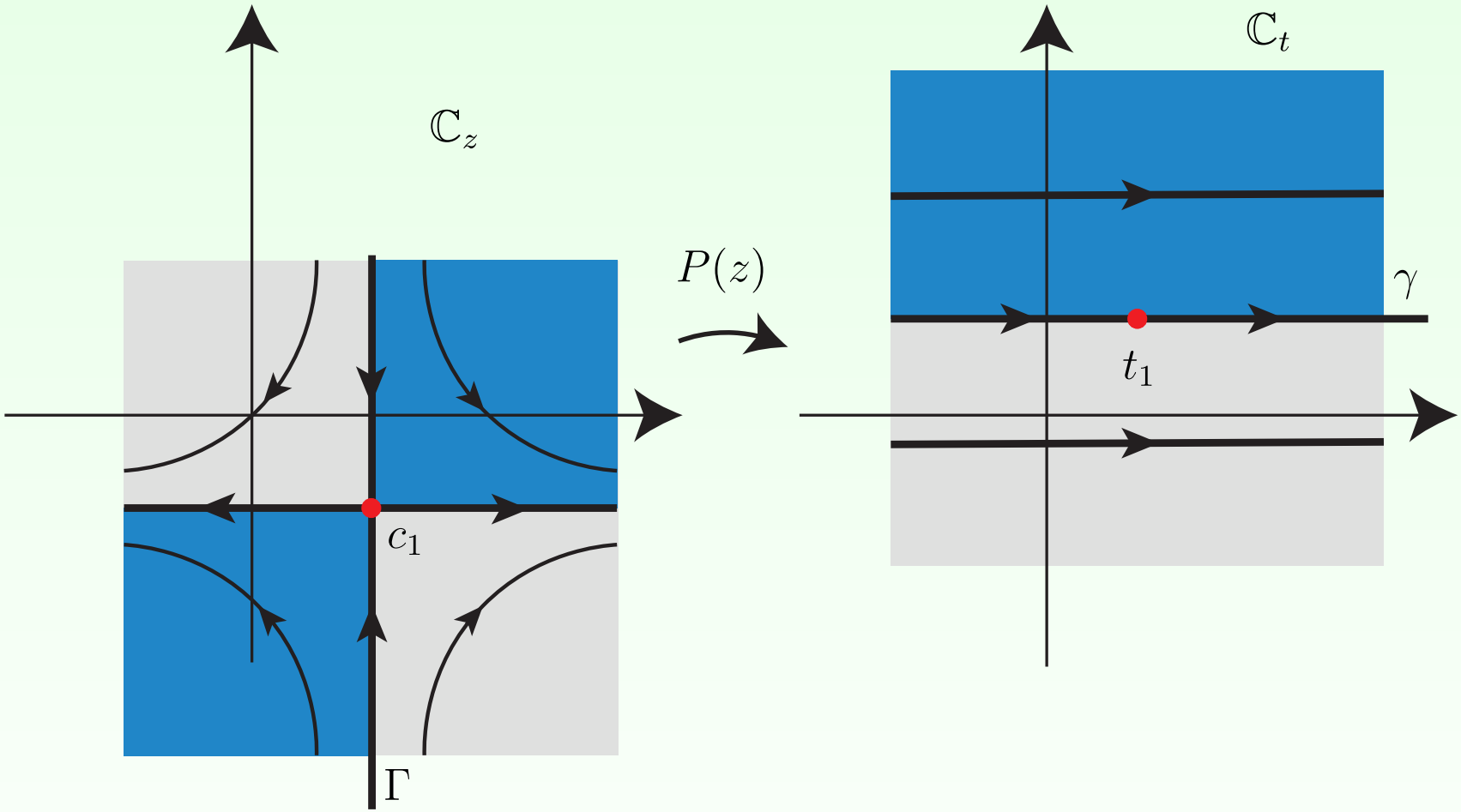
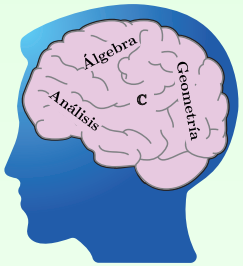


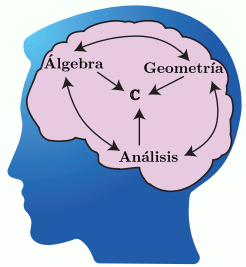
Figure: El "Teorema" es: teselación $\mathfrak{M}_\Gamma$ en el plano $\mathbb{C}_z$ para el polinomio $P(z) = a_0 - 2c_1 z + z^2$, en rojo el punto crítico $c_1 \in \mathbb{C}_z$ y el valor crítico $t_1 \in \mathbb{C}_t$.



$$P(z) = a_0 - 2c_1 z + z^2 \longrightarrow \begin{matrix}\text{valor}\\ \text{crítico}\\ \{t_1\}\end{matrix} \longrightarrow \gamma \subset \mathbb{C}_t$$

Teselación de $P(z)$

$$\Gamma \subset \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_z \backslash \Gamma = \underbrace{T_1 \cup T_2}_{\begin{matrix}\text{teselas}\\ \text{azules}\end{matrix}} \cup \underbrace{T_1' \cup T_2'}_{\begin{matrix}\text{teselas}\\ \text{azules}\end{matrix}}.$$



Propiedades de la teselación de $P(z)$.

- El número de teselas azules,
  el número de teselas blancas y
  el grado de $P(z)$
  coinciden.

- Dadas T_ℓ y T'_ℓ teselas de $\mathfrak{M}_\Gamma$ azul y blanca adyacentes existe

$$P^{-1}(t) : T \cup T' \subset \mathbb{C}_t \longrightarrow T_\ell \cup T'_\ell \subset \mathbb{C}_z$$

  la función inversa de $P(z)$.

$$\text{¿Recuerdas} \quad z_1, z_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \, ?$$

Observación.

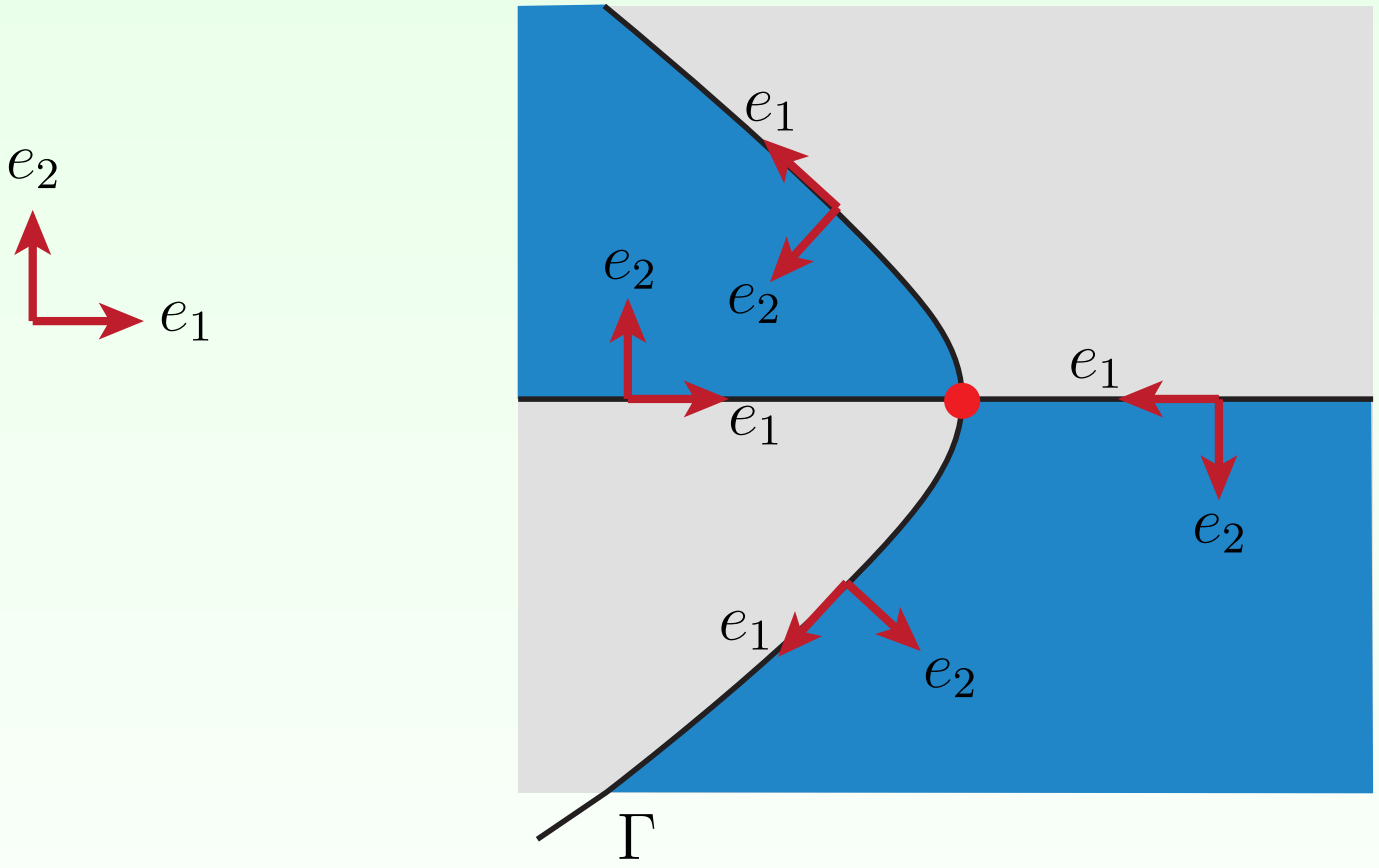


Figure: Al recorrer una trayectoria orientada en el plano $\mathbb{C}$ tiene sentido decidir cual es la región a su izquierda; aquella en la que apunta e_2.

El caso de polinomios cúbicos.

Ejemplo (objeto/experimento). Un polinomio cúbico $P(z)$.

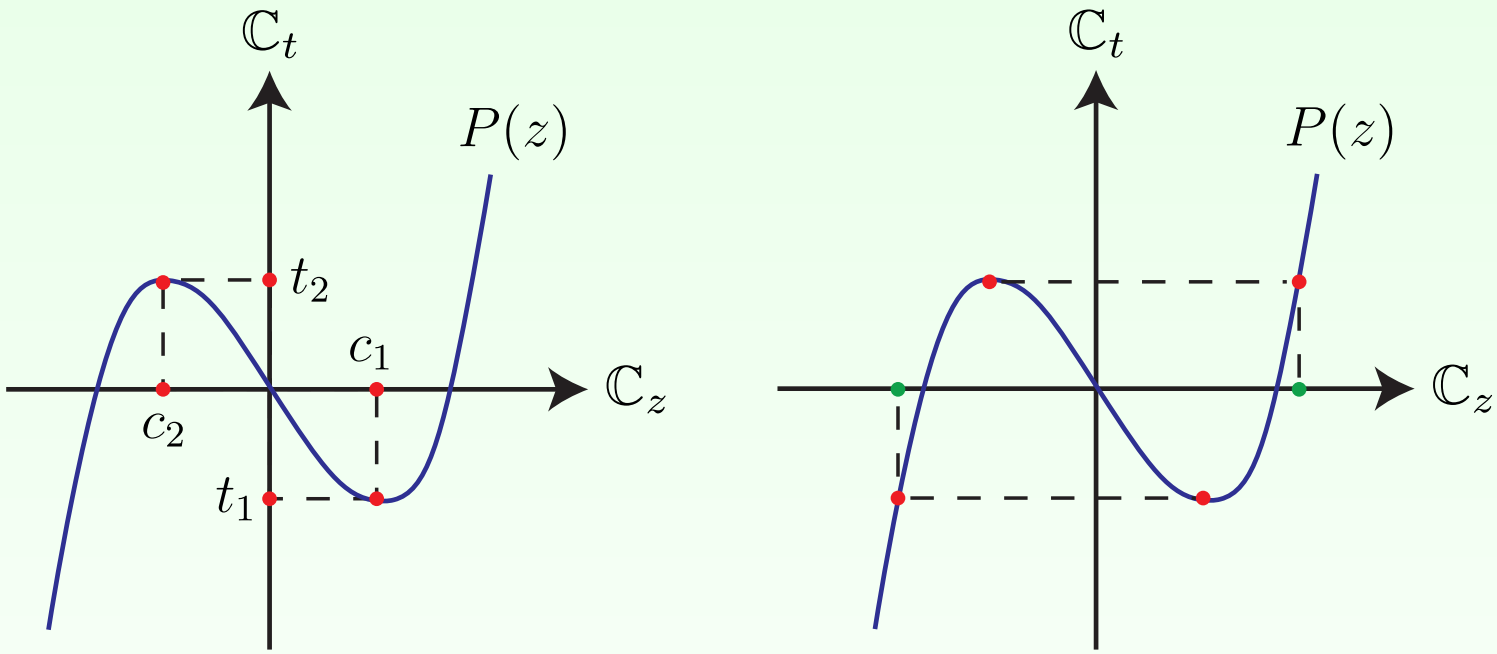


Figure: El polinomio cúbico $P(z) = -3z + z^3$ posee 2 puntos críticos $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_z$ y 2 valores críticos $t_1, t_2 \in \mathbb{C}_t$ (todos en rojo). Adicionalmente posee 2 puntos cocríticos en $\mathbb{C}_z$ (en verde).

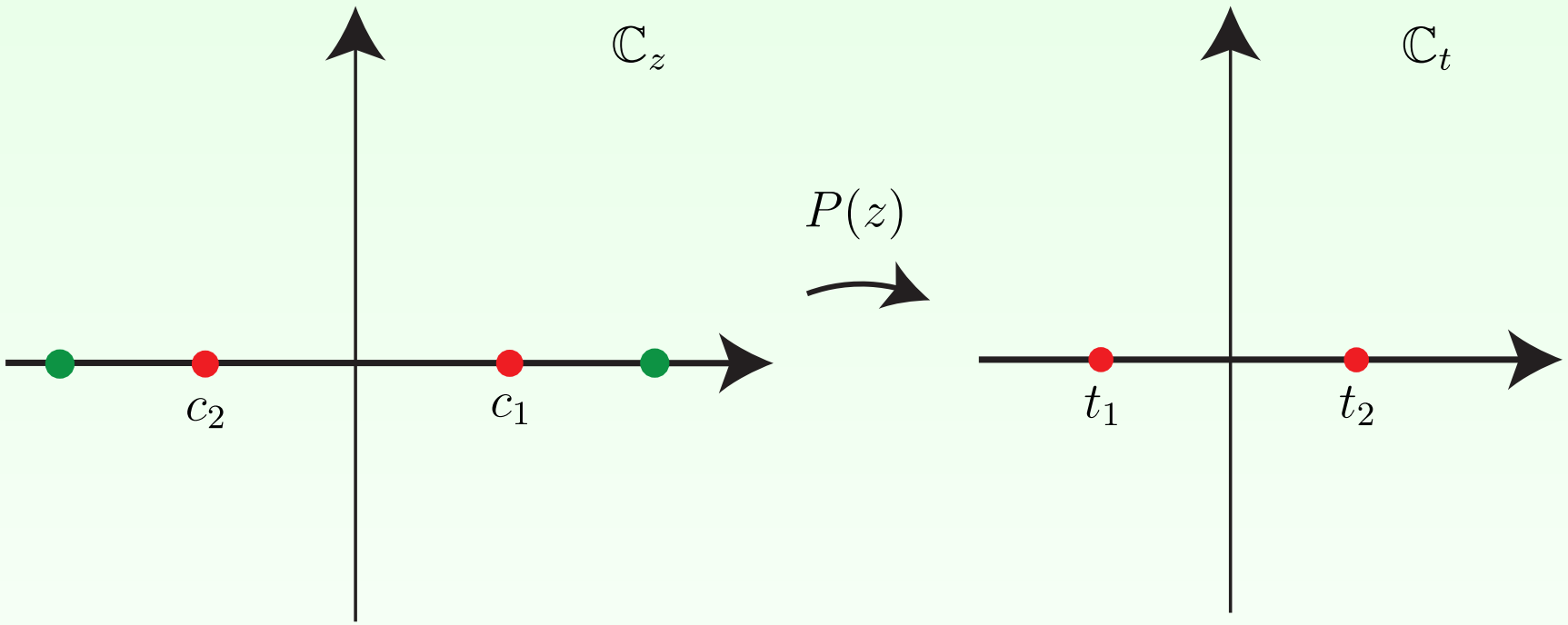


Figure: El polinomio cúbico $P(z) = -3z + z^3$ posee 2 puntos críticos $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_z$ y 2 valores críticos $t_1, t_2 \in \mathbb{C}_t$ (todos en rojo). Adicionalmente posee 2 puntos cocríticos en $\mathbb{C}_z$ (en verde).

Dos formas equivalentes de escribir un polinomio cúbico mónico $P(z)$.

La forma del algebrista: usando sus coeficientes (a_0, a_1, a_2), *i.e.*

$$\begin{aligned} P(z) : \mathbb{C}_z &\longrightarrow \mathbb{C}_t \\ z &\longmapsto a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + z^3 \, . \end{aligned}$$

La forma del analista: usando sus puntos críticos y su término constante (c_1, c_2, a_0), *i.e.*

$$\begin{aligned} P(z) : \mathbb{C}_z &\longrightarrow \mathbb{C}_t \\ z &\longmapsto 3 \int_0^z (z - c_1)(z - c_2) dz + a_0 \\ &= a_0 + \underbrace{3 c_1 c_2}_{a_1} z + \underbrace{\frac{-3(c_1 + c_2)}{2}}_{a_2} z^2 + z^3 \, . \end{aligned}$$

c_1, c_2 son los puntos críticos de $P(z)$,
equivalentemente
c_1, c_2 son los ceros de la derivada $P'(z)$.

Asignamos colores azul y blanco a los puntos del plano $\mathbb{C}_z$ de forma continua y sencilla.

- Consideramos el polinomio

$$P(z) = 3\int_0^z (z-1)(z+1)dz = -3z + z^3\,,$$

con puntos críticos

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1$$

y valores críticos

$$t_1 = P(1) = -2, \quad t_2 = P(-1) = 2.$$

- Consideramos

$$\gamma = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}_t$$

la recta horizontal que pasa por los valores críticos t_1 y t_2.

- γ determina una teselación $\mathfrak{M}_\gamma$ del plano $\mathbb{C}_t$ como sigue

$$\mathbb{C}_t \backslash \gamma = \underbrace{T}_{\substack{\text{tesela} \\ \text{azul}}} \cup \underbrace{T'}_{\substack{\text{tesela} \\ \text{blanca}}} \doteq \mathfrak{M}_\gamma. \tag{3}$$

- Un punto $t_0 \in \mathbb{C}_t$ es azul si y solo si $\mathfrak{Im}(t_0) > 0$,

  un punto $t_0 \in \mathbb{C}_t$ es blanco si y solo si $\mathfrak{Im}(t_0) < 0$.

- La curva Γ en $\mathbb{C}_z$ que bajo $P(z)$ coincide con γ es la curva generadora de $P(z)$,

$$\begin{aligned} P : \mathbb{C}_z &\longrightarrow \mathbb{C}_t \\ \Gamma &\longmapsto \gamma. \end{aligned}$$

¿Existen ecuaciones que describan a Γ?

¡La curva generadora Γ es algebraica!

$$\begin{aligned}\Gamma \doteq \{\Im\mathrm{m}\,(P(z)) = 0\} &= \{\Im\mathrm{m}\,(-3z + z^3) = 0\} \\ &= \{3x^2y - y^3 - 3y = 0\} \\ &= \Big\{ \underbrace{y}_{\substack{\text{eje}\\ \text{real}}} \underbrace{(3x^2 - y^2 - 3)}_{\substack{\text{hipérbola}\\ \text{centrada}\\ \text{en } 0}} = 0 \Big\}.\end{aligned}$$

¡Que suerte tenemos;
la curva algebraica cúbica $\Gamma = \{\Im\mathrm{m}\,(P(z)) = 0\}$ es fácil de describir!

Γ es la unión de una curva de grado uno y una curva de grado dos.

¡La curva generadora Γ es algebraica!

$$\begin{aligned}\Gamma \doteq \{\Im\mathfrak{m}\,(P(z)) = 0\} &= \{\Im\mathfrak{m}\,(-3z + z^3) = 0\} \\ &= \{3x^2y - y^3 - 3y = 0\} \\ &= \Big\{ \underbrace{y}_{\substack{\text{eje}\\ \text{real}}} \underbrace{(3x^2 - y^2 - 3)}_{\substack{\text{hipérbola}\\ \text{centrada}\\ \text{en 0}}} = 0 \Big\}.\end{aligned}$$

¡Que suerte tenemos;
la curva algebraica cúbica $\Gamma = \{\Im\mathfrak{m}\,(P(z)) = 0\}$ es fácil de describir!

Γ es la unión de una curva de grado uno y una curva de grado dos.

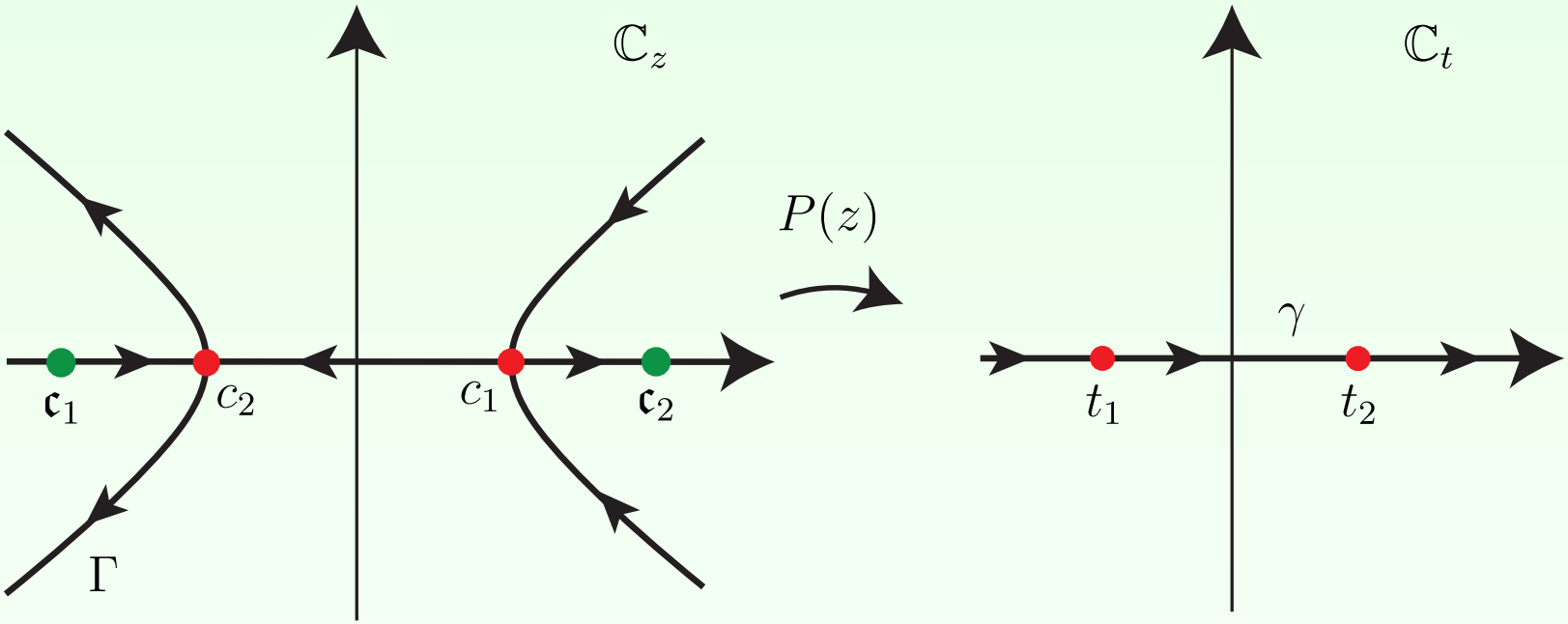


Figure: La curva generadora Γ del polinomio $P(z) = -3z + z^3$ es la unión de la recta real $\{y = 0\}$ con la hipérbola $\{x^2 - y^2/3 = 1\}$.

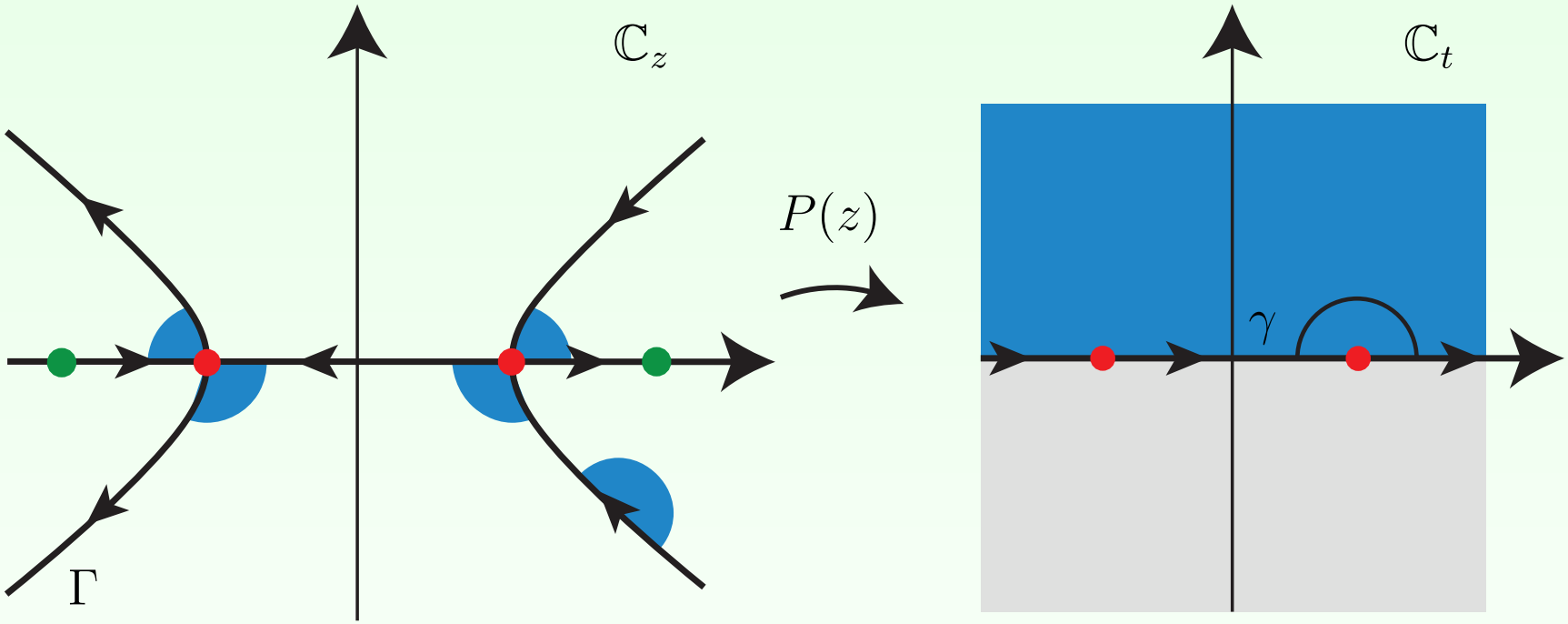


Figure: El polinomio $P(z)$ determina continuamente los colores azul o blanco en $\mathbb{C}_z \backslash \Gamma$. Dado un punto azul en $\mathbb{C}_z$ los puntos vecinos son azules siempre y cuando exista trayectoria entre ellos que no cruce Γ.

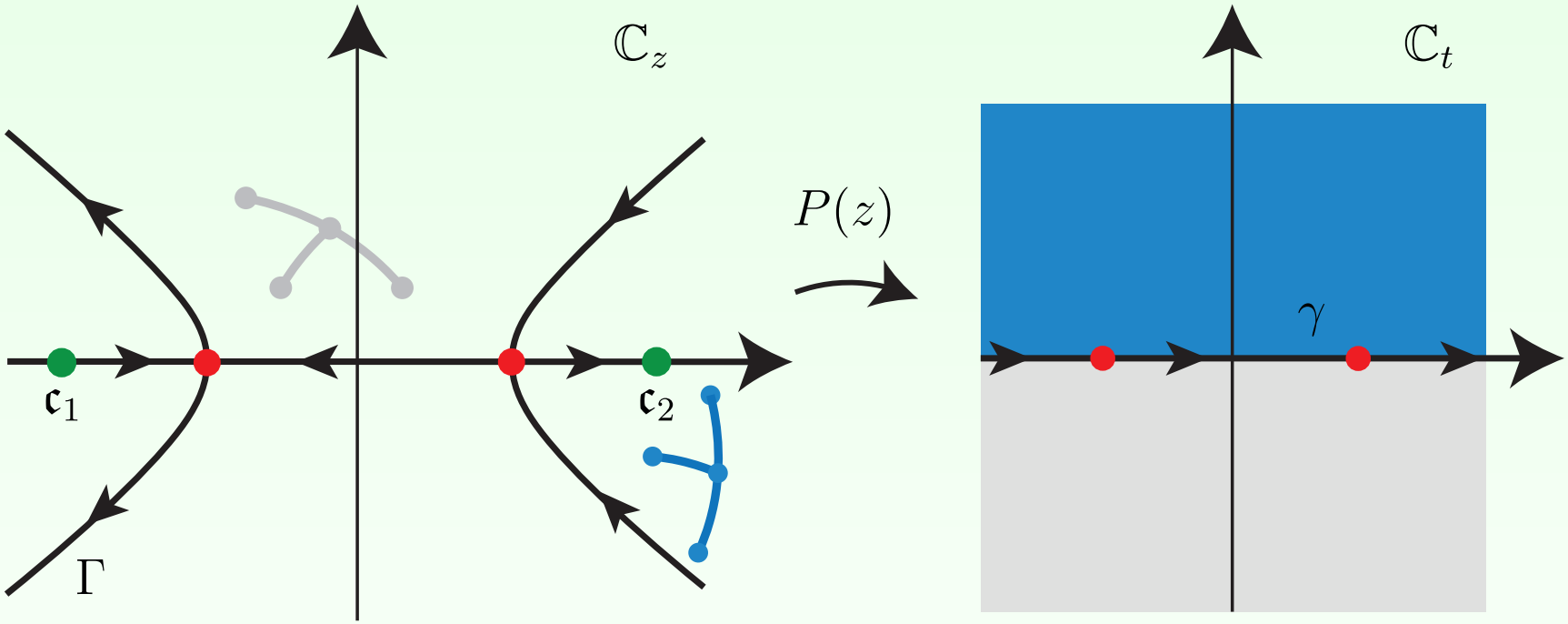


Figure: El polinomio $P(z)$ determina continuamente los colores azul o blanco en $\mathbb{C}_z \backslash \Gamma$. Dado un punto azul en $\mathbb{C}_z$ los puntos vecinos son azules siempre y cuando exista trayectoria entre ellos que no cruce Γ.

- La curva generadora Γ determina una teselación $\mathfrak{M}_\Gamma$ del plano $\mathbb{C}_z$ como sigue

$$\mathbb{C}_z \backslash \Gamma = \underbrace{T_1 \cup T_2 \cup T_3}_{\substack{\text{teselas} \\ \text{azules}}} \cup \underbrace{T_1' \cup T_2' \cup T_3'}_{\substack{\text{teselas} \\ \text{blancas}}} \doteq \mathfrak{M}_\Gamma. \tag{4}$$

- Un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es azul si y solo si $P(z_0)$ es azul en $\mathbb{C}_t$,

  un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es blanco si y solo si $P(z_0)$ es blanca en $\mathbb{C}_t$.

¡La teselación $\mathfrak{M}_\Gamma$ es la forma de $P(z) = -3z + z^3$!

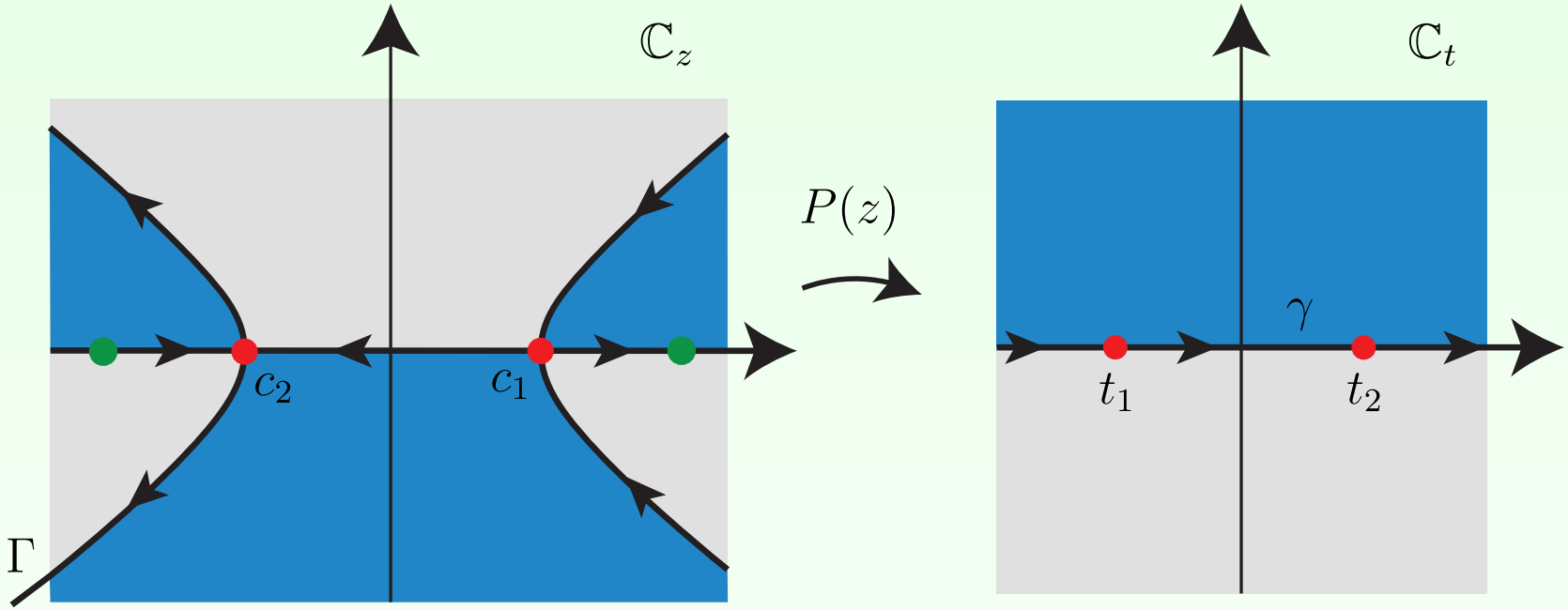
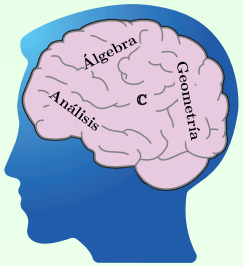


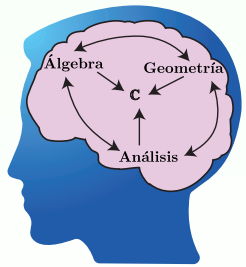
Figure: El "Teorema" es: teselación $\mathfrak{M}_\Gamma$ en el plano $\mathbb{C}_z$ para el polinomio $P(z) = -3z + z^3$, puntos críticos y valores críticos en rojo, puntos cocríticos en verde.



$$P(z) = -3z + z^3 \longrightarrow \begin{matrix}\text{valores}\\ \text{críticos}\\ \{t_1,\ t_2\}\end{matrix} \longrightarrow \gamma \subset \mathbb{C}_t$$

Teselación de $P(z)$

$$\Gamma \subset \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_z \backslash \Gamma = \underbrace{T_1 \cup T_2 \cup T_3}_{\text{teselas azules}} \cup \underbrace{T_1' \cup T_2' \cup T_3'}_{\text{teselas azules}}.$$



¿A quién se le ocurrió ese truco?. . .

¿Pero cuál es el truco?

Figure: Felix Klein (1849 – 1925) y Hermann Schwarz (1843 – 1921), matemáticos alemanes pioneros en la construcción de teselaciones para funciones complejas y para ecuaciones diferenciales complejas.

Figure: Página de los Protocolos de Klein. ¿Qué tan duro trabajaba Klein?

El caso de polinomios cúarticos.

Ejemplo (objeto/experimento). Un polinomio cúartico $P(z)$.

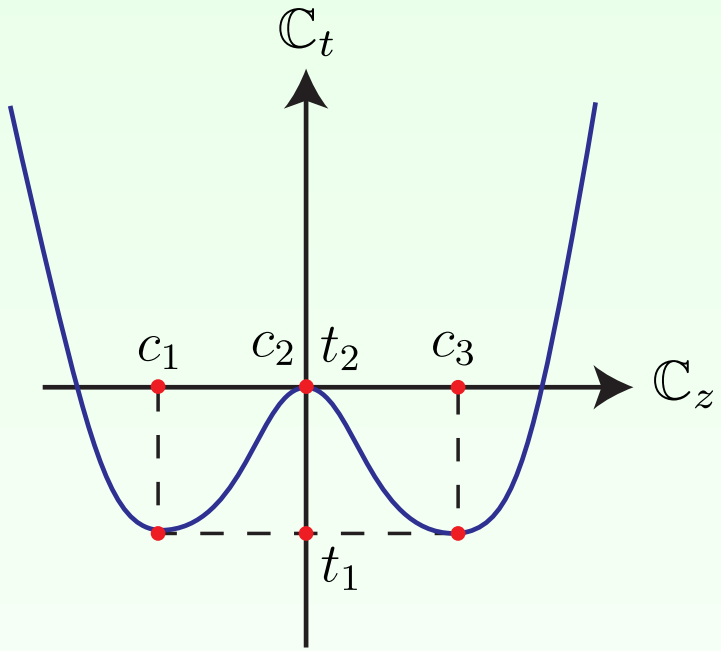


Figure: Un polinomio cúartico $P(z) : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_t$; con 3 puntos críticos $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}_z$ y 2 valores críticos $t_1, t_2 \in \mathbb{C}_t$ (todos en rojo), sin puntos cocríticos.

Observación. Un polinomio cúartico $P(z)$ general.

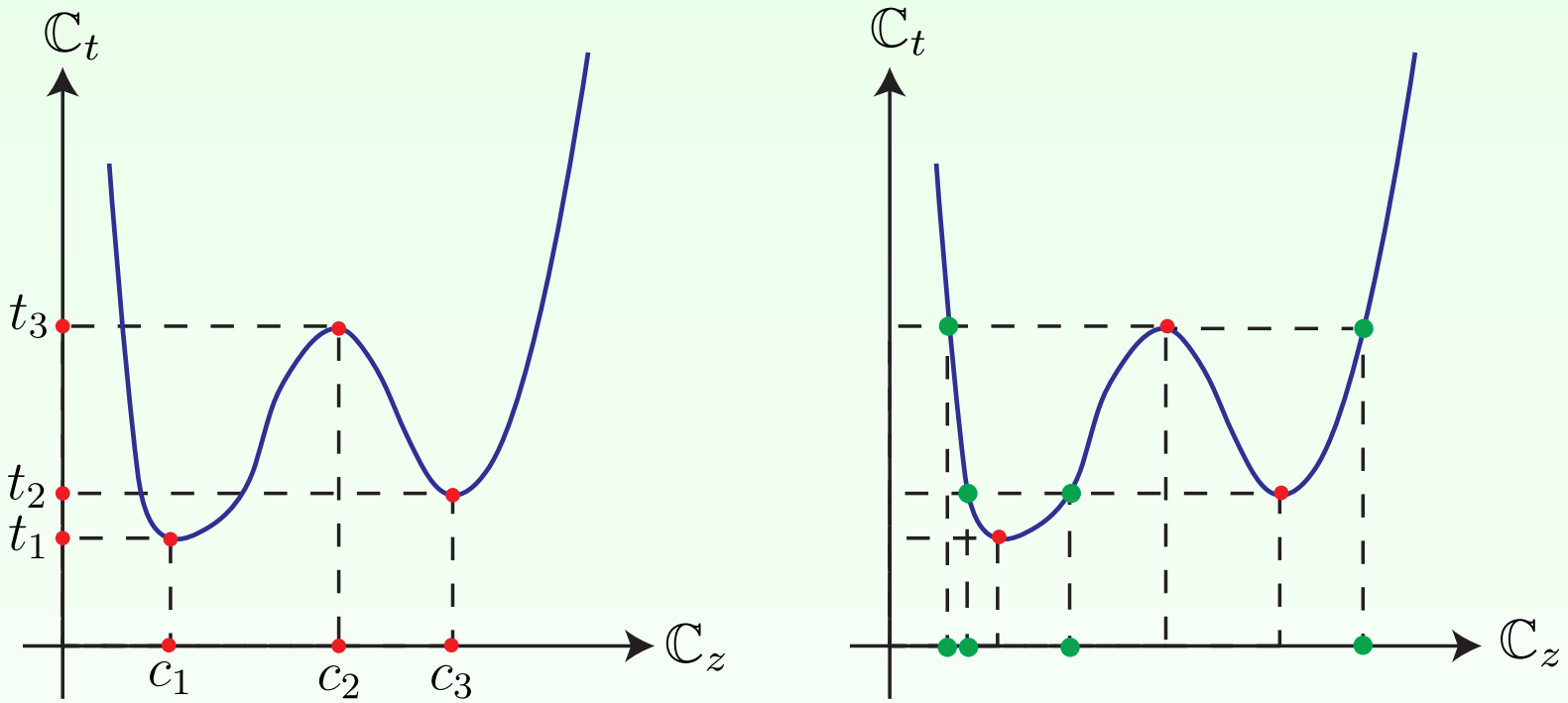


Figure: Un polinomio cúartico $P(z) : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_t$ posee 3 puntos críticos $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}_z$ y 3 valores críticos $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}_t$ (todos en rojo). Además, pueden existir hasta 6 puntos cocríticos en $\mathbb{C}_z$ (en verde).

Dos formas equivalentes de escribir un polinomio cúartico mónico $P(z)$.

La forma del algebrista: usando sus coeficientes (a_0, a_1, a_2, a_3), *i.e.*

$$\begin{aligned} P(z) : \mathbb{C}_z &\longrightarrow \mathbb{C}_t \\ z &\longmapsto a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + z^4 \,. \end{aligned}$$

La forma del analista: usando sus puntos críticos y su término constante (c_1, c_2, c_3, a_0), *i.e.*

$$\begin{aligned} P(z) : \mathbb{C}_z &\longrightarrow \mathbb{C}_t \\ z &\longmapsto 4\int_0^z (z-c_1)(z-c_2)(z-c_3)dz + a_0 \\ &= a_0 + \underbrace{(-4c_1c_2c_3)}_{a_1} z + \underbrace{2(c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3)}_{a_2} z^2 + \underbrace{\tfrac{-4(c_1+c_2+c_3)}{3}}_{a_3} z^3 + z^4 \,. \end{aligned}$$

$c_1,\ c_2,\ c_3$ son los puntos críticos de $P(z)$,
equivalentemente
$c_1,\ c_2,\ c_3$ son los ceros de la derivada $P'(z)$.

Asignamos colores azul y blanco a los puntos del plano $\mathbb{C}_z$ de forma continua y sencilla.

- Consideramos el polinomio[2]

$$P(z) = 4\int_0^z z(z-1)(z+1)dz = -2z^2 + z^4\,,$$

con puntos críticos

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = -1$$

y valores críticos

$$t_1 = P(0) = 0, \quad t_2 = P(1) = P(-1) = -1.$$

- Consideramos

$$\gamma = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}_t$$

la recta que pasa por los valores críticos t_1 y t_2.

[2] sencillo, simple, simétrico, para facilitar los cálculos.

- γ determina una teselación $\mathfrak{M}_\gamma$ del plano $\mathbb{C}_t$ como sigue

$$\mathbb{C}_t \backslash \gamma = \underbrace{T}_{\substack{\text{tesela} \\ \text{azul}}} \cup \underbrace{T'}_{\substack{\text{tesela} \\ \text{blanca}}} \doteq \mathfrak{M}_\gamma. \tag{5}$$

- Un punto $t_0 \in \mathbb{C}_t$ es azul si y solo si $\mathfrak{Im}(t_0) > 0$,

  un punto $t_0 \in \mathbb{C}_t$ es blanco si y solo si $\mathfrak{Im}(t_0) < 0$.

- La curva Γ en $\mathbb{C}_z$ que bajo $P(z)$ coincide con γ es la curva generadora de $P(z)$,

$$\begin{array}{rcl} P : \mathbb{C}_z & \longrightarrow & \mathbb{C}_t \\ \Gamma & \longmapsto & \gamma. \end{array}$$

  ¿Existen ecuaciones que describan a Γ?

¡La curva generadora Γ es algebraica!

$$\Gamma \doteq \{\Im\mathrm{m}\,(P(z)) = 0\} = \{\Im\mathrm{m}\,(-2z^2 + z^4)\}$$
$$= \{x^3y - xy^3 - xy = 0\}$$
$$= \Big\{ \underbrace{x}_{\substack{\text{recta}\\ \text{imaginaria}}} \underbrace{y}_{\substack{\text{recta}\\ \text{real}}} \underbrace{(x^2 - y^2 - 1)}_{\substack{\text{hipérbola}\\ \text{centrada}\\ \text{en } 0}} = 0 \Big\}.$$

¡La curva generadora Γ es algebraica!

$$\begin{aligned}
\Gamma \doteq \{\Im\mathfrak{m}\,(P(z)) = 0\} &= \{\Im\mathfrak{m}\,(-2z^2 + z^4)\} \\
&= \{x^3y - xy^3 - xy = 0\} \\
&= \Big\{ \underbrace{x}_{\substack{\text{recta} \\ \text{imaginaria}}} \; \underbrace{y}_{\substack{\text{recta} \\ \text{real}}} \underbrace{(x^2 - y^2 - 1)}_{\substack{\text{hipérbola} \\ \text{centrada} \\ \text{en } 0}} = 0 \Big\}.
\end{aligned}$$

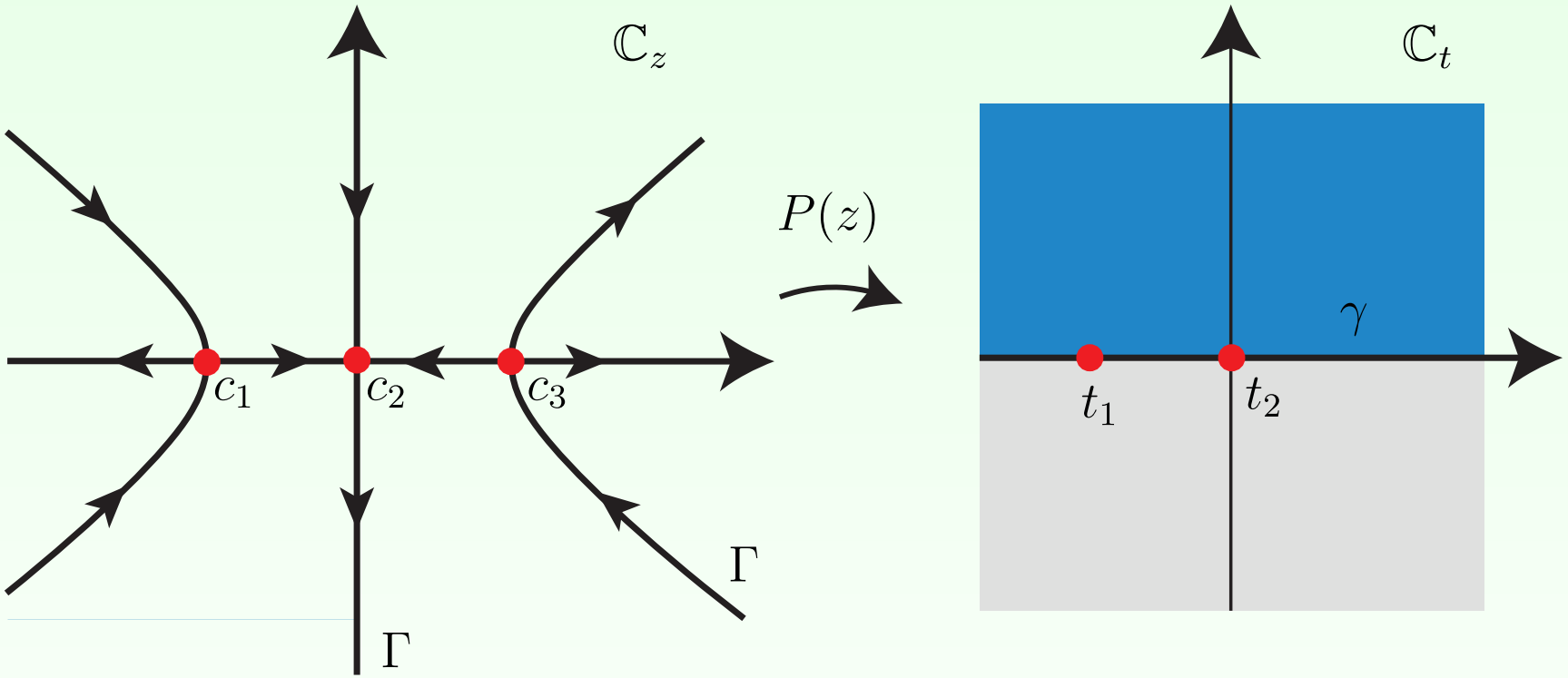


Figure: La curva generadora Γ del polinomio $P(z) = -2z^2 + z^4$ es la unión de la recta real $\{y = 0\}$, la recta imaginaria $\{x = 0\}$ y la hipérbola $\{x^2 - y^2 = 1\}$.

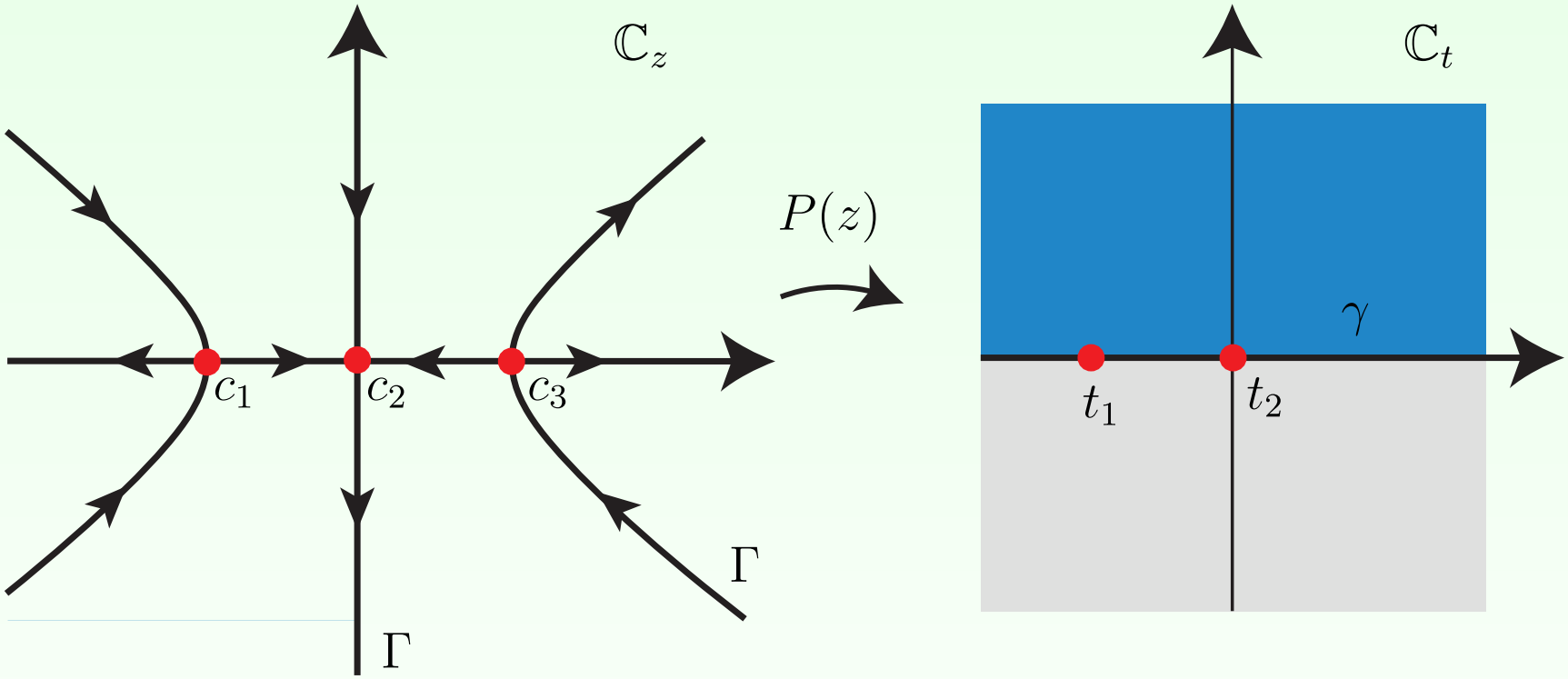


Figure: El polinomio $P(z)$ determina continuamente los colores azul o blanco en $\mathbb{C}_z \backslash \Gamma$.

- La curva generadora Γ determina una teselación $\mathfrak{M}_\Gamma$ del plano $\mathbb{C}_z$ como sigue

$$\mathbb{C}_z \backslash \Gamma = \underbrace{T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4}_{\substack{\text{teselas} \\ \text{azules}}} \cup \underbrace{T_1' \cup T_2' \cup T_3' \cup T_4'}_{\substack{\text{teselas} \\ \text{blancas}}} \doteq \mathfrak{M}_\Gamma \quad (6)$$

- Un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es azul si y solo si $P(z_0)$ es azul en $\mathbb{C}_t$,

  un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es blanco si y solo si $P(z_0)$ es blanco en $\mathbb{C}_t$.

¡La teselación $\mathfrak{M}_\Gamma$ es la forma de $P(z) = -2z^2 + z^4$!

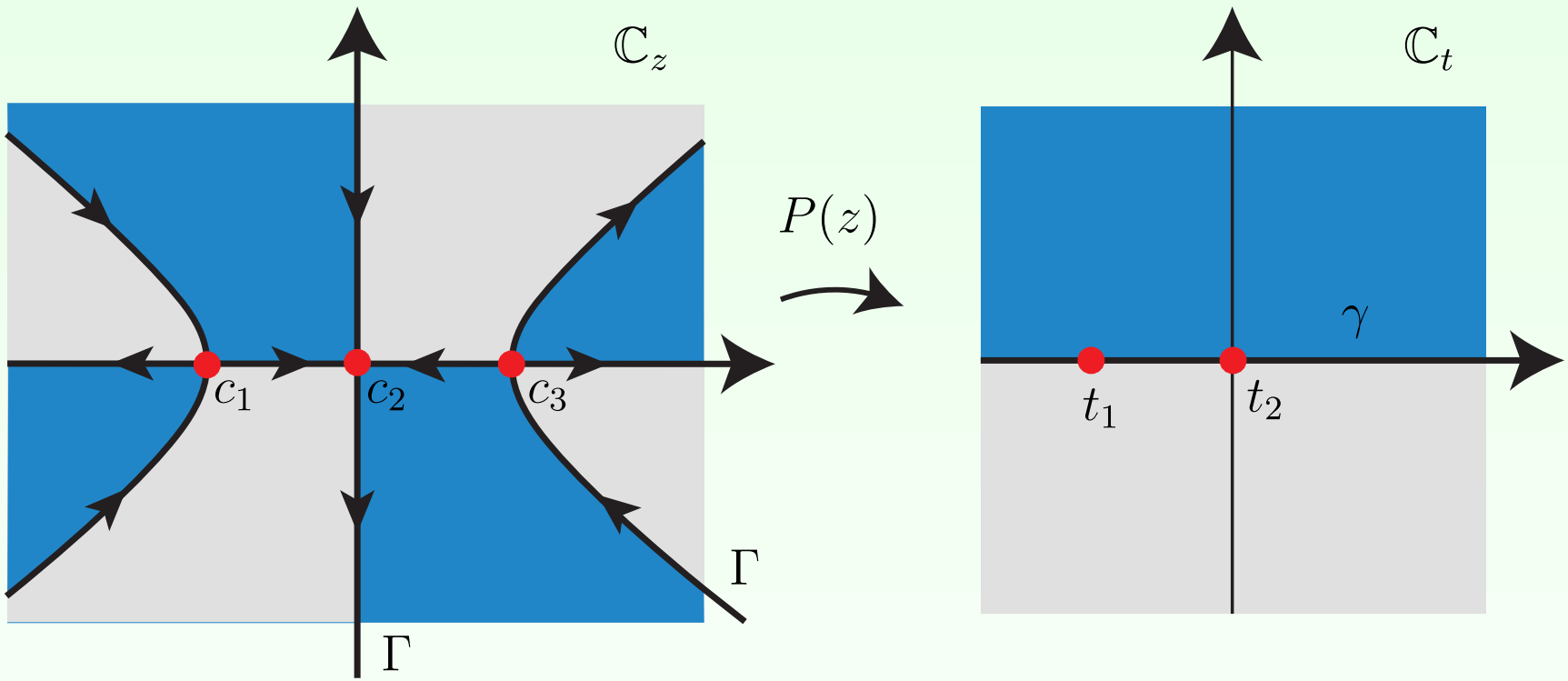
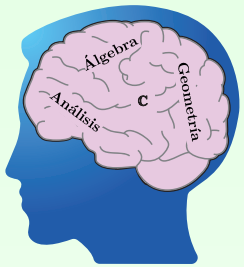


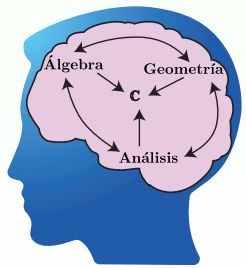
Figure: El "Teorema" es: teselación $\mathfrak{M}_\Gamma$ en el plano $\mathbb{C}_z$ para el polinomio $P(z) = -2z^2 + z^4$, puntos críticos y valores críticos en rojo, puntos coocriíticos en verde.



$$P(z) = -2z^2 + z^4 \longrightarrow \begin{matrix}\text{valores}\\ \text{críticos}\\ \{t_1,\ t_2\}\end{matrix} \longrightarrow \gamma \subset \mathbb{C}_t$$

Teselación de $P(z)$

$$\Gamma \subset \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_z \backslash \Gamma = \underbrace{T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4}_{\begin{matrix}\text{teselas}\\ \text{azules}\end{matrix}} \cup \underbrace{T_1' \cup T_2' \cup T_3' \cup T_4'}_{\begin{matrix}\text{teselas}\\ \text{azules}\end{matrix}}.$$



¿Qué hemos aprendido?

¿Cuál es el teorema?

¿Cómo hacemos matemáticas?

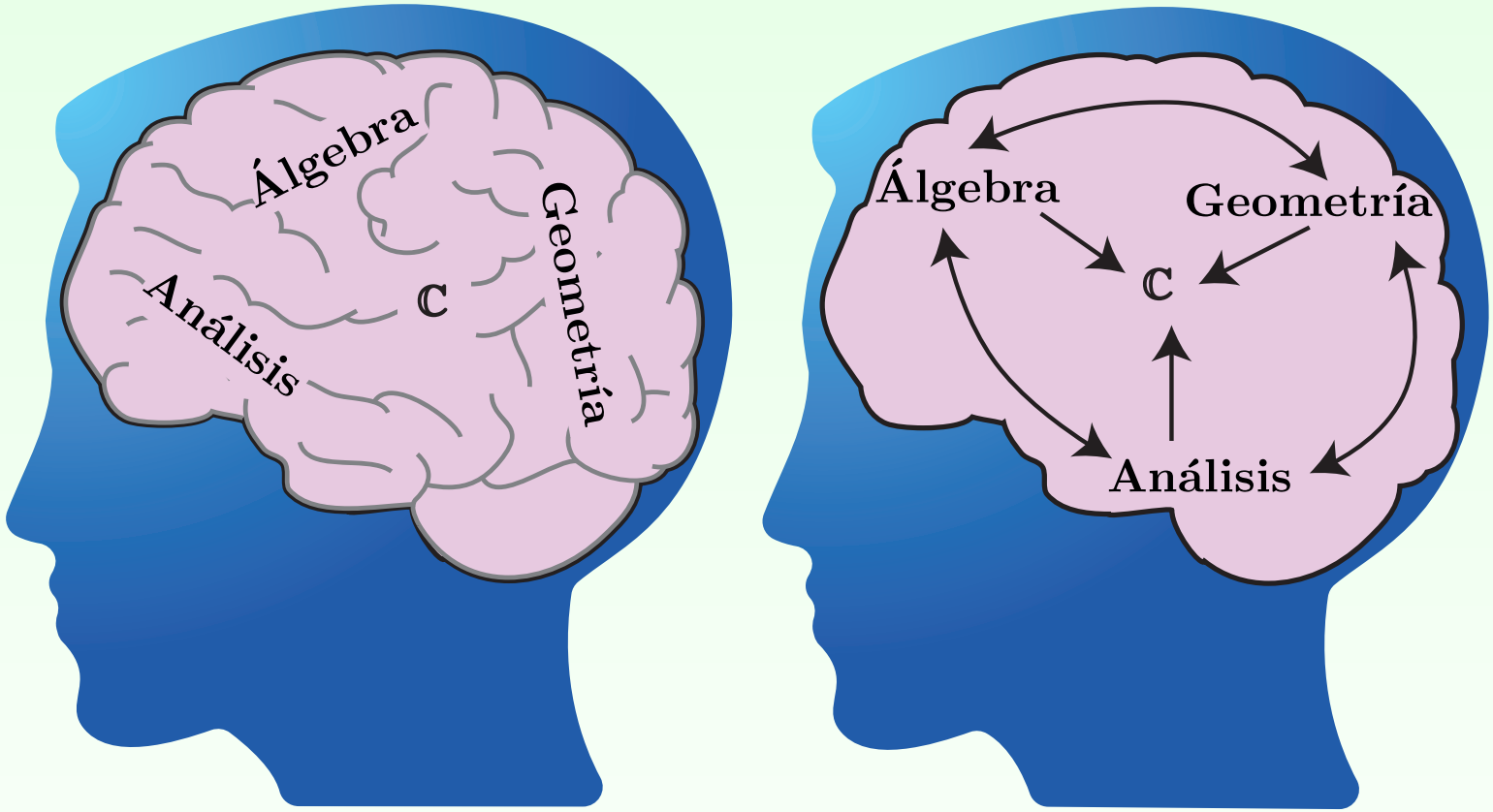


Figure: Objetos matemámaticos aparentemente distintos, al madurar en nuestro intelecto confluyen. ¿Ejemplos?

$a^2 + b^2 = c^2, \ldots$

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1, \ldots$$

$$sen^2 z + cos^2 z = 1, \ldots$$

¿Como hacemos matemáticas?

1. Buscamos una pregunta u objeto.
2. Hacemos experimentos, para entender como funciona el objeto.
3. El **"Teorema"** es una frase corta críptica (casi un poema) que describe el funcionamiento del objeto.

Teorema de Schwarz–Klein [1].

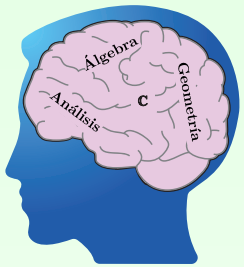
Dada una función racional

$$\mathbb{f} : \mathbb{C}_z \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}_t \cup \{\infty\}$$

y $\gamma(t) : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}_z \cup \{\infty\}$ una trayectoria cerrada, sin autointersección, que recorre todos sus valores críticos una vez (incluyendo el ∞ cuando este es un valor crítico).
Existe un mosaico

$$\mathfrak{M}_\Gamma$$

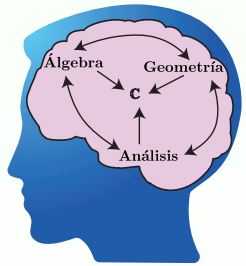
a dos colores en $\mathbb{C}_z$ asociado a la función.



$$P(z) \longrightarrow \begin{matrix}\text{valores}\\ \text{críticos}\\ \{t_1,\ldots,t_\iota,\ldots,t_\mathfrak{n}\}\end{matrix} \longrightarrow \gamma \subset \mathbb{C}_t$$

Teselación de $P(z)$

$$\Gamma \subset \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_z \backslash \Gamma = \underbrace{T_1 \cup \cdots \cup T_\ell \cup \cdots \cup T_n}_{\begin{matrix}\text{teselas}\\ \text{azules}\end{matrix}} \cup \underbrace{T_1' \cup \cdots \cup T_\ell' \cup \cdots \cup T_n'}_{\begin{matrix}\text{teselas}\\ \text{azules}\end{matrix}}.$$



Ejemplo. Polinomio con cuatro valores críticos, no alineados.

Consideramos

$$P(z) = (-2+2i)z^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{4}{3}i\right) z^3 - 2z^4 + \frac{4}{5}z^5.$$

Sus puntos críticos son

$$c_1 = 0, \;\; c_2 = 1, \;\; c_3 = -i, \;\; c_4 = 1+i.$$

Sus valores críticos son

$$P(0) = 0, \;\; P(1) = -\frac{8}{15} + \frac{2}{3}i, \;\; P(-i) = \frac{4}{3} - \frac{2}{15}i, \;\; P(1+i) = -\frac{28}{15} + \frac{4}{5}i.$$

Proponemos γ como la parábola que **casi** pasa por los cuatro valores críticos

$$\gamma \cong \left\{ y - \frac{19}{176}x^2 + \frac{161}{660}x = 0 \right\} \subset \mathbb{C}_t.$$

Tenemos la curva generadora

$$\Gamma \cong \left\{ \mathfrak{Im}\left(P(z)\right) - \frac{19}{176}\mathfrak{Re}\left(P(z)\right)^2 + \frac{161}{660}\mathfrak{Re}\left(P(z)\right) = 0 \right\} \subset \mathbb{C}_z.$$

Proponemos γ como la parábola que **casi** pasa por los cuatro valores críticos

$$\gamma \cong \left\{ y - \frac{19}{176}x^2 + \frac{161}{660}x = 0 \right\} \subset \mathbb{C}_t.$$

Tenemos la curva generadora

$$\Gamma \cong \left\{ \mathfrak{Im}\left(P(z)\right) - \frac{19}{176}\mathfrak{Re}\left(P(z)\right)^2 + \frac{161}{660}\mathfrak{Re}\left(P(z)\right) = 0 \right\} \subset \mathbb{C}_z.$$

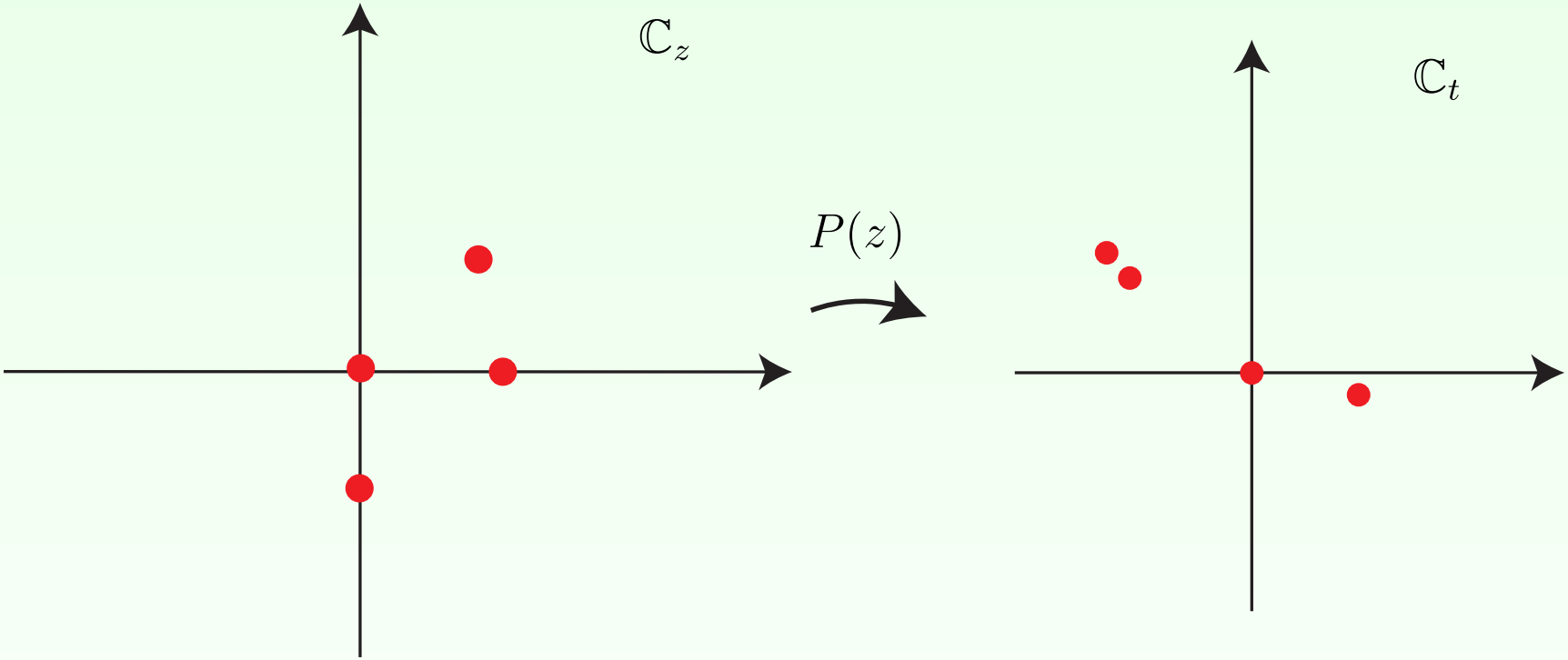


Figure:

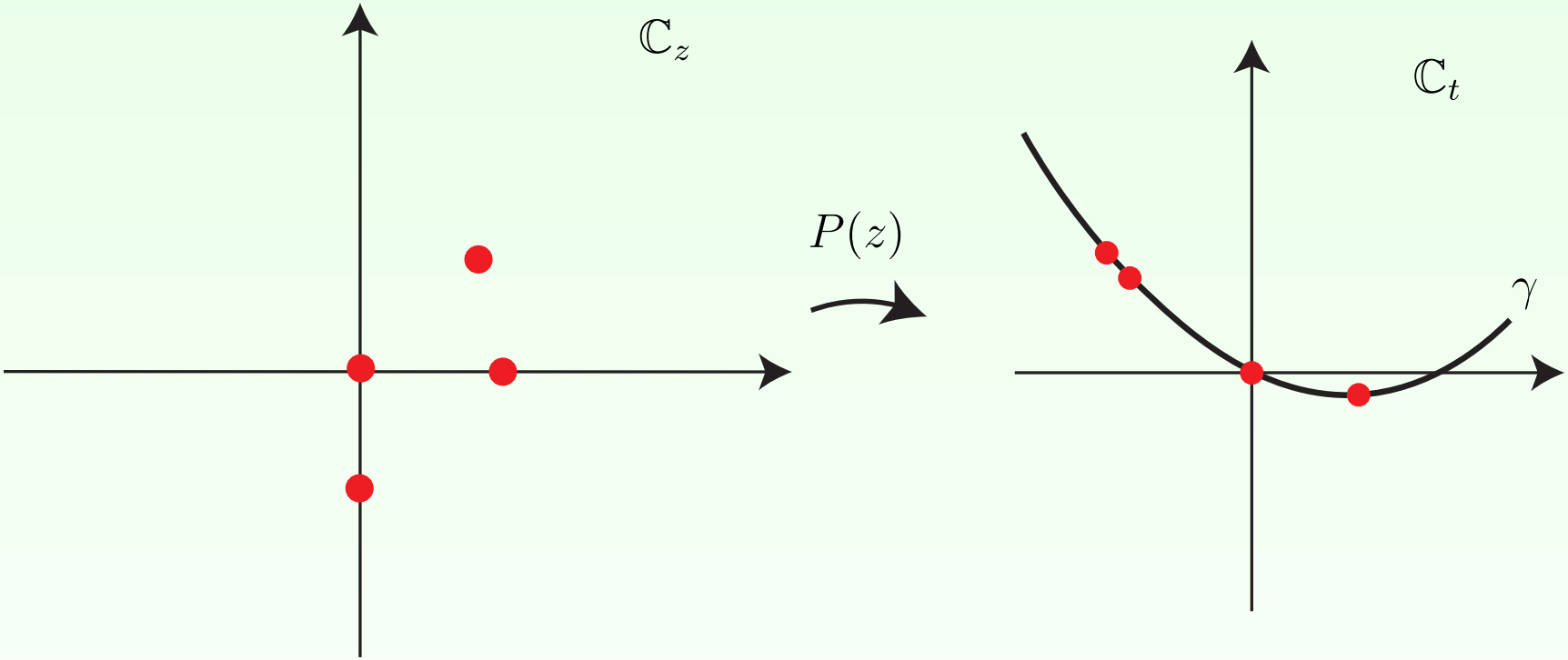


Figure:

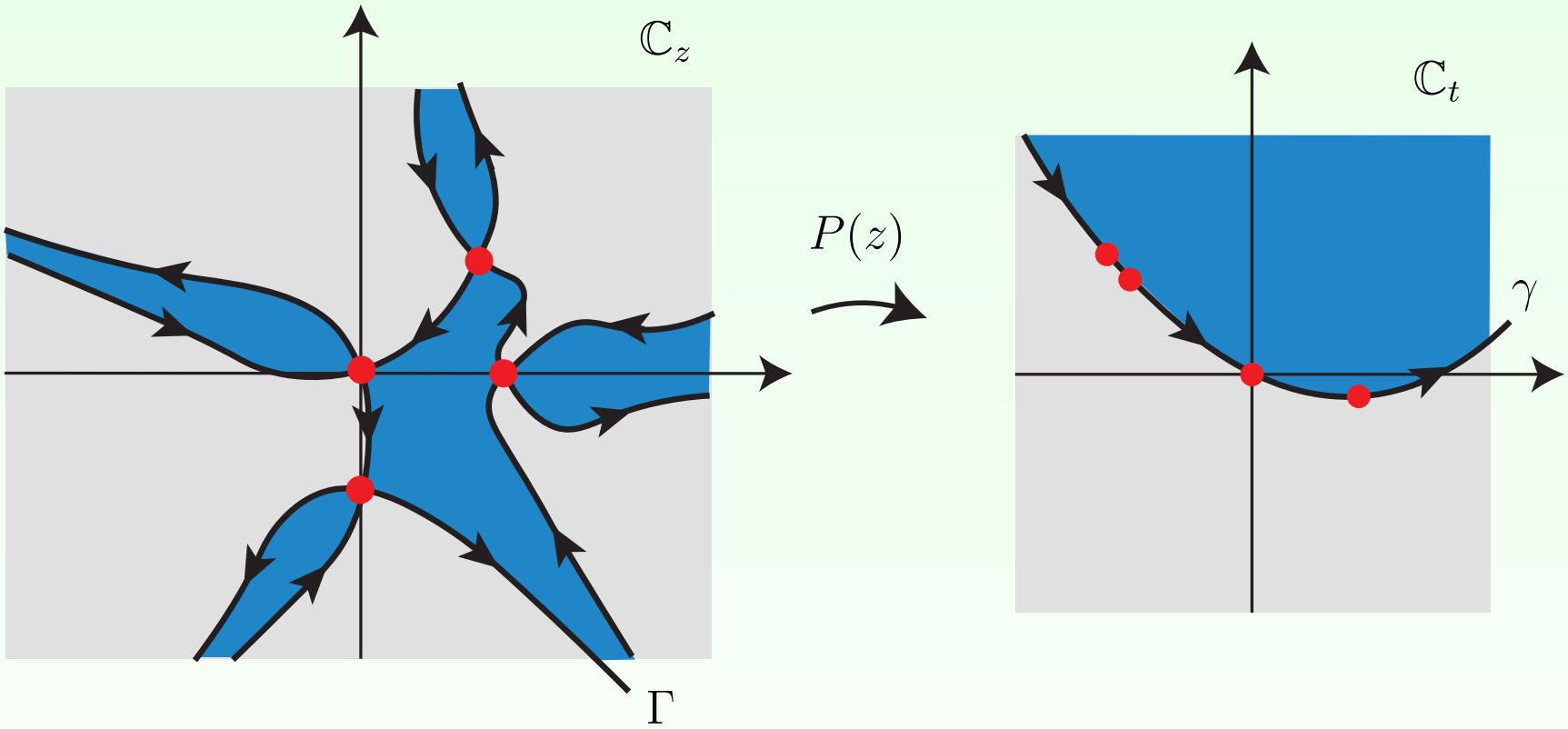
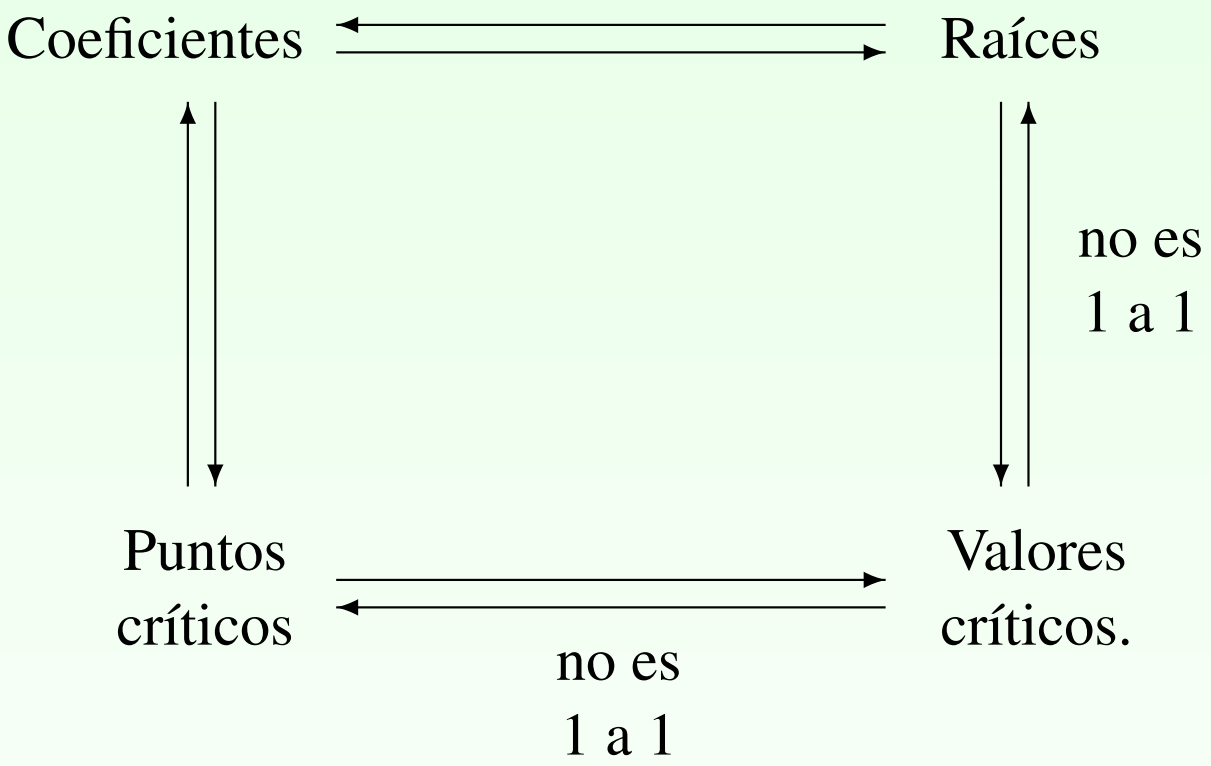


Figure:

Tenemos un nuevo diagrama



Teorema. R. Thom [7], [6].

Toda colección de $n-1$ valores críticos es $\mathbb{C}_t$ es realizada/ocurre para un polinomio de grado n, no único.

¿Qué es la forma de un polinomio $P(z)$?

Consideramos el conjunto de las transformaciones

$$Aut(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{rcl} T : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az + b \end{array} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C}, \;\; a \neq 0 \right\},$$

llamadas automorfismos holomorfos de $\mathbb{C}$ o transformaciones afines complejas.
En particular, las isometrías de $\mathbb{R}^2$ son un subgrupo de $Aut(\mathbb{C})$.

Lema.

1. $Aut(\mathbb{C})$ es un grupo bajo la composición.
2. Dada una transformación $\tau : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e invertible, entonces τ pertenece a $Aut(\mathbb{C})$.

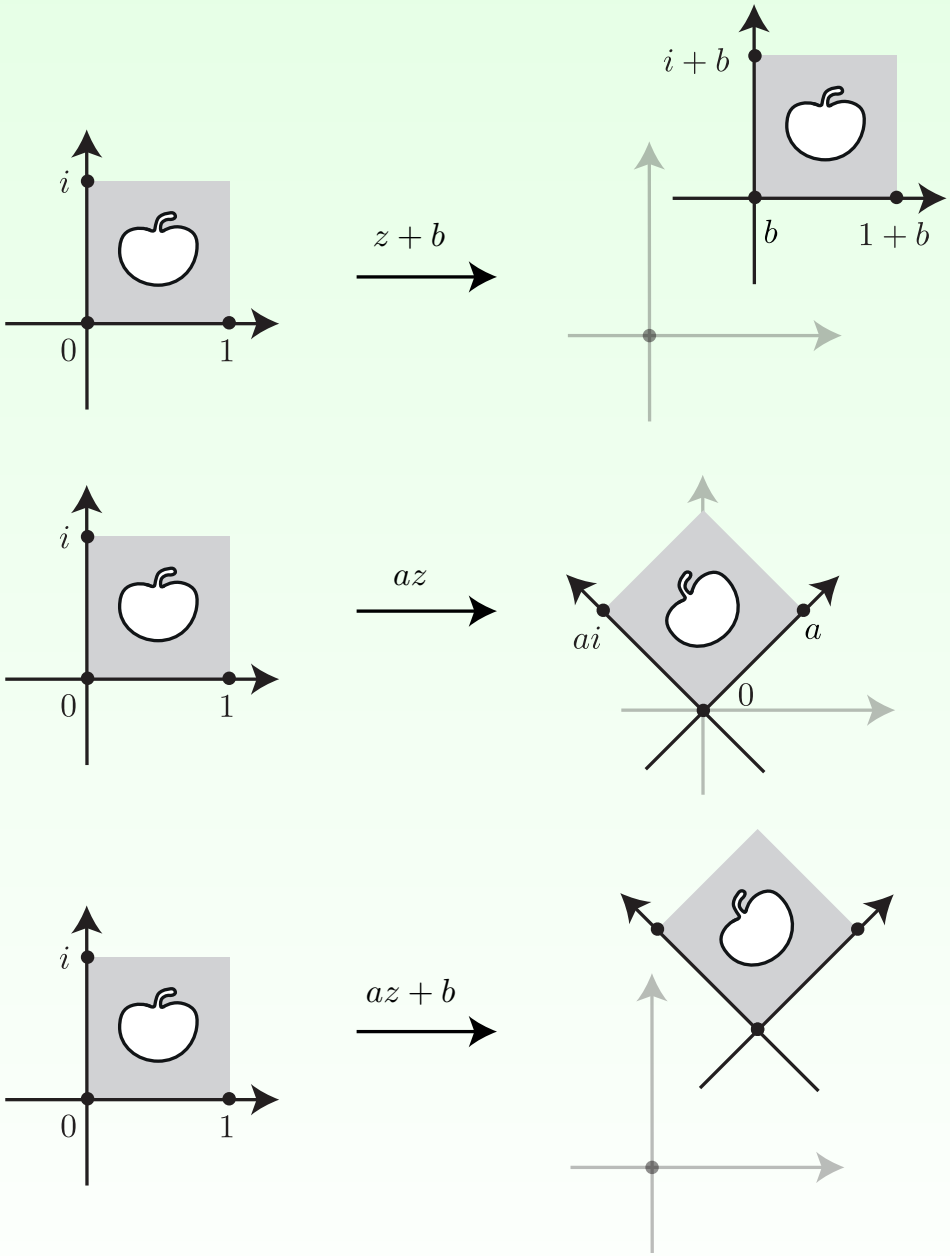


Figure: Transformaciones afines complejas.

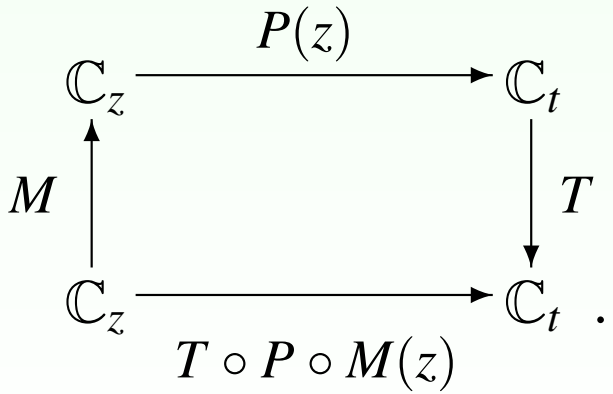
$Aut(\mathbb{C})$ cambia los polinomios o actúa en el espacio de polinomios

$$\mathbb{C}[z] = \left\{ P(z) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; P(z) \text{ es polinomial} \right\}.$$

¿Cómo actúa?

$$\begin{array}{rcl} Aut(\mathbb{C}) \times Aut(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}[z] & \longrightarrow & \mathbb{C}[z] \\ \Big(T, M,\, P(z)\Big) & \longmapsto & T \circ P \circ M(z). \end{array}$$

i.e. el grupo $Aut(\mathbb{C})$ actúa como cambios de coordenadas en el dominio y contradominio de $P(z)$; el diagrama lo ilustra



Definición. (Felix Klein).

Los polinomios $P(z)$ y $T \circ P \circ M(z)$ tienen la misma forma.

Felix Klein la inventó en el llamado *Programa de Erlangen* publicado en 1872.

Teorema.

Las teselaciones de $P(z)$ y de $T \circ P \circ M(z)$ coinciden,
i.e. bajo los cambios de coordenadas M, $T \in Aut(\mathbb{C})$
la teselación de $P(z)$ es transformada a la teselación de $T \circ P \circ M(z)$.

Ejemplo.

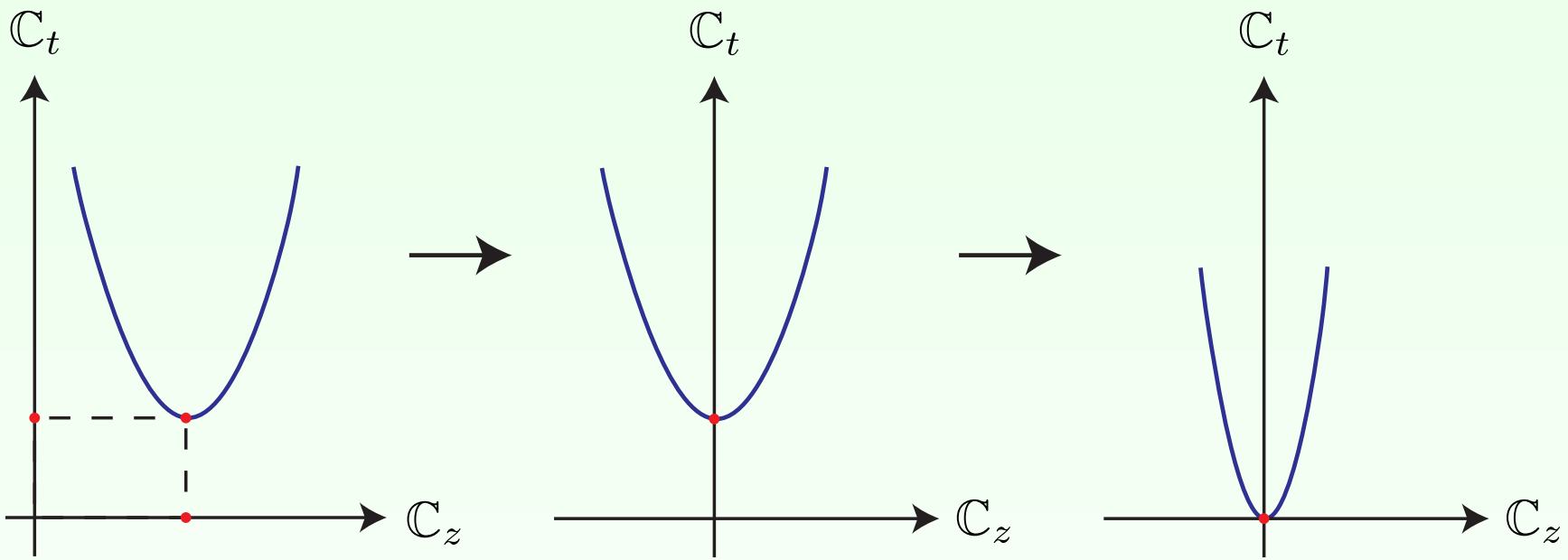


Figure: El polinomio general $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ es equivalente bajo la acción de $Aut(\mathbb{C})$ con el monomio z^2, *i.e.* es posible reducir/eliminar los tres coeficientes a_0, a_1, a_2 de $P(z)$.

Prueba del Teorema de Schwarz–Klein.
Consideramos

$$\mathbb{f}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_t$$

una función racional de grado $n \geq 2$. Definimos como $R_{\mathbb{f}} \subset \widehat{\mathbb{C}}_t$ al conjunto desordenado de valores críticos de $\mathbb{f}$ (abusando de la notación)

$$R_{\mathbb{f}} = (t_1, \ldots, t_\iota, \ldots, t_{\mathfrak{n}}), \quad \iota \in 1, \ldots, \mathfrak{n}, \tag{7}$$

Dada

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, \mathfrak{n}] \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{C}}_t \\ \tau & \longmapsto & \gamma(\tau), \end{array} \qquad \gamma(0) = \gamma(\mathfrak{n}) = t_{\mathfrak{n}},\ \gamma(\iota) = t_\iota, \tag{8}$$

una trayectoria de Jordan orientada continua que pasa por los valores críticos $R_{\mathbb{f}}$, donde

$$\overrightarrow{\gamma(\iota - 1, \iota)} = \{\gamma(\tau) \mid \iota - 1 < \tau < \iota\}$$

denota la pieza orientada de $\gamma(\iota - 1)$ to $\gamma(\iota)$ sin sus puntos extremos.

En el lenguaje de la teoría de gráficas,

$$\gamma = \{V(\gamma); E(\gamma)\} \subset \mathbb{C}_t$$

es una gráfica conexa plana y orientada que posee
$\mathfrak{n}$ vértices

$$V(\gamma) = \{\underbrace{t_1, \ldots, t_\iota, \ldots, t_\mathfrak{n}}_{\text{valencia } 2}\}, \tag{9}$$

$\mathfrak{n}$ aristas orientadas

$$E(\gamma) = \gamma\overrightarrow{(\iota - 1, \iota)} \quad \iota \in 0, 1, \ldots, \mathfrak{n}, \ (mod\ \mathfrak{n}). \tag{10}$$

γ determina una teselación $\mathfrak{M}_\gamma$ de la esfera de Riemann

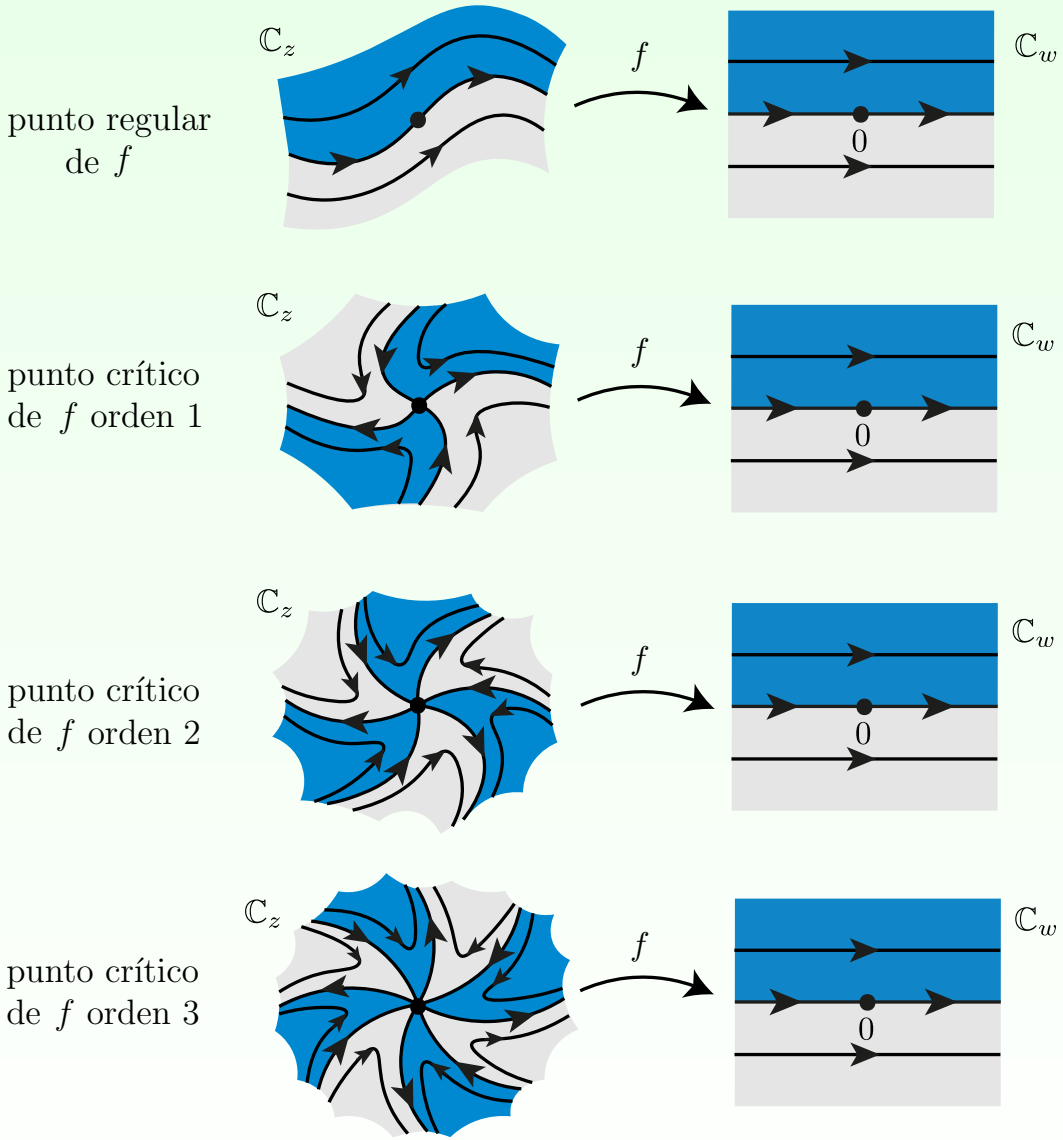
$$\mathbb{C}_t \backslash \gamma = \underbrace{T}_{\substack{\text{tesela} \\ \text{azul}}} \cup \underbrace{T'}_{\substack{\text{tesela} \\ \text{blanca}}}. \tag{11}$$

Aquí la trayectoria γ mantiene la tesela azul o la cara T a su izquierda, *i.e.* el índice de cualquier punto interior $z_0 \in T$ con respecto a γ es 1, y T' es el lado derecho de γ. Hay un etiquetado para los vértices

$$\mathcal{L}_0 : V(\gamma) \longrightarrow \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}, \quad t_\iota \longmapsto \iota. \tag{12}$$

$(\mathbb{f}, \gamma)$ **es la entrada del algoritmo de Schwarz–Klein**

El comportamiento de los puntos críticos de un polinomio o función racional en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ permite aplicar el algoritmo de Schwarz–Klein.



En la teoría de gráficas **jalar** γ **bajo** $\mathbb{f}$ esta bien definida (llamada operación de pullback). Consideramos

$$C_{\mathbb{f}} = \{z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_{\mathfrak{m}}\}, \quad j \in 1, \ldots, \mathfrak{m}, \tag{13}$$

el punto crítico de $\mathbb{f}$. Es sencillo que $2 \leq \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m} \leq 2n - 2$.
Un *punto cocrítico* $\zeta_{\mathfrak{k}} \in \widehat{\mathbb{C}}_z \backslash C_{\mathbb{f}}$ *de* $\mathbb{f}$ es tal que $\mathbb{f}(\zeta_{\mathfrak{k}}) = t_\iota$. La función restringida

$$\mathbb{f} : \widehat{\mathbb{C}} \backslash (\{z_j\} \cup \{\zeta_{\mathfrak{k}}\}) \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \backslash \{t_\iota\}$$

es una cubierta no ramificada. Existen $\mathfrak{n}n \geq 4$ segmentos

$$\mathbb{ff}^{-1}\left(\cup_j \gamma\overrightarrow{(j-1,j)}\right) \doteq \left\{\Gamma\overrightarrow{(0,1)}_1,\ldots,\Gamma\overrightarrow{(0,1)}_\ell,\ldots,\Gamma\overrightarrow{(0,1)}_n,\right.$$
$$\vdots$$
$$\left.\Gamma\overrightarrow{(\mathfrak{n}-1,\mathfrak{n})}_1,\ldots,\Gamma\overrightarrow{(\mathfrak{n}-1,\mathfrak{n})}_\ell,\ldots,\Gamma\overrightarrow{(\mathfrak{n}-1,\mathfrak{n})}_n\right\}, \tag{14}$$

cuyos puntos extremos son críticos $\{z_j\}$ y/o puntos cocríticos $\{\zeta_{\mathrm{k}}\}$.

El grafo orientado

$$\mathbb{f}^*\gamma = \{\mathbb{f}^*V(\gamma); \mathbb{f}^*E(\gamma)\}$$

tiene $\mathfrak{r}$ vértices ($2 \leq \mathfrak{r} \leq 2n^2 - 4n + 2$),

$$V(\mathbb{f}^*\gamma) = \{\underbrace{z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_{\mathfrak{m}}}_{\text{valencia} \geqslant 4}, \underbrace{\ldots, \zeta_{\mathtt{k}}, \ldots}_{\text{valencia 2}}\}, \tag{15}$$

$\mathfrak{n}n$ bordes orientados

$$E(\mathbb{f}^*\gamma) = \left\{\Gamma\overrightarrow{(z_j, z_i)}, \Gamma\overrightarrow{(\zeta_{\mathtt{k}}, z_j)}, \Gamma\overrightarrow{(z_j, \zeta_{\mathtt{k}})}, \Gamma\overrightarrow{(\zeta_{\mathtt{k}}, \zeta_{\mathtt{s}})}\right\} \tag{16}$$

adecuado para j, i, $\mathtt{k}$, $\mathtt{s}$,

$$\mathbb{f}^*\gamma = (V(\mathbb{f}^*\gamma), E(\mathbb{f}^*\gamma))$$

y determina una teselación $\mathfrak{M}_{\mathbb{f}^*\gamma}$, es decir

$$\widehat{\mathbb{C}}_z \backslash \mathbb{f}^*\gamma = \underbrace{T_1 \cup \ldots \cup T_\ell \cup \ldots \cup T_n}_{\text{tesela azul}} \cup \underbrace{T'_1 \cup \ldots \cup T'_\ell \cup \ldots \cup T'_n}_{\text{tesela blanca}} . \tag{17}$$

Si

$$\mathbb{f}(z_j) = t_\iota \quad \text{y} \quad \mathbb{f}(\zeta_{\mathrm{k}}) \doteq t_\iota, \quad \zeta_{\mathrm{k}} \text{ cocrítico},$$

entonces el etiquetado de retroceso es

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L} : V(\mathbb{f}^*\gamma) & \longrightarrow & \{1, \ldots, \mathfrak{n}\} \\ z_j & \longmapsto & \iota \\ \zeta_{\mathrm{k}} & \longmapsto & \iota. \end{array} \tag{18}$$

La salida del algoritmo de Schwarz–Klein es $\mathbb{f}^*\gamma$ y la teselación $\mathfrak{M}_{\mathbb{f}*\gamma}$.

• La salida del algoritmo de Schwarz–Klein es $\mathbb{f}^*\gamma$ y la teselación $\mathfrak{M}_{\mathbb{f}*\gamma}$

puede entenderse como **la forma de** $\mathbb{f}$.

• Malas noticias:
la teselación $\mathfrak{M}_{\mathbb{f}*\gamma}$ depende de la elección de γ de una manera fuerte.

• Buenas noticias:
El algoritmo de Schwarz–Klein aplica para
muchas otras funciones (con singularidades esenciales) y
en cualquier superficie Riemann, no solo en $\widehat{\mathbb{C}}_z$.

A continuación las figuras de teselaciones en la esfera para polinomios de grado 3, 4 y funciones racionales.

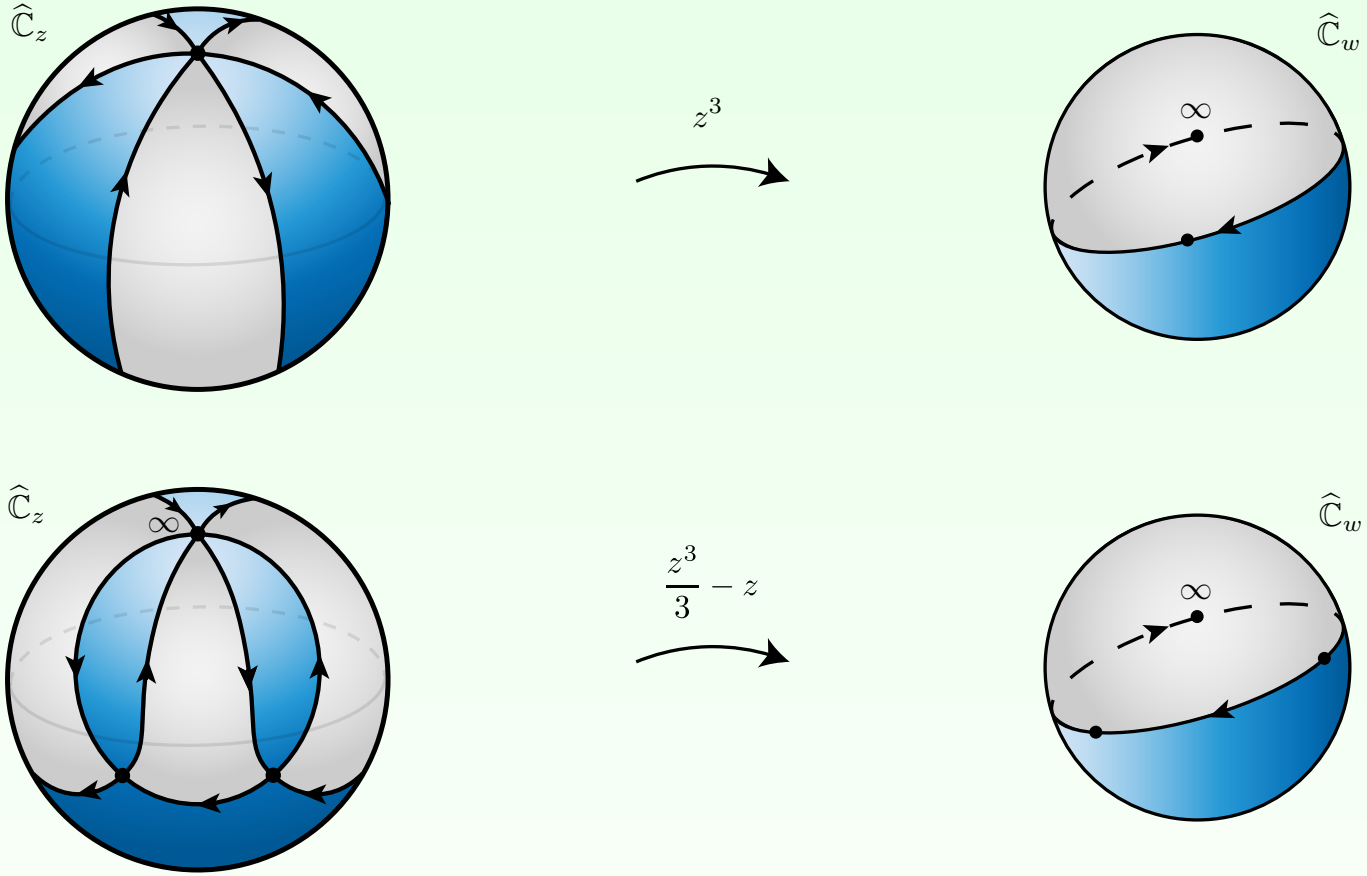


Figure: Álbum de teselaciones en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ para polinomios cúbicos.

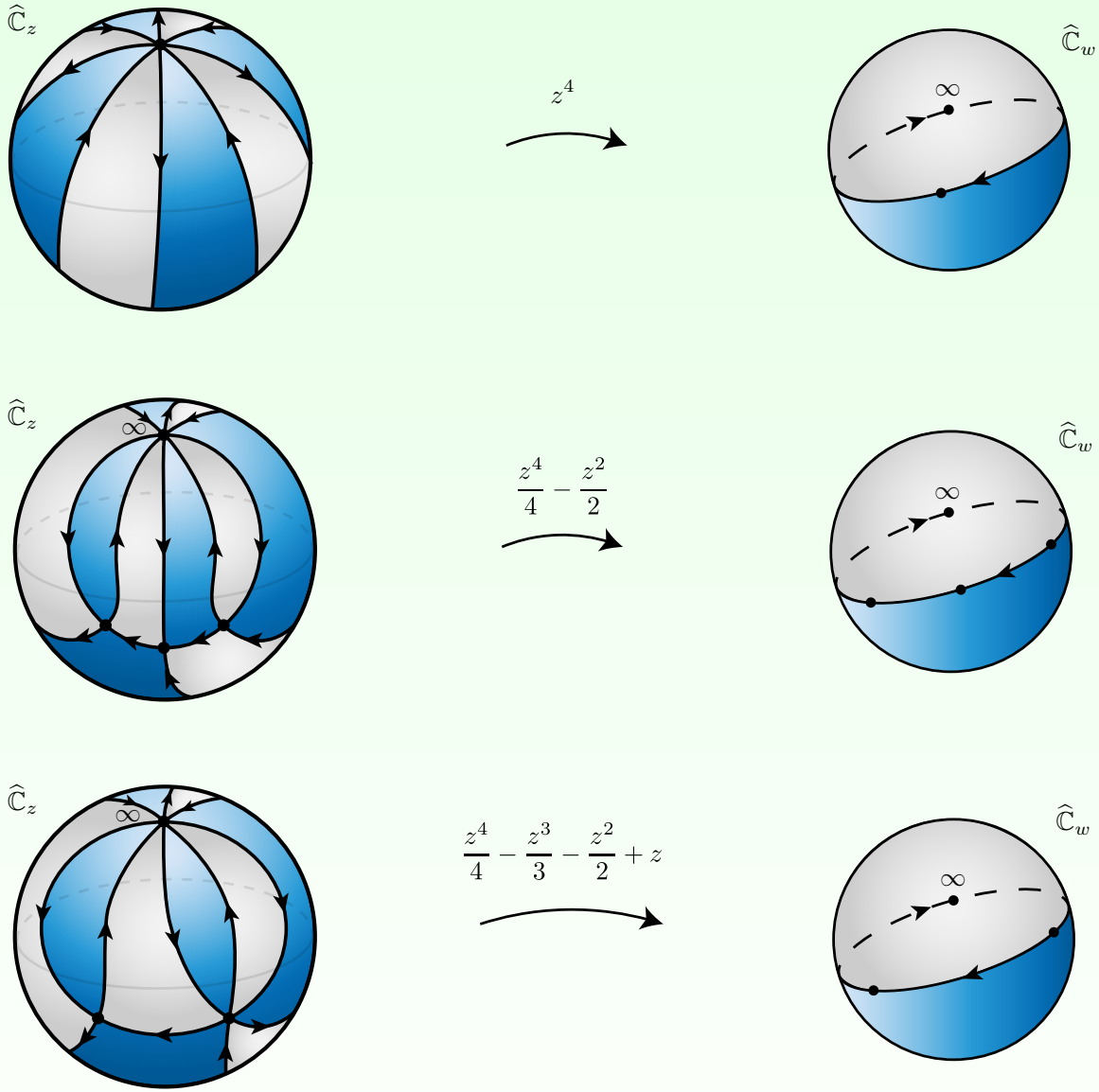


Figure: Álbum de teselaciones en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ para polinomios cúarticos.

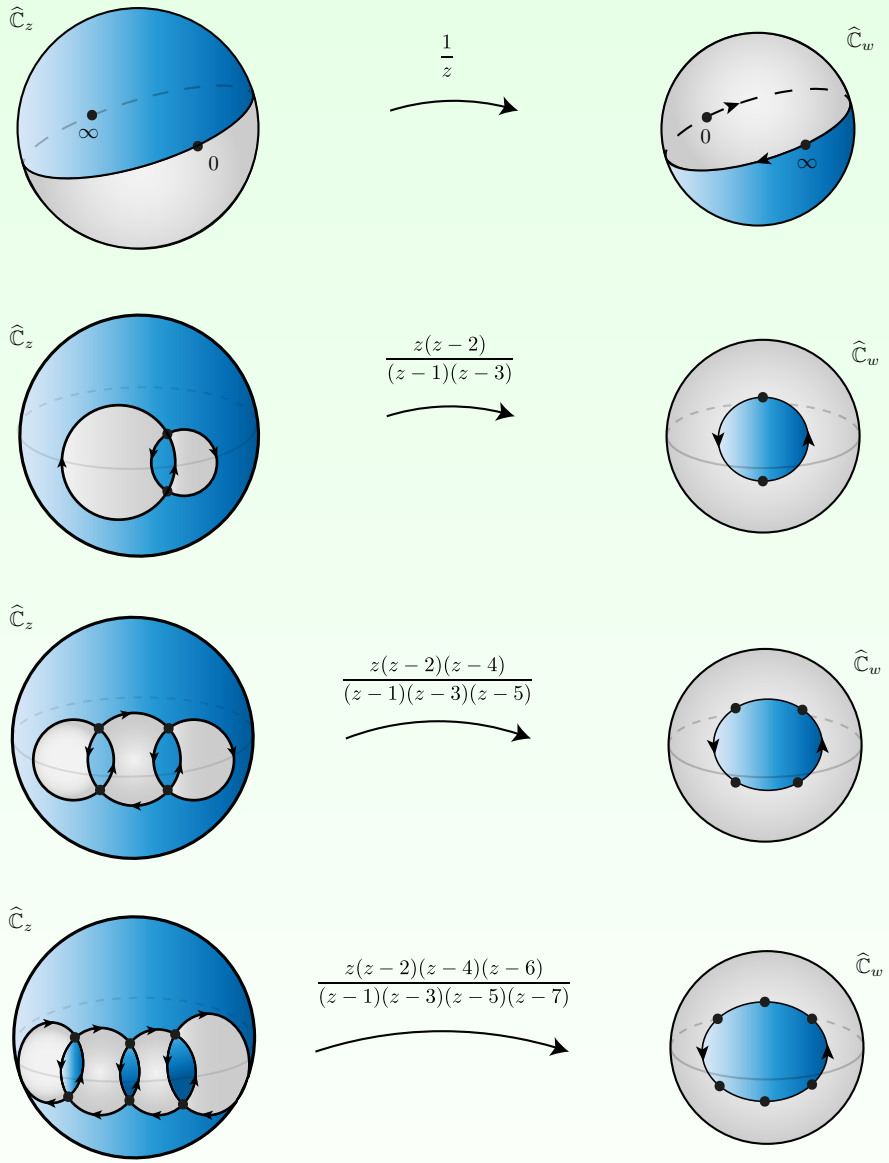


Figure: Teselaciones en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ para algunas funciones racionales.

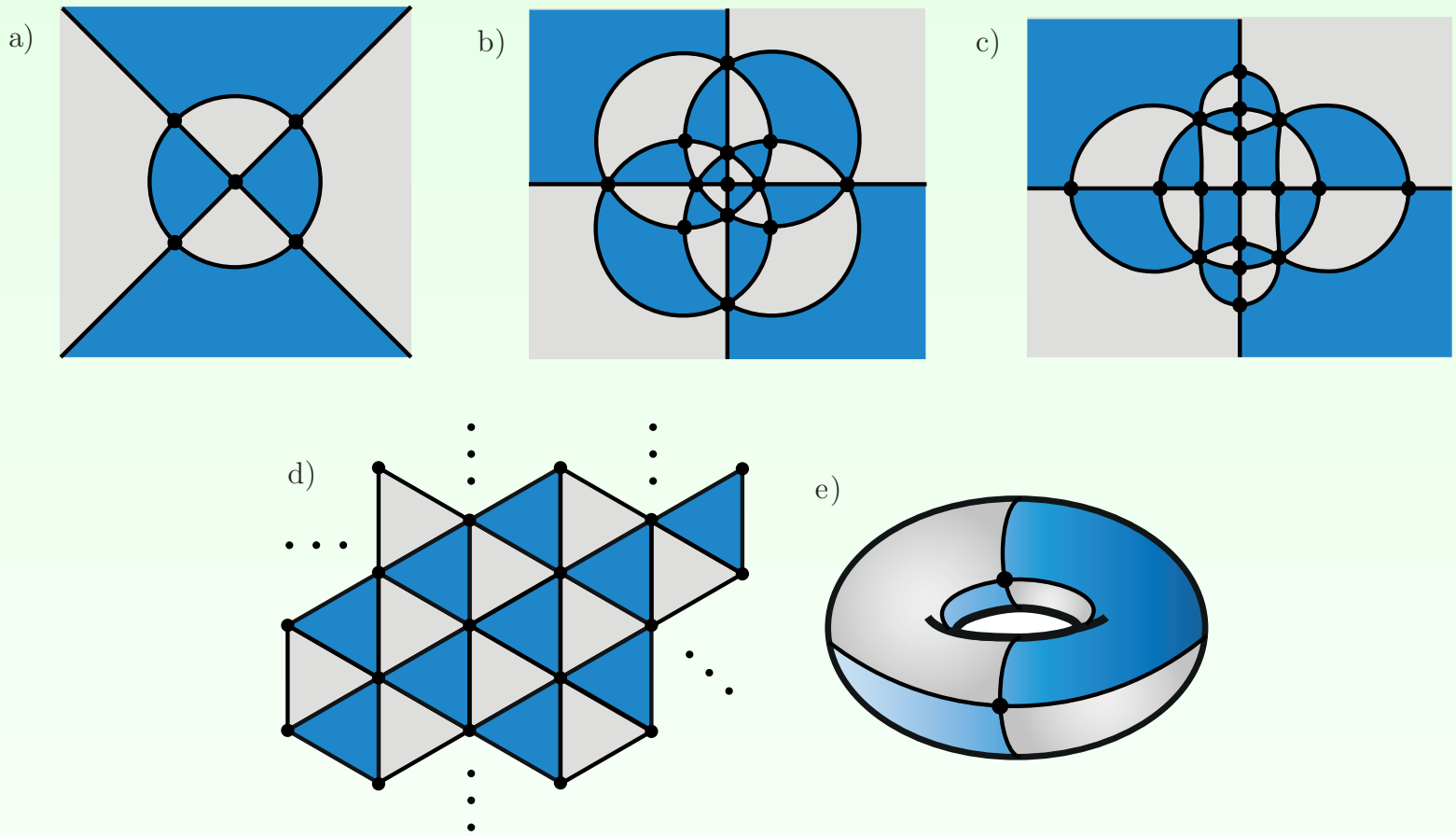


Figure: Tres teselaciones Schwartz–Klein (a), (b), (c) de funciones racionales en $\mathbb{C}_z$, y dos teselaciones en el plano (d) y el toro (e) la función Weierstrass $\wp$.

Un proyecto actual es:

estudiar/establecer una correspondencia

$$\mathfrak{M}_{\mathbb{f}^*\gamma} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{f} : M \longmapsto \widehat{\mathbb{C}}_t$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{teselaciones} \\ \text{mosaicos} \\ \text{azul y blanco} \end{array} \right\} \qquad \{\text{funciones analíticas}\}$$

Teorema de Belyĭ [2], [5].

Para teselaciones por triángulos en la esfera con alternancia de colores azul y blanco, la correspondencia

$$\mathfrak{M}_{\mathbb{f}^*\gamma} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{f} : M \longmapsto \widehat{\mathbb{C}}_t$$

$$\text{teselaciones} \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{funciones racionales} \\ \text{con tres} \\ \text{valores críticos} \end{array} \right\}$$

es verdadera.

¿ Dónde está el problema (para la prueba)?

Para κ–gons $\kappa \geq 3$, la correspondencia de teselaciones a funciones racionales es falso.

Para teselaciones que tienen como mosaicos κ–gons, $\kappa \geq 3$.
Los puntos cocríticos y los puntos críticos en los κ–gons deben coincidir a nivel global.

Example

Un polinomio de grado cuatro

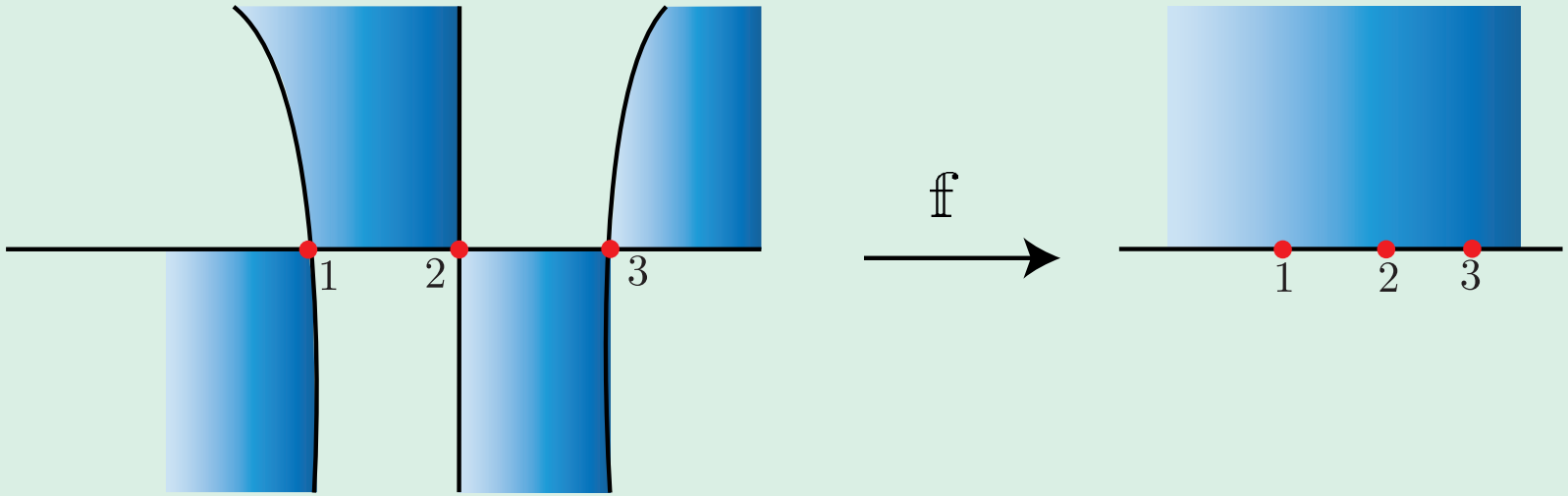


Figure: Una mala elección para las secuencias de puntos críticos (y puntos cocríticos) en el límite de los mosaicos ...

¡ es imposible!

Thuston's example 2010

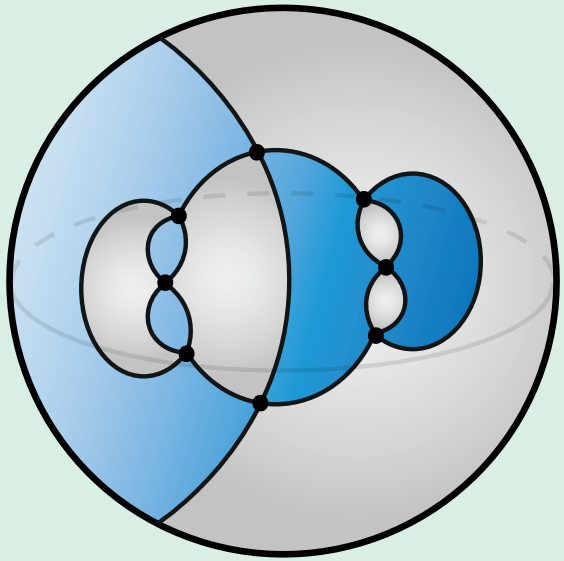


Figure: La teselación anterior no pueder ser realizada por ninguna función raicional $\mathbb{f} : \widehat{\mathbb{C}}_z \longmapsto \widehat{\mathbb{C}}_t$. De hecho, las secuencias de puntos críticos (y puntos cocríticos) en el límite de los mosaicos se vuelven siempre contradictorias.

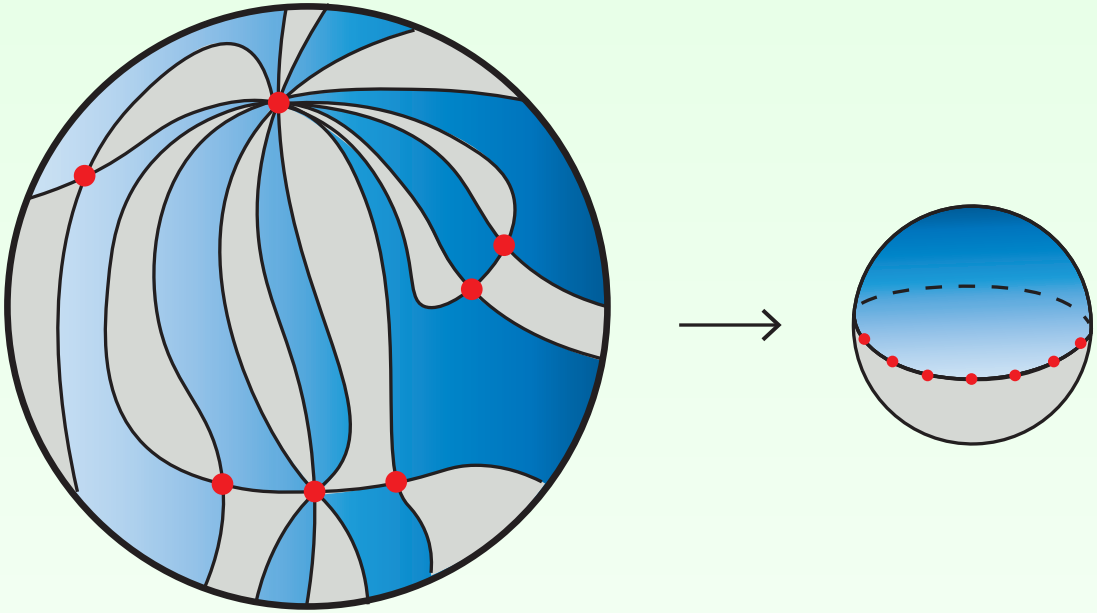


Figure:

Teorema (L. Johanna González Cely)

Si una teselación solo tiene silla de montar en $\mathbb{C}$ y cada mosaico tiene ∞ en su límite,
entonces se realiza por un función polinomial.

Preguntas / proyectos futuros.

• Dada una teselación realizable en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ calcular explícitamente la función racional correspondiente (encontrar los coeficientes adecuados).

• Si todos los valores críticos están en una línea en un círculo, entonces $\mathbb{f}^*\gamma$ tiene una ecuación algebraica (hasta la transformación de Mobius)

$$\{\mathfrak{Im}\,(\mathbb{f}) = 0\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_z.$$

Estudia estas curvas algebraicas.
Clasifica las funciones racionales $\mathbb{f}$ con la propiedad anterior.

• Relacionar claramente, la monodromía de una función racional con su teselación.

• Relacionar los ceros de teselaciones topológicas con otras preguntas enumerativas para funciones polinomiales y racionales.

Referencias.

[1] Alvarez–Parrilla, A.; González–Cely, L. J.; Gutiérrez–Soto, R.; Muciño–Raymundo, J.; Rodríguez–Basulto, C. H.: *Visualización de funciones complejas; siguiendo a Klein, Smale y Thurston*, Miscelánea Matemática Sociedad Matemática Mexicana, vol. 70 (2020) 77–108. https://doi.org/10.47234/mm.7005

[2] Belyĭ G. V.: *On Galois extensions of a maximal cyclotonic field*, Mah. USSR Izvestija, vol. 193, núm. 14 (1980), 247–256. http://mi.mathnet.ru/eng/izv1682

[3] Chislenko E.; Tschinke Y.: *The Felix Klein protocols,* Notices of the AMS, vol. 54, núm. 8 (2007), 960–970. http://www.ams.org/notices/200708/200708-full-issue.pdf

[4] Katz G.: *How tangents solve algebraic equations, or a remarkable geometry of discriminant varieties*, Expo. Math., Vol. 21, No. 3, (2003), 219–261. https://doi.org/10.1016/S0723-0869(03)80002-6

[5] Lando S. K.; Zvonkin A. K.: *Graphs on surfaces and their applications*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 141, Low–Dimensional Topology, II, Springer–Verlag, Berlin (2004). https://doi.org/10.1007/978-3-540-38361-1

[6] Mycielski J.: *Polynomials with Preassigned Values at Their Branching Points*, Amer. Math. Montly 77:8, 853-855, https://doi.org/10.1080/00029890.1970.11992599

[7] Thom R.: *L'équivalence de une function différentiable et d'un polynome*, Topology, 3, 2 (1965) 297–307.
https://doi.org/10.1016/0040-9383(65)90079-0