Arenario
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
Vol.1, No. 2, Septiembre 2001, pp. 87-110

Laberintos, Espejos y el Grupo Fundamental*

Elena Aguilera Miranda   Jesús Muciño Raymundo

1 Introducción

Un problema natural en matemáticas es *"clasificar formas geométricas"*. Por ejemplo puede considerarse:
- el problema de clasificar las formas de hipersuperficies polinomiales $\{f(x_1, ..., x_n) = 0\}$ en $\mathbb{R}^n$, ó
-el problema de construir robots que puedan reconocer, mediante tacto y algoritmos sencillos, figuras poliédricas en $\mathbb{R}^3$.

Estos son dos casos particulares del problema de clasificación de formas geométricas; en ellos se investiga hoy en día. Dada la complejidad del problema, es conveniente restringir el tipo de objetos a clasificar. El objetivo de esta nota es *presentar mediante ejemplos el concepto de grupo fundamental para subconjuntos del espacio euclideano* $\mathbb{R}^n$. Bosquejamos cómo a ciertos subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^n$ se les puede asociar un grupo

$$X \mapsto \pi_1(X)$$

y presentamos algunas propiedades de esta correspondencia. El grupo fundamental $\pi_1(X)$ puede interpretarse, a primera vista, como una forma de medir la "complejidad topológica global" de X. Este concepto es esencial para la tarea de clasificar superficies, nudos, gráficas, fractales, n-variedades, haces vectoriales, etc.

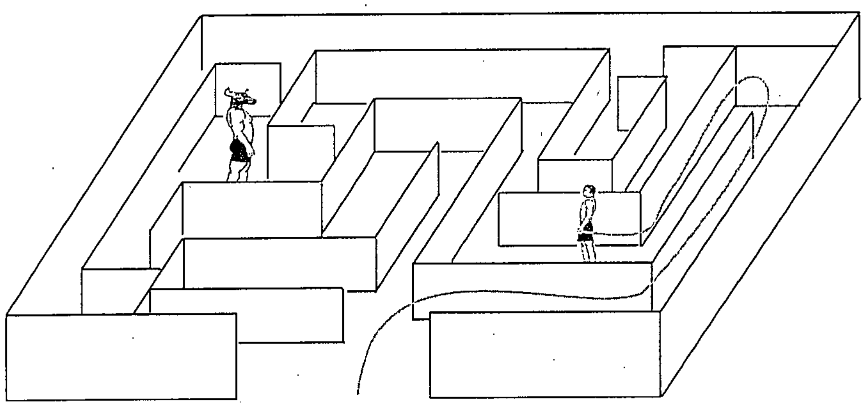
Como punto de partida suponemos conocidos los conceptos de función continua y espacio cociente bajo una relación de equivalencia. Por simplicidad hemos separado al final, en las secciones 10 y 11, un resumen técnico de los resultados y la descripción de algunos conceptos: grupos, reflexiones, etc.

2 Laberintos

Recordemos la leyenda griega de "Teseo y el Minotauro". Era el tercer año en que Minos, rey de la isla de Creta, pedía como tributo a Atenas, siete

*Apoyado por DGAPA-UNAM y Conacyt 28492-E.

doncellas y siete jóvenes para que los devorase el Minotauro, un monstruo con cabeza de toro y cuerpo de hombre, que tenía como guarida un laberinto. Esta vez, entre los elegidos, estaba Teseo un inteligente príncipe, quien pidió ser el primero en entrar al laberinto, pues pensaba matar al Minotauro antes de que devorara a alguno de ellos. La princesa Ariadna, hija de Minos, le obsequia un ovillo de seda para que lo utilice en buscar el camino de salida.



Teseo amarra uno de los extremos del ovillo de seda en la entrada del laberinto, y a medida que se introduce en éste, va desenrollando el ovillo. El Minotauro deja que Teseo se pierda, mientras él sale del laberinto y escapa. Después de caminar aleatoriamente Teseo también logra salir del laberinto[1].

Teseo, recordando su ovillo quiere recuperarlo; empieza a jalar simultáneamente la parte inicial y final del hilo. ¿Podrá de esta manera recuperarlo?

Teseo imagina los caminos que podría describir con su ovillo dentro del laberinto y nota que sólo para algunos de estos caminos es posible recuperar todo su ovillo de seda jalando de esa manera, ¿por qué?

Para analizar este problema daremos al conjunto de caminos una estructura de grupo[2]; debemos precisar los elementos del grupo y definir la operación entre ellos.

Primero hacemos notar que un *camino* tiene como características: un punto inicial, un punto final (ambos en la entrada del laberinto) y un sentido de recorrido.

[1] Aquí nuestra narración se aparta de la leyenda clásica, en la cual Teseo mata al Minotauro y puede salir del laberinto gracias al hilo de Ariadna.

[2] Ver Apéndice 1 para la definición de grupo.

Definimos *clases de equivalencia de caminos* en el laberinto: dos caminos, llamémosles azul y rojo, son equivalentes si el camino azul (pensemos en el hilo de seda correspondiente) se puede contraer o deformar continuamente al camino rojo dentro del laberinto.

-Los *elementos del grupo* son las clases de equivalencia de caminos (por simplicidad conviene pensar estos elementos de forma concreta, seleccionado un camino que represente cada clase de equivalencia).

-Para definir la *operación del grupo* consideremos dos caminos, azul y rojo, entonces "al multiplicar" el camino azul a por el rojo r, obtenemos un nuevo camino ra, que por definición, es el que describe Teseo recorriendo primero el camino azul y después el camino rojo.

-El *elemento identidad* del grupo viene a ser el camino trivial e, para el cual Teseo se queda parado en la entrada del laberinto.

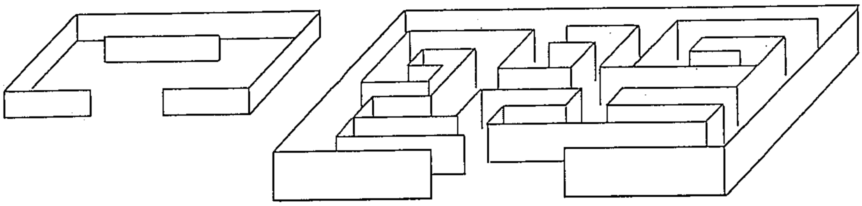
-El *inverso* a^{-1} de un elemento a en el grupo viene a ser el mismo camino pero recorrido en sentido contrario.

Asociamos a cada laberinto X su *grupo fundamental* $\pi_1(X)$; esquemáticamente tenemos

$$\pi_1(X) \doteq \frac{\{\textit{caminos en el laberinto } X, \textit{ provistos de una operación}\}}{\textit{relación de equivalencia}}.$$

Veamos algunos ejemplos. Imaginemos el laberinto más sencillo posible: un disco sin paredes interiores. Por definición una pared interior es una componente conexa de la paredes interiores del laberinto, la pared que es frontera exterior no la consideraremos pared interior. Sólo consideramos laberintos con un número finito de paredes interiores. Teseo fácilmente puede recuperar su ovillo sin importar cómo se movió en el laberinto; su grupo fundamental es el trivial que sólo consta de una clase de caminos, $\pi_1(X) = \{e\}$, o dicho de otra forma, todos los caminos son contraibles al camino trivial e.

Ahora pensemos el laberinto con una sola pared interior (ver en la siguiente figura el laberinto de la izquierda). Teseo puede dar un número finito de vueltas a la izquierda y/o a la derecha. Si consideramos $n \in \mathbb{Z}$, con $n \neq 0$, podemos asignarle a este entero un camino: partiendo de la entrada Teseo dará n vueltas a la izquierda para n positivo; para n negativo dará $|n|$ vueltas a la derecha. Intuitivamente tenemos que el grupo de este laberinto es isomorfo al grupo de los números enteros $\mathbb{Z}$ con la operación de suma. ¿Cuál será el grupo fundamental del laberinto de la derecha en la siguiente figura?



Si pensamos un momento, descubrimos que éste tiene grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z}$. ¿Tendrá algo que ver este laberinto con el anterior? La respuesta es afirmativa pues ambos laberintos en la figura son del mismo "tipo" en el sentido en que ambos tienen sola pared interior.

Intuimos que sólo el número de paredes interiores es relevante, no los vericuetos de esas paredes. Para "clasificar" laberintos podemos hacer lo siguiente: dados dos laberintos se cuentan las paredes interiores; si tienen el mismo número es posible mostrar que tienen el mismo grupo fundamental.

Describamos en detalle el grupo fundamental de un laberinto con n paredes interiores. Numeramos las paredes de 1 a n. Teseo es capaz de recorrer n caminos $a_1, \ldots, a_n$ tal que cada camino a_i encierra exactamente una vez la i-ésima pared, y donde las letras $a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}$, representan los caminos anteriores recorridos en sentido opuesto.

Todos los caminos que puede recorrer Teseo en el laberinto se codifican como "palabras" cuyas letras se toman del alfabeto

$$\{a_n^{-1}, \ldots, a_1^{-1}, e, a_1, \ldots, a_n\} .$$

Por ejemplo, la palabra

$$a_3 a_5 a_1^{-1} a_3 a_1^{-1}$$

codifica el siguiente camino: primero Teseo recorre el camino a_1^{-1} que encierra la primera pared en sentido inverso, después recorre a_3 que encierra la tercera pared, y así sucesivamente hasta acabar con las letras en la palabra. Entonces el grupo fundamental de un laberinto con n paredes es

$$\pi_1(X) = \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n}$$

$$\doteq \{palabras\ de\ longitud\ finita\ con\ las\ letras\ a_n^{-1}, \ldots, a_1^{-1}, e, a_1, \ldots, a_n\} ,$$

a este grupo se le conoce en álgebra como el grupo libre en n generadores.

¿Como extender el concepto de grupo fundamental si consideramos espacios más complicados?

3 Espejos

Recordemos ahora a Alicia, la niña de los cuentos de "Alicia en el país de las maravillas" y "Al otro lado del espejo".

Imaginemos a Alicia en una habitación con forma de paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ con dos espejos colocados en paredes opuestas de la habitación. ¿Qué es lo que ve Alicia? El lector puede buscar mentalmente la respuesta o bien hacer el experimento de colocar dos espejos paralelos entre sí y observar qué se ve.

Para analizar este problema utilizaremos dos definiciones de espejos y en ambas es posible pasar a través de ellos como en "Al otro lado del espejo".

Si aplicamos la reflexión de un espejo y después la reflexión del otro, es posible mostrar[3] que la transformación resultante $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una traslación euclideana de la habitación por el doble de la distancia entre los espejos. Si se invierte el orden en que se aplican la reflexiones la transformación que se obtiene es la función inversa de la anterior $\tau^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Considerando más reflexiones en los dos espejos (siempre un número par de ellas), generamos una infinidad de transformaciones

$$..., \tau^{-2}, \tau^{-1}, Identidad, \tau, \tau^2, \tau^3, ...$$

donde, por definición, τ^k es la composición k veces de τ, y τ^{-s} es la composición s veces de τ^{-1}.

Es conveniente pensar que Alicia se halla en una "habitación virtual" $X_{fr} \subset \mathbb{R}^3$ que por definición está formada por la habitación original y el reflejado de ella; el subíndice "fr" es para recordar que pensamos esta habitación con su frontera. La habitación X_{fr} es un parelelepípedo cuya longitud es el doble de la distancia entre los dos espejos originales. En la siguiente figura cualquiera de la habitaciones puede tomarse como X_{fr}.

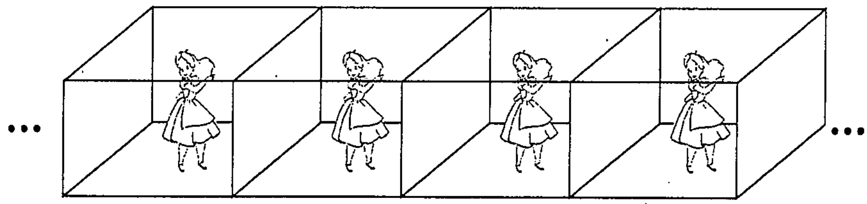
Aplicando las transformaciones a la habitación X_{fr} se obtienen nuevas copias de ella

$$..., \tau^{-2}(X_{fr}), \tau^{-1}(X_{fr}), X_{fr}, \tau(X_{fr}), \tau^2(X_{fr}), \tau^3(X_{fr}), ...$$

que se van alineando a la izquierda y a la derecha de la original X_{fr}. Alicia se ve repetida en cada copia. Es conveniente etiquetar cada copia con un

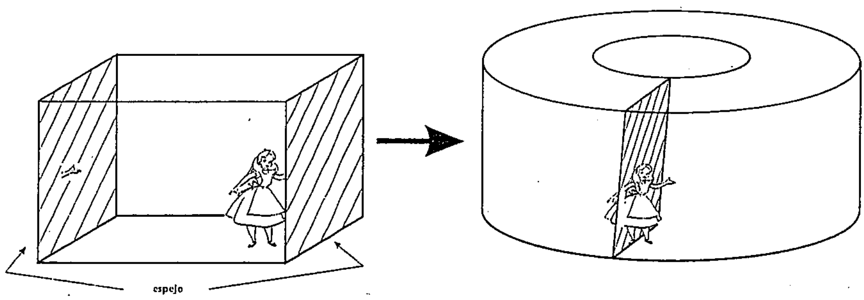
[3]Ver Apéndice 3.

número $n \in \mathbb{Z}$. Llamamos a la unión de todas estas copias, la habitación *universal* $\widetilde{X} = \cup\tau^k(X_{fr})$; ver figura.



La habitación universal refleja la estructura algebraica de $\pi_1(X)$, como veremos más adelante.

Una definición menos usual de "espejo" es como sigue: diremos que un *espejo–unión* es aquel en el cual Alicia pasa a través de él y entra nuevamente a la habitación por el otro espejo. Una situación similar ocurre en algunos programas de cómputo: al salir por el lado izquierdo de la pantalla vuelve a entrarse por el lado derecho. En una habitación con dos espejos-unión Alicia percibe una habitación cilíndrica X, como en la siguiente figura.



Una relación natural entre la habitación universal $\widetilde{X}$ y la habitación cilíndrica X está dada por la función

$$\pi : \widetilde{X} \to X$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, [y], z)$$

donde $x, y, z \in \mathbb{R}$ son, respectivamente, las coordenadas de ancho, longitud y altura en $\widetilde{X} \subset \mathbb{R}^3$, $y \mapsto [y]$ es la función que "enrolla" la coordenada $y \in \mathbb{R}$ en el círculo S^1 , tal como lo hace la función $t \mapsto (cos(t), sen(t))$. Resumiendo, tenemos un diagrama de funciones como sigue:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[dd, "\pi"'] & \\
& X_{fr} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
X &
\end{tikzcd}$$

A la función continua $\pi : \widetilde{X} \to X$ se le llama una *cubierta* de X. Note que la función $X_{fr} \to X$ en el diagrama es la descrita en la figura anterior y la función $X_{fr} \to \widetilde{X}$ es una inclusión.

Imaginemos que Alicia describe un camino en la habitación cilíndrica, dejamos de observarla por un momento y cuando volvemos a observarla la encontramos en el mismo lugar. ¿Se habrá movido Alicia?

Esta pregunta la podemos responder con ayuda de la habitación universal $\widetilde{X}$. Si Alicia recorre un camino que da $n \in \mathbb{Z}$ vueltas con un sentido fijo en la habitación cilíndrica, entonces en la habitación universal, colocamos una gemela de Alicia quien de manera natural describirá un camino de la habitación 0 a la habitación n. A este procedimiento se le llama *levantamiento de caminos* para la cubierta $\pi : \widetilde{X} \to X$.

Reflexionando como lo hicimos para los laberintos, es posible mostrar que el grupo fundamental de la habitación universal $\widetilde{X}$ es el trivial (todo camino es contraible al camino trivial) y el grupo fundamental de la habitación cilíndrica X es $\mathbb{Z}$, como ya habíamos visto con el laberinto de una pared.

4 Una habitación con cuatro espejos

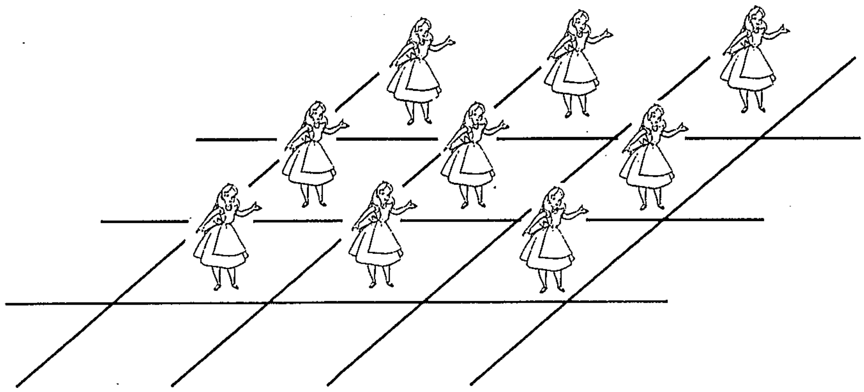
Consideremos una habitación con forma de paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ provista con cuatro espejos, colocados en parejas de paredes opuestas. ¿Qué ve Alicia en esta habitación?

Similarmente a lo descrito en la Sección 3, al considerar pares de reflexiones en los espejos paralelos, obtenemos dos traslaciones euclideanas. Para fijar ideas podemos suponer que una es una traslación en el eje x y la otra es una traslación en el eje y de $\mathbb{R}^3$.

Es conveniente definir una habitación virtual $T_{fr} \subset \mathbb{R}^3$ con forma de parelelepípedo, formada por cuatro copias del paralelepípedo original, acomodadas como en una cuadrícula; ver la siguiente figura.

En forma análoga a lo descrito en la Sección 3, al considerar reflexiones en parejas de espejos paralelos y aplicarlas a T_{fr}, tenemos un número infinito de copias de la habitación T_{fr}, donde Alicia se ve repetida.

Estas copias de la habitación T_{fr} cubren el plano xy en $\mathbb{R}^3$. Etiquetamos las nuevas copias de la habitación con coordenadas $(m, n) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. A este nuevo espacio $\widetilde{T}$ formado por copias de T_{fr} le llamaremos habitación universal.



La figura anterior representa $\widetilde{T}$ y cada cuadrito corresponde a una copia de T_{fr}; por simplicidad hemos omitido las paredes de esas habitaciones. Para una segunda construcción consideramos espejos-unión, esto es, numeramos los cuatro espejos de la habitación T_{fr} de manera consecutiva 1 a 4, e imaginamos que:
- al salir Alicia de la habitación por la pared 1 entra simultánemente por la pared 3, y
- al salir por la pared 2 entra por la pared 4.

Con esto Alicia se encuentra ahora en una habitación cuya forma es la del producto cartesiano de un toro (que es la superficie que tiene la forma de la cascarita de una dona) con un intervalo $[0, h]$, donde h es la altura de la habitación T_{fr}. Esta nueva habitación T la llamaremos habitación toroidal. Dejamos como un ejercicio hacer el dibujo para T.

La habitación universal $\widetilde{T}$ y la habitación toroidal T están relacionadas por la función continua

$$\pi : \widetilde{T} \to T$$

$$(x, y, z) \mapsto ([x], [y], z)$$

que "enrolla" la habitación universal en la habitación toroidal, y $\pi : \widetilde{T} \to T$ es una cubierta de T. Como antes, dejamos a Alicia por un momento en la habitación toroidal, regresamos y la encontramos en el mismo lugar. ¿Se habrá movido Alicia?

Esto lo podemos averiguar utilizando la habitación universal $\widetilde{T}$ y una gemela de Alicia que se mueva en $\widetilde{T}$. Si Alicia recorre un camino que da n vueltas cruzando la pared 1 y m vueltas cruzando la pared 2 en la habitación toroidal T, entonces en la habitación universal $\widetilde{T}$, su gemela describe un camino primero de la habitación $(0,0)$ a la habitación $(0,n)$ y luego a la habitación (m,n); este camino no se cierra en $\widetilde{T}$.

El grupo fundamental para la habitación universal $\widetilde{T}$ es trivial, pues en $\widetilde{T}$, que es como un plano, todos los caminos son contraibles a un punto. El grupo fundamental de la habitación toroidal T es el grupo cuyos elementos son las parejas de números enteros $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \{(m,n)\}$ con la operación de suma coordenada a coordenada, donde cada entero m o n codifica la clase de un camino en la habitación toroidal que cruza m veces la pared 1 o bien n veces la pared 2. Esto lo resuminos como sigue:

$$\pi_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \frac{\{palabras\ con\ las\ letras\ e, a, a^{-1}, b, b^{-1}\}}{\{aba^{-1}b^{-1} = e\}},$$

Es un ejercicio de álgebra mostrar la segunda igualdad; el cociente significa[4] que cada vez que en una palabra aparece la secuencia $aba^{-1}b^{-1}$, esta parte de la palabra se simplifica remplazando esa secuencia por la letra e. Explicamos a continuación un poco más de este grupo visto con palabras.

5 Laberintos de habitaciones y puertas

Pensemos en $\widetilde{T}$ (ver la figura anterior) como la unión de un número infinito de copias de la habitación original T_{fr}. Imaginemos que cada copia de la habitación T_{fr} está provista de cuatro puertas que comunican con las habitaciones adyacentes y que las puertas en cada copia están membretadas como a, b, a^{-1}, b^{-1}.

Una gemela de Alicia en $\widetilde{T}$ empieza a caminar; para ello elige una de las puertas, digamos la puerta a, la abre y al cruzarla llega a una habitación idéntica a la original con cuatro puertas. Ella nota, al cerrar la puerta por la que llegó, que está membretada como a^{-1} vista desde la nueva habitación. Esto significa que a y a^{-1} son inversos uno del otro. La gemela de Alicia elige una nueva puerta, digamos la b, la abre y llega a una nueva habitación idéntica a la original, etc. ¡$\widetilde{T}$ es como un nuevo tipo de laberinto formado

[4] Ver Apéndice 2 para la descripción de grupos mediante palabras.

por habitaciones!

Note que las letras $\{e, a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ codifican también los caminos en $\widetilde{T}$. Esto es, la gemela de Alicia al moverse en $\widetilde{T}$ de manera aleatoria va describiendo una palabra en el alfabeto $\{e, a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$; en particular la palabra descrita arriba empieza por la derecha, como $...ba$. La letra $\{e\}$ es la instrucción de que la gemela de Alicia se quede parada donde está (no cruza ninguna puerta).

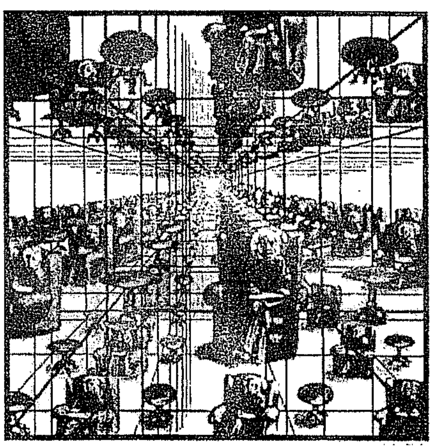
Hay un camino de cuatro letras en $\widetilde{T}$ muy especial:

$$aba^{-1}b^{-1} = e \ ,$$

esto es, si la gemela de Alicia empieza en una habitación de $\widetilde{T}$ y abre primero la puerta b^{-1} la cruza y la cierra; después, en la nueva habitación abre la puerta a^{-1} la cruza y la cierra, y así sucesivamente hasta recorrer las cuatro puertas indicadas; entonces al final ha vuelto a la habitación original donde empezó. Este es el significado geométrico en $\widetilde{T}$ del cociente

$$\{palabras\ con\ las\ letras\ e, a, a^{-1}, b, b^{-1}\}/\{aba^{-1}b^{-1} = e\} \ .$$

Es natural preguntar ahora qué sucedería si en una habitación en forma de paralelepípedo se colocaran seis espejos en sus paredes. Es un ejercicio interesante reproducir todo la dicho para el caso de cuatro espejos a este nuevo caso con seis espejos. La figura resultante para la habitación universal $\widetilde{X}$ se vería como sigue: reemplazando a Alicia por Einstein y donde cada cubo en $\widetilde{X}$ es una copia de la respectiva habitación virtual X_{fr}.



6 Espejos esféricos

Colocamos en $\mathbb{R}^3$ dos esferas con centro en el origen y radios de longitud 1 y 2. Imaginemos a Alicia en la habitación formada por la región entre ambas esferas. Si colocamos dos espejos esféricos en las paredes opuestas de la habitación, esto es, suponemos que los "espejos" son las esferas concéntricas en $\mathbb{R}^3$. ¿Qué es lo que ve Alicia?

Ahora el experimento práctico es imposible, ¡en ningún comercio venden espejos esféricos!

Como antes, usaremos dos definiciones de espejos. Para la primera posibilidad, si aplicamos la reflexión de un espejo y después la reflexión en el otro, es posible mostrar[5] que la transformación resultante $\tau : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^3 - \{0\}$ es una multiplicación por el escalar 4.

Al considerar más parejas de reflexiones se obtienen las transformaciones

$$..., \tau^{-2}, \tau^{-1}, Identidad, \tau, \tau^2, \tau^3, ...$$

donde $\tau^k : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^3 - \{0\}$, para $k \in \mathbb{Z}$, es la multiplicación por el escalar 4^k.

Como antes, es conveniente trabajar con una habitación virtual

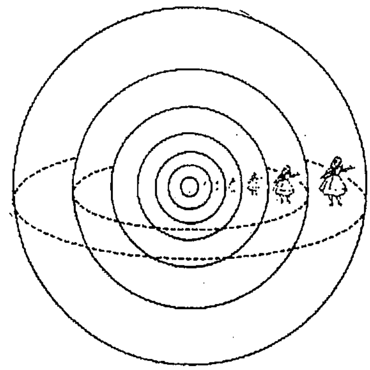
$$X_{fr} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq |(x, y, z)| \leq 4\} \subset \mathbb{R}^3 \ .$$

Aplicando las transformaciones a X_{fr}, obtenemos una infinidad de copias de ella

$$..., \tau^{-2}(X_{fr}), \tau^{-1}(X_{fr}), X_{fr}, \tau(X_{fr}), \tau^2(X_{fr}), \tau^3(X_{fr}), ...$$

que se van acomodando al interior y al exterior de X_{fr} en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Alicia se ve repetida en cada copia. Etiquetamos cada copia con $n \in \mathbb{Z}$ de la manera obvia, y la nueva habitación $\widetilde{X} = \mathbb{R}^3 - \{0\} = \cup \tau^k(X_{fr})$ es llamada la habitación universal.

[5] Ver Apéndice 4.



Una segunda construcción usa la definición de espejo-unión; Alicia pasa a través de la pared de radio 1 y entra nuevamente a la habitación por la pared de radio 4 o viceversa.

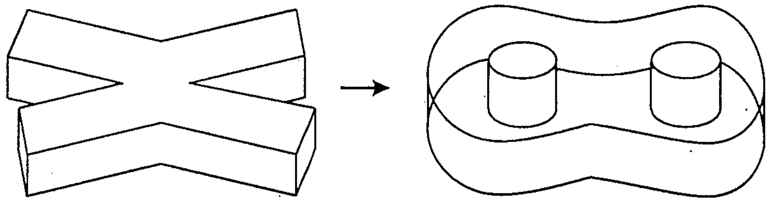
En una habitación con este tipo de espejos, Alicia percibe una habitación esférica que denotamos por $X = S^2 \times S^1$ (que ya no es fácil de dibujar). Tenemos una relación natural entre la habitación universal $\widetilde{X} = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ y la habitación esférica $X = S^2 \times S^1$ dada por la función continua

$$\pi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to S^2 \times S^1$$

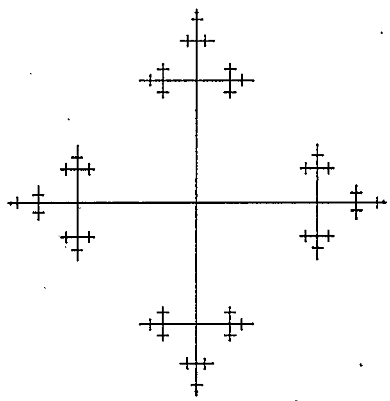
que "enrolla" la habitación universal en la habitación cilíndrica. Es fácil mostrar que $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \{0\}) = \{e\}$ y que $\pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$.

7 Laberintos a partir de espejos

Tomamos ahora como material para nuestro juego una habitación con forma de "X" como en la siguiente figura y llamémosla X_{fr} por obvias razones. Ponemos en X_{fr} cuatro espejos-unión en los cuatro extremos de los brazos de la figura y los numeramos de forma consecutiva. Imaginamos a Alicia adentro de la figura; ahora sucede que:
- al salir Alicia por la pared 1 entra simultáneamente por la 2, y
- al salir por la 3 entra por la 4.
Pegando el espejo 1 con el 2 y el 3 con el 4, obtenemos al laberinto con figura de 8 (y lo denotaremos por ese mismo "8"), que es un laberinto con dos paredes interiores. Ver figura.



Si los cuatro espejos en X_{fr} son ordinarios, entonces podemos reflejar una infinidad de veces la habitación X_{fr} y obtener un laberinto llamado $\widetilde{8}$ formado por una infinidad de copias de X_{fr}; despreciando el ancho y alto de las habitaciones el espacio $\widetilde{8}$ se ve como sigue:



Debe notarse que para poder dibujar $\widetilde{8}$, en cada reflexión hemos reproducido X_{fr} en escala cada vez más pequeña y hay un número infinito de copias de X_{fr} (esto hace imposible dibujarlo exactamente).

Expliquemos ahora la utilidad de la figura $\widetilde{8}$. Colocamos en el laberinto 8 a Teseo, justo en la intersección de los dos círculos o anillos. Partiendo de ahí Teseo tiene cuatro posibles caminos: los que dan vuelta a cada uno de los círculos en el 8, a los cuales llamamos a, b, o bien sus caminos inversos a^{-1}, b^{-1}. Al vagar Teseo por el laberinto 8 va describiendo palabras en el alfabeto de letras en $\{e, a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, como en la Sección 2.

Por ello es natural membretar las aristas de $\widetilde{8}$ como sigue: Empecemos por fijar un vértice cualquiera en $\widetilde{8}$ y señalemos las cuatro aristas de $\widetilde{X}$ que parten de un mismo vértice, consecutivamente con las letras a, b, a^{-1}, b^{-1}. Tomemos uno de los cuatro vértices en los extremos de esas aristas. Volvemos a señalar las cuatro aristas consecutivamente con las letras a, b, a^{-1}, b^{-1} pero ahora teniendo cuidado de que la arista con la letra a, vista desde el primer vértice, coincida con la letra a^{-1} vista desde este segundo vértice. Así se continúa hasta membretar todos las aristas de $\widetilde{8}$.

Esto es similar a la idea de laberintos de habitaciones con puertas de la Sección 5. Un gemelo de Teseo que habite en $\widetilde{8}$ y tenga como instrucción una palabra en las letras $\{e, a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ se mueve por $\widetilde{8}$ de la manera obvia, usando los membretes en las aristas del $\widetilde{8}$. Concluimos que existe una función continua

$$\pi : \widetilde{8} \to 8$$

tal que cualquier camino en el $\widetilde{8}$ que recorra el gemelo de Teseo se proyecta sobre un camino en el 8 recorrido por Teseo. La función $\pi : \widetilde{8} \to 8$ es una cubierta del 8.

Es conveniente concluir esta sección con dos observaciones. La primera es que $\pi_1(\widetilde{8}) = \{e\}$, esto es, todo camino cerrado en $\widetilde{8}$ es contraíble al trivial y que $\pi_1(8) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, como en la Sección 2 para el laberinto con dos paredes interiores.

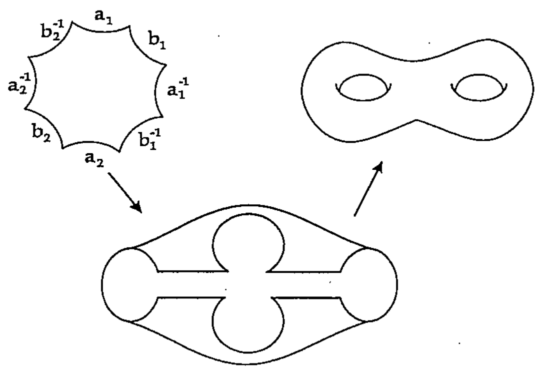
8 El laberinto asociado a una superficie

Imaginemos ahora a Alicia en una habitación de forma octagonal X_{fr}; membretamos las ocho paredes en forma consecutiva

$$a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_2, b_2, a_2^{-1}, b_2^{-1}$$

(más adelante veremos la conveniencia de esta notación). Similarmente a lo ya aprendido, colocamos espejos-unión de tal forma que
- si Alicia sale de la habitación por la pared a_1, entra simultáneamente por la a_1^{-1},
- si sale por la pared b_1, entra por la b_1^{-1},
- si sale por la pared a_2, entra por la a_2^{-1},
- si sale por la pared b_2, entra por la b_2^{-1}.

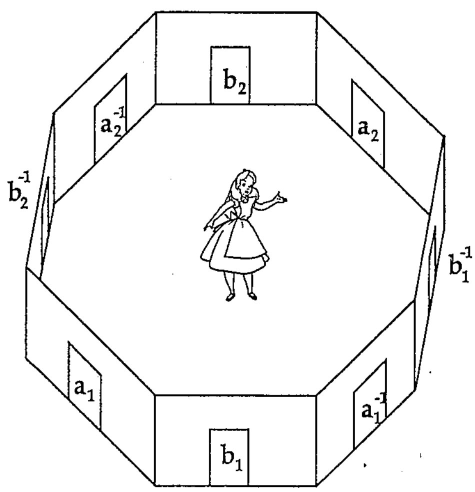
Al identificar el octágono de esa forma (y siendo cuidadosos con las orientaciones en los pegados que se usan, ver la figura), se observa que Alicia habita en un mundo X que tiene la forma de una esfera con dos asas. Despreciando la altura de la habitación X_{fr}, X se construye como sigue:



Inversamente, si empezamos con una esfera con dos asas X y la cortamos ahora a lo largo de los cuatros lazos cerrados, tal como se indica la figura, al desdoblarla obtenemos el octágono X_{fr}.

De acuerdo a nuestras experiencias anteriores, es natural colocar "espejos" en las paredes de la habitación octagonal y considerar parejas de reflexiones en ellos[6] ¿Cómo es el espacio $\widetilde{X}$ que se obtiene?

Demos una descripción de $\widetilde{X}$ usando las ideas de la sección 5. Pensamos a Alicia en una habitación octagonal X_{fr} con ocho puertas, una en cada pared que por simplicidad llamamos como antes $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_2, b_2, a_2^{-1}, b_2^{-1}$.



Ahora Alicia camina por $\widetilde{X}$, esto es, elige alguna de las puertas, digamos a_1, la abre y al cruzarla llega a una habitación idéntica a la original. Ella

[6]La deducción de las fórmulas analíticas de estos espejos y reflexiones es más complicada; pueden verse en [7] pág. 167 o en [9].

nota, al cerrar la puerta por la que llegó, que está membretada como a_1^{-1} vista desde la nueva habitación. Alicia elige una nueva puerta, digamos b_2, la abre y llega a una nueva habitación idéntica a la original, etc.

$\widetilde{X}$ es un laberinto de habitaciones formado por copias de X_{fr}, comunicadas entre sí por puertas que están membretadas como en la habitación original. Alicia, moviéndose en el laberinto $\widetilde{X}$ de manera aleatoria, va describiendo palabras en el alfabeto $\{e, a_1, a_1^{-1}, b_1, b_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}, b_2, b_2^{-1}\}$. La letra $\{e\}$ es la instrucción de que Alicia se quede parada donde está (no cruza ninguna puerta). Sorprendentemente, hay un camino de ocho letras en $\widetilde{X}$ muy especial:

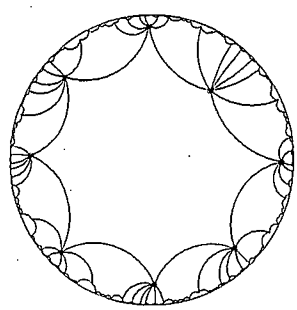
$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = e \ ,$$

es decir, si Alicia empieza en una habitación en $\widetilde{X}$ y abre primero la puerta b_2^{-1}, la cruza y la cierra, después en la nueva habitación abre la puerta a_2^{-1}, la cruza y la cierra, y así sucesivamente hasta recorrer las ocho puertas indicadas, entonces al final ha vuelto a la habitación original donde empezó.

El cálculo de esa relación requiere de la topología de X y bastante más paciencia. Una idea para hacerlo plausible es dibujar el camino

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$$

sobre la esfera con dos asas X y observar que se puede deformar al camino trivial. Para nuestra sorpresa, $\widetilde{X}$ puede representarse (despreciando la altura de las habitaciones X_{fr} y donde sus paredes son arcos de círculos), como un disco abierto en $\mathbb{R}^2$ lleno de copias de octágonos acomodados de tal forma que en cada vértice de un octágono coinciden otros siete octágonos. Una aproximación a $\widetilde{X}$ se ve como sigue:



También debe notarse que para dibujar $\widetilde{X}$ hemos trazado las copias del octágono X_{fr} cada vez más pequeñas, de hecho hay una infinidad de ellas, lo que hace imposible realizar un dibujo exacto. Los octágonos llenan el disco y dos de ellos se intersectan, a lo más, en sus fronteras. La habitación $\widetilde{X}$ y la esfera con dos asas X están relacionadas por una función continua

$$\pi : \widetilde{X} \to X$$

que "enrolla" una habitación en otra (su fórmula analítica es bastante más complicada que las de ejemplos anteriores, por eso la omitimos).

Concluimos diciendo que $\pi_1(\widetilde{X}) = \{e\}$; éste fue el ejemplo de laberinto más sencillo que revisamos en la Sección 2, y que

$$\pi_1(X) = \frac{\{\textit{palabras con las letras } e, a_1, a_1^{-1}, b_1, b_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}, b_2, b_2^{-1}\}}{\{a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = e\}} .$$

lo cual requiere un poco más álgebra y topología para ser probado completamente.

9 Teseo y el cartógrafo olvidadizo

Sea X como en cualquiera de las secciones anteriores. Imaginemos a Teseo qua ha salido con vida de X. Teseo encarga a un cartógrafo que realice un mapa de X. El cartógrafo entra en X, elige algún punto de inicio $p \in X$ y levanta un mapa de una pequeña vecindad de p (el cartógrafo no ve bien "de lejos"). Avanza un poco hasta el borde de lo que ya ha registrado en su primer mapa y traza un segundo mapa de una pequeña vecindad de este nuevo punto, y así sucesivamente. Al ir haciendo esto, el cartógrafo camina en X registrando mapas de pequeñas vecindades de X.

Sin embargo el cartógrafo es olvidadizo. Una vez que ha caminado por X y ha regresado al punto original p por un camino que no es continuamente contraible (dentro de X) al punto p, esto es un camino que no es el trivial en $\pi_1(X)$, vuelve a trazar un mapa cerca de $p \in X$ y lo agrega a su colección de mapas, ¡sin darse cuenta de que esa parte de X ya la había registrado en su primer mapa!

Así continúa trabajando y una vez en su oficina el cartógrafo olvidadizo pega todos los mapas de pequeñas vecindades que realizó obteniendo $\widetilde{X}$. El supuesto "mapa" $\widetilde{X}$ de X que el cartógrafo olvidadizo obtiene se conoce como *la cubierta universal de* X. En general $\widetilde{X}$ es un nuevo objeto y no una reproducción de X, lo que se ha ejemplificado ya en las secciones anteriores. Puede decirse que $\widetilde{X}$ es tal que todas los caminos en X que eran cerrados y no triviales en el grupo fundamental $\pi_1(X)$ se transforman en caminos abiertos en $\widetilde{X}$ (esto es, con diferente punto inicial y final).

De hecho, $\widetilde{X}$ es igual a X si y sólo si $\pi_1(X) = \{e\}$, en cuyo caso el cartógrafo olvidadizo no tiene posibilidad de cometer errores. Queda al lector imaginar la reacción de Teseo al recibir el mapa encargado.

10 Resumen

Dado un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ decimos que es conexo por caminos si dados cualesquiera par de puntos en X existe un camino $\alpha : [0,1] \to X$ continuo, contenido en X, que une ambos puntos. Dados dos subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ conexos por caminos, entenderemos que ellos poseen la misma *forma topológica* si existe una función continua $\Phi : X \to Y$, con inversa $\Phi^{-1} : Y \to X$ también continua. En caso de existir tal función se dice que *X y Y son homeomorfos entre sí.*

Nuestro problema de "clasificar formas geométricas", puede resumirse ahora al siguiente caso: dados X y Y tratar de decidir si son homeomorfos o no. La herramienta que hemos bosquejado ayuda a atacar el problema mediante el siguiente resultado.

Teorema 10.1. *Si X y Y son homeomorfos entonces sus grupos fundamentales son isomorfos como grupos, esto es*

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(Y) .$$

¡Hay un puente entre problemas de "forma topológica" y problemas de grupos en álgebra!

Como una aplicación de lo mencionado anteriormente las siguientes frases son equivalentes para laberintos como los de la Sección 2:
- dos laberintos son homeomorfos entre sí,
- tienen el mismo número de paredes interiores,
- poseen el mismo grupo fundamental.

De hecho tenemos mucha más información. Empecemos por señalar las siguientes similitudes en todos los ejemplos descritos: Se ha considerado un conjunto $X_{fr} \subset \mathbb{R}^3$ provisto de frontera y "algunas instrucciones de pegado" (que hemos llamado espejos-unión) entre los lados de su frontera. Al realizar los pegados se ha obtenido un nuevo objeto X.

Por otra parte, al usar "reflexiones" adecuadas en algunos lados de X_{fr} se ha construído un nuevo espacio $\widetilde{X}$ formado por copias de X_{fr} pegadas entre sí, siguiendo de alguna manera la información subyacente en el grupo fundamental $\pi_1(X)$. A X_{fr} se le llama el *dominio fundamental.* Diagramáticamente

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[d, "\pi"'] & \\ & X_{fr} \arrow[ul] \arrow[dl] \\ X & \end{tikzcd}$$

Debe observarse que la función de inclusión $X_{fr} \to \widetilde{X}$ no está únicamente determinada en esta construcción, pero las otras dos funciones sí lo están; además la función π es continua.

Teorema. *Dado un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ conexo por caminos es posible asociarle un nuevo espacio topológico $\widetilde{X}$, llamado la cubierta universal de X que satisface las siguientes propiedades:*

i) $\widetilde{X}$ es cubierta de X, esto es, existe una función continua $\pi : \widetilde{X} \to X$ tal que es sobreyectiva y todo punto en X admite una vecindad abierta V con $\pi^{-1}(V)$ una colección de abiertos $\{W_i\} \subset \widetilde{X}$ mutuamente ajenos, que satisfacen: $\pi : W_i \to V$ es un homeomorfismo entre W_i y V, para toda i.

ii) El grupo fundamental de $\widetilde{X}$ es trivial.

iii) Cualquier camino cerrado en X se levanta a un camino en $\widetilde{X}$; esto es, dado un camino continuo $\gamma : [0,1] \to X$ con punto inicial p, y un punto $q \in \widetilde{X}$ con $\pi(q) = p$, existe un único camino continuo $\widetilde{\gamma}$ en $\widetilde{X}$ con punto inicial q y tal que $\pi(\widetilde{\gamma}) = \gamma$.

iv) Si $\pi_1(X) = \{e\}$, entonces X y $\widetilde{X}$ son homeomorfos.

v) Dado un punto $p \in X$, existe una correspondencia biyectiva entre los puntos en $\{\pi^{-1}(p)\} \subset \widetilde{X}$ y los elementos del grupo $\pi_1(X)$.

¿Cúal es la utilidad de la cubierta universal?

Imaginemos que tenemos una superficie X; para fijar ideas, pensemos en un toro o una esfera con dos asas, y consideremos su cubierta universal $\pi : \widetilde{X} \to X$. Entonces hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de funciones

$$\{f : X \to \mathbb{R}\}$$

y el conjunto de funciones

$$\{F : \widetilde{X} \rightarrow \mathbb{R} \mid \textit{tal que } F(p) = F(q) \textit{ cada vez que } \pi(p) = \pi(q) \in X\}.$$

Para el caso en que X es un toro, estas funciones son las funciones doblemente periódicas o elípticas $F : \widetilde{X} = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ver [3] pág. 265. El estudio de estas funciones es uno de los objetivos centrales del análisis de Fourier. Para el caso en que X es una esfera con dos asas, éstas son las funciones automorfas $F : \widetilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$, ver [5].

De esta manera, los problemas de funciones en la superficie cambian a ser problemas de funciones en $\widetilde{X} \subset \mathbb{R}^2$ que ya se conocen de cálculo, pero imponiéndoles la *condición de automorfía* $F(p) = F(q)$, *si* $\pi(p) = \pi(q)$, y viceversa. Esta "aplicación" parece, a primera vista, muy rebuscada, pero históricamente, uno de los problemas que dieron origen a la teoría del grupo fundamental, fue el tratar de comprender el comportamiento de funciones que son soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales y satisfacen condiciones de automorfía, ver [5] pág. 75.

Podemos decir que los conceptos de grupo fundamental y cubierta universal, descubiertos por Poincaré y otros matemáticos de fines del siglo XIX y principios del XX, son una herramienta esencial para comprender la topología, la geometría, la teoría de funciones, etcétera, de objetos geométricos.

11 Apéndices técnicos

Apéndice 1. Grupos.

Los grupos son estructuras algebraicas simples y por ello es posible reconocer grupos en muchas situaciones naturales.

Un *grupo* es una pareja $(G, *)$, donde G es un conjunto y $* : G \times G \rightarrow G$ es una función (llamada la operación del grupo) y tal que se satisfacen las siguientes propiedades para cualesquiera $a, b, c \in G$:

i) asociatividad de la operación

$$(a * b) * c = a * (b * c) \ ,$$

ii) existencia de un elemento identidad $e \in G$ tal que

$$e * a = a * e = e,$$

iii) existencia de inversos: para toda $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ tal que

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Ejemplos de grupos son: los números enteros $\mathbb{Z}$ con la operación de suma, los números reales distintos de cero $\mathbb{R}^*$ con la operación de multiplicación. El *grupo trivial* es aquel que sólo consta del elemento identidad, esto es, $G = \{e\}$.

Si en un grupo se satisface que $ab = ba$ para todo par $a, b \in G$, entonces se dice que el grupo es *abeliano.* Naturalmente, dados dos grupos G y H, decimos que son *isomorfos* o "iguales" si existe una función biyectiva $\phi : G \to H$ que preserva las operaciones en ambos grupos, esto es, tal que $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

Apéndice 2. Grupos con letras y palabras.
Una forma abstracta de construir grupos es como sigue: consideremos un número finito de letras $e, a_1, ..., a_n$ y sus letras inversas $a_1^{-1}, ..., a_n^{-1}$; conviniendo que e sea el elemento identidad, ellas forman un alfabeto

$$\{a_n^{-1}, ..., a_1^{-1}, e, a_1, ..., a_n\} \ .$$

Consideremos como conjunto G para el grupo todas las palabras con un número finito de letras que pueden escribirse con letras del alfabeto. La operación del grupo $* : G \times G \to G$ se define como sigue: dadas dos palabras $b_1 \cdots b_\alpha$ y $c_1 \cdots c_\beta$ su producto es la nueva palabra $b_1 \cdots b_\alpha c_1 \cdots c_\beta$. A este grupo $(G, *) \doteq \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ se le conoce como el producto libre en n generadores.

Para obtener nuevos grupos se puede considerar un número finito de relaciones $\{b_{\gamma 1} \cdots b_{\gamma s} = e\}$ y al tomar el cociente

$$G/\{b_{\gamma 1} \cdots b_{\gamma s} = e\}$$

se obtienen nuevos grupos, ver [6] pág. 12.

El significado del cociente es que si en una palabra aparece la sucesión de letras $b_{\gamma 1} \cdots b_{\gamma s}$ ésta se simplifica a e.

Apéndice 3. Grupos de reflexiones en planos.
Coloquemos dos espejos paralelos en $\mathbb{R}^3$; uno en el plano $\{x = 0\}$ y otro en el plano $\{x = 1\}$. Las reflexiones en ellos son funciones

$$R_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad R_1(x, y, z) = (-x, y, z) \ ,$$

$$R_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad R_2(x, y, z) = (2 - x, y, z) \ .$$

Observe que R_1 fija el espejo $\{x = 0\}$ y R_2 fija el espejo $\{x = 1\}$. Entonces podemos definir un grupo

$$G = \{\textit{palabras en } R_1 \textit{ y } R_2 \textit{ con un número par de letras}\} \ ,$$

donde la operación es la composición de funciones. Observamos que G no es un grupo abeliano pues

$$R_1 \circ R_2(x,y,z) = (x-2,y,z) \neq R_2 \circ R_1(x,y,z) = (x+2,y,z) ,$$

y definimos $\tau = R_2 \circ R_1, \tau^{-1} = R_1 \circ R_2$, de acuerdo a lo dicho en la Sección 3.

Lema 11.1. *Existe un isomorfismo de grupos entre G y $\mathbb{Z}$.*

Necesitamos observar que

$$R_1 \circ R_1 = R_2 \circ R_2 = identidad .$$

Con ésto, toda palabra en R_1 y R_2 con un número par de letras es una traslación en el eje x por un múltiplo entero de dos, o bien es la identidad. Esto es, son palabras con las letras $\{e, \tau, \tau^{-1}\}$.

Por lo tanto podemos definir el isomorfismo de grupos, $\phi : G \to \mathbb{Z}$ tal que a la traslación $\{\tau^k : (x,y,z) \mapsto (2k+x,y,z)\} \in G$ le asocia el número $k \in \mathbb{Z}$.

Apéndice 4. Grupos de reflexiones en esferas.

Coloquemos dos espejos esféricos y paralelos en $\mathbb{R}^3$; uno en la esfera $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y otro en $\{x^2+y^2+z^2 = 4\}$. Las reflexiones en ellos son funciones como sigue

$$R_1 : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^3 - \{0\}, \quad R_1(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+x^2} ,$$

$$R_2 : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^3 - \{0\}, \quad R_2(x,y,z) = \frac{4(x,y,z)}{x^2+y^2+x^2} .$$

Obsérvese que R_1 fija el espejo de radio 1 y R_2 fija el espejo de radio 2. Entonces podemos definir un grupo

$$H = \{ \text{ palabras en } R_1 \text{ y } R_2 \text{ con un número par de letras}\} ,$$

donde la operación es la composición de funciones. H no es un grupo abeliano pues

$$R_1 \circ R_2(x,y,z) = 4(x,y,z) \neq R_2 \circ R_1(x,y,z) = \frac{1}{4}(x,y,z) .$$

y definimos $\tau = R_2 \circ R_1, \tau^{-1} = R_1 \circ R_2$, de acuerdo a lo dicho en la Sección 6.

Lema 11.2. *Existe un isomorfismo de grupos entre H y $\mathbb{Z}$.*

Como antes, $R_1 \circ R_1 = R_2 \circ R_2 = identidad$. Con esto toda palabra en R_1 y R_2 con un número par de letras es una transformación que resulta de multiplicar (x, y, z) por el escalar 4^k, con k un entero, o bien es la transformación identidad.

Por lo tanto podemos definir el isomorfismo de grupos, $\phi : H \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que a la transformación $\{\tau^k : (x, y, z) \mapsto 4^k(x, y, z)\} \in H$ le asocia el número $k \in \mathbb{Z}$.

Comentario a las referencias. Los formalismos acerca del grupo fundamental pueden leerse en [2], [4], [8], o bien en casi cualquier texto de topología y/o topología algebraica. Hemos preferido estos textos por que hacen una presentación más geométrica. Las referencias [2], [5], [7] y [9] muestran aplicaciones del concepto de grupo fundamental.

Agradecimientos. Queremos agradecer a Martha Guzmán Partida su invitación a someter este trabajo en Arenario, y al árbitro por sus útiles comentarios.

Referencias

[1] M. E. Aguilera Miranda, *Laberintos, espejos y grupo fundamental*, Tesis, Licenciado en Físico-Matemáticas, Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas, U.M.S.N.H. (2001).

[2] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants*, McGraw–Hill (1973).

[3] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Third Edition, McGraw–Hill (1979).

[4] M. A. Amstrong, *Basic Topology*, McGraw–Hill (1979).

[5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yosida, *From Gauss to Painlevé*, Vieweg (1991).

[6] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, Second Edition, Dover (1976).

[7] J. Muciño–Raymundo, *Geometría hiperbólica: una introducción usando cálculo y variable compleja*, IV Escuela de Verano de Sistemas Dinámicos, O. Calvo, R. Iturriaga, Editores, Aportaciones Matemáticas 21 (1998) 165–196.

[8] J. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer Verlag (1980).

[9] W. P. Thurston, S. Levy, *Three–Dimensional Geometry and Topology*, vol. 1, Princeton University Press (1997).

Elena Aguilera Miranda
Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
A. P. 2-71, Morelia, Michoacán, México.

Jesús Muciño-Raymundo
Instituto de Matemáticas, UNAM, Unidad Morelia
A. P. 61-3, Morelia, Michoacán, México.
muciray@matmor.unam.mx