Aportaciones Matemáticas
Serie Comunicaciones **27** (2000) 225–242

# Campos vectoriales holomorfos vistos como objetos reales; su dinámica topológica y algunas aplicaciones*

**Jesús Muciño–Raymundo**
Instituto de Matemáticas UNAM
Unidad Morelia
Nicolás Romero 150
Col. Centro
58000 Morelia, Michoacán
México

muciray@matmor.unam.mx

**Resumen.** Se muestra como ciertas parejas de campos vectoriales reales $C^\infty$ que conmutan pueden interpretarse como campos vectoriales holomorfos. Se discute el significado del tiempo complejo y se mencionan algunas aplicaciones a problemas de campos vectoriales reales (a la construcción de centros isocronos en $\mathbb{R}^2$ y a campos Hamiltonianos con flujo completo). Se da una lista de problemas abiertos.

## 1. Introducción.

Los campos vectoriales reales $C^\infty$ en $\mathbb{R}^n$ definen una clase amplia, sencilla y útil de ecuaciones diferenciales. Nuestro objetivo es mostrar que los campos vectoriales holomorfos pueden pensarse como ciertas parejas de campos vectoriales reales $C^\infty$. Algunas aplicaciones del caso holomorfo al caso real son descritas. En muchos problemas de campos vectoriales reales la solución de los mismos problemas para campos vectoriales holomorfos resulta más sencilla y puede considerarse como una primera aproximación a la solución del caso real. El contenido del trabajo es como sigue.

*2000 Mathematics Subject Classification:* 34A20
*Keywords and phrases:* campos vectoriales holomorfos.
* Apoyado por DGAPA–UNAM, and CONACYT 28492-E.

APORTACIONES MATEMÁTICAS
Serie Comunicaciones **27** (2000) 225–242

# Campos vectoriales holomorfos vistos como objetos reales; su dinámica topológica y algunas aplicaciones*

**Jesús Muciño–Raymundo**
Instituto de Matemáticas UNAM
Unidad Morelia
Nicolás Romero 150
Col. Centro
58000 Morelia, Michoacán
México

muciray@matmor.unam.mx

**Resumen.** Se muestra como ciertas parejas de campos vectoriales reales $C^\infty$ que conmutan pueden interpretarse como campos vectoriales holomorfos. Se discute el significado del tiempo complejo y se mencionan algunas aplicaciones a problemas de campos vectoriales reales (a la construcción de centros isocronos en $\mathbb{R}^2$ y a campos Hamiltonianos con flujo completo). Se da una lista de problemas abiertos.

## 1. Introducción.

Los campos vectoriales reales $C^\infty$ en $\mathbb{R}^n$ definen una clase amplia, sencilla y útil de ecuaciones diferenciales. Nuestro objetivo es mostrar que los campos vectoriales holomorfos pueden pensarse como ciertas parejas de campos vectoriales reales $C^\infty$. Algunas aplicaciones del caso holomorfo al caso real son descritas. En muchos problemas de campos vectoriales reales la solución de los mismos problemas para campos vectoriales holomorfos resulta más sencilla y puede considerarse como una primera aproximación a la solución del caso real. El contenido del trabajo es como sigue.

*2000 Mathematics Subject Classification:* 34A20
*Keywords and phrases:* campos vectoriales holomorfos.
* Apoyado por DGAPA–UNAM, and CONACYT 28492-E.

I. Los campos holomorfos como parejas de campos vectoriales reales:
  2 Sistemas de trenes y campos vectoriales reales.
  3 Topología y dinámica de trenes.
  4 Rotaciones y conmutadores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.
  5 Parejas de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$.
  6 Parejas de campos vectoriales en $\mathbb{R}^4$.
  7 Significado geométrico del tiempo complejo $\mathbb{C}$.
II. Aplicaciones:
  8 Dinámica topológica en puntos de velocidad infinita.
  9 Centros isocronos.
  10 Campos Hamiltonianos.
  11 Problemas abiertos.

Suponemos del lector los conocimientos usuales a nivel licenciatura de ecuaciones diferenciales, topología y variable compleja. La parte I es elemental, sin embargo la parte II creemos que es más novedosa.

## 2. Sistemas de trenes y campos vectoriales reales.

Muchos trabajos de divulgación acerca de la teoría de la relatividad utilizan experimentos o analogías con trenes, quizá esto es útil también para campos vectoriales. Empezamos trabajando en el espacio $\mathbb{R}^n$. Un *tren o trayectoria* es una función $C^\infty$ de la forma

$$\begin{aligned} \phi : (a,b) \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \phi(t) . \end{aligned}$$

Como es usual pensaremos a;

la variable $t \in \mathbb{R}$ como el tiempo,

la imagen $\{\phi(t) \mid t \in (a,b)\} \subset \mathbb{R}^n$ como la vía del tren (recorrido de la trayectoria),

el punto $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$ como la posición de un pasajero (o de la trayectoria ) al tiempo $t$,

el vector $\frac{d\phi}{dt}|_t$ como la velocidad del pasajero (o de la trayectoria) al tiempo $t$.

Imaginemos ahora que el espacio $\mathbb{R}^n$ esta lleno de vías de tren en el siguiente sentido.

Un *sistema de trenes* en $\mathbb{R}^n$ es una colección de trenes $\{\phi(t)\}$ satisfaciendo las siguientes condiciones.

i) Existencia; por cada punto $p_0 \in \mathbb{R}^n$ pasa al menos un tren $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}^n$, con $0 \in (a,b)$ y tal que al tiempo $t = 0$ ese tren pasa exactamente por $p_0$, esto es $\phi(0) = p_0$.

ii) Unicidad; cada vez que dos vías de tren de la colección $\phi$ y $\beta$ se intersectan (esto es para dos tiempos $t_0 \in \{\text{dominio de } \phi\}$ y $t_1 \in \{\text{dominio de } \beta\}$ pasa que $\phi(t_0) = \beta(t_1)$), entonces

$$\phi(t) = \beta(t + (t_1 - t_0)) \quad \text{para todo } t \in \{\text{dominio de } \phi\} ,$$

es decir los pasajeros en ambos trenes viajan de manera idéntica en $\mathbb{R}^n$ salvo un corrimiento en el tiempo de magnitud $(t_1 - t_0)$.

iii) Diferenciabilidad; la correspondencia

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \tfrac{d\phi}{dt}\big|_{t=0} \end{aligned}$$

(para $\phi(t)$ el tren en el sistema que pasa por exactamente $x$ al tiempo $t = 0$) es una función $C^\infty$ con respecto a la variable $x$.

Dado un sistema de trenes en $\mathbb{R}^n$, la historia de todos los pasajeros nos da una función $\Phi$ llamada *flujo* que tiene la forma

$$\Phi : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

(para $\Omega$ un abierto que contiene a $\{0\} \times \mathbb{R}^n$) definida como

$\Phi(t, x) \doteq$ posición al tiempo $t$ del pasajero que al tiempo $t = 0$ se encontraba en $x$

$\doteq \phi(t)$ , (donde $\phi(t)$ es el tren del sistema que pasa por $x$ al tiempo $t = 0$) ,

y se satisfacen las siguientes condiciones:

i) $\Phi(0, x) = x$

(los pasajeros no se mueven al tiempo cero).

ii) $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(t + s, x)$

(es igual moverse primero un tiempo $s$ y después un tiempo $t$ que a la inversa).

Finalmente partiendo del sistema de trenes podemos interpretar $F(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como una función que a cada punto $x$ le asocia un vector de velocidad $F(x)$, esto es $F$ es un *campo vectorial* $C^\infty$ en $\mathbb{R}^n$. Por definición su ecuación diferencial asociada es

$$\dot{x} = F(x)$$

y sus trayectorias solución serán $\phi(t)$, esto es, satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = F(\phi(t)) .$$

**2.1 Teorema.** *En $\mathbb{R}^n$ existe una correspondencia biunívoca entre:*

(i) *Campos vectoriales $F(x)$.*

(ii) *Ecuaciones diferenciales $\dot{x} = F(x)$.*

(iii) *Funciones de flujo $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*

(iv) *Sistemas de trenes $\{\phi(t)\}$.*

*(Donde los objetos satisfacen las condiciones correspondientes enunciadas antes.)*

La parte difícil para la demostración es (ii) $\Rightarrow$ (iv), que es justo el teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias.

El interés de lo anterior está en lo siguiente: dada una ecuación diferencial $\dot{x} = F(x)$ casi nunca puede resolverse explícitamente (esto es hallar las trayectorias $\phi(t)$ mediante funciones elementales), sin embargo su flujo y su sistema de trenes existen.

**Notación.** Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ se escribirá

$$\begin{aligned} F &= (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_n(x_1, ..., x_n)) \\ &= f_1(x_1, ..., x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + f_n(x_1, ..., x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}, \end{aligned}$$

usando ambas notaciones según nos parezca más claro.

## 3. Topología y dinámica de trenes.

Un primer intento para describir las trayectorias o soluciones de una ecuación diferencial $\dot{x} = F(x)$, puede dividirse en dos aspectos:

Primero un aspecto topológico y geométrico: determinar la forma de las vías de tren en $\mathbb{R}^n$. ¿Como es cada una?, ¿como llenan el espacio $\mathbb{R}^n$?

Segundo un aspecto dinámico: ¿como se mueven los pasajeros en cada vía?

Para el primer aspecto notamos que existe una infinidad de formas en que las vías de tren pueden llenar $\mathbb{R}^n$ (basta tomar cualquier libro de ecuaciones diferenciales ordinarias y mirar los dibujos que aparecen).

El aspecto dinámico es mucho más sencillo si nos restringimos a mirar solo una vía, podemos entonces dar una clasificación sencilla (una vez que conocemos la vía), obteniendo:

Posibles comportamientos de un tren (o trayectoria) que proviene de un campo vectorial $C^\infty$.

Caso 1. La vía es un punto $p_0 \in \mathbb{R}^n$.

Esto pasa si y solo si $F(p_0) = 0$ (el campo tiene un cero en ese punto). La trayectoria solución es de la forma $\phi(t) \equiv p_0$. El movimiento del pasajero está bien definido para todo tiempo. Podemos decir coloquialmente que el tren está detenido en $p_0$ ó que $p_0$ es una estación del sistema de trenes.

Caso 2. La vía es homeomorfa a un círculo.

Esto pasa si y solo si la trayectoria $\phi(t)$ es periódica como función de $t$, esto es existe un tiempo estrictamente positivo $T \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(0) = \phi(T)$, pero $\phi(t) \neq \phi(0)$ para tiempos $t \in (0, T)$. En consecuencia, el movimiento del pasajero está bien definido para todo tiempo. Coloquialmente el cabús de este tren está enganchado con la máquina y los vagones se mueven en círculo.

Caso 3. La vía es homeomorfa a un segmento de recta.

Subcaso (a), el movimiento del pasajero está bien definido para todo tiempo. Por ejemplo para $F = x\frac{\partial}{\partial x}$ en $\mathbb{R}^1$, el flujo es $\Phi(t,x) = e^t x : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Subcaso (b), el movimiento del pasajero está bien definido para solo un intervalo de tiempo $(a,b)$ $(\neq \mathbb{R})$. Por ejemplo para $F = x^n \frac{\partial}{\partial x}$ en $\mathbb{R}^1$ con un número entero $n \geq 2$, el tal que si el pasajero parte de $p_0 > 0$, en un tiempo finito

$$t_1 = \int_{p_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^n} < \infty$$

recorre todo el semieje positivo. Es conveniente recordar que si $\dot{x} = F(x)$ es una ecuación diferencial $C^\infty$ en $\mathbb{R}^1$, el tiempo necesario para que un pasajero viaje en los trenes de la ecuación diferencial entre dos puntos $a < b$ en $\mathbb{R}^1$, esta dado por

$$T = \int_a^b \frac{dx}{f(x)} ,$$

suponiendo que $f$ no se anula en el interior del intervalo $(a,b)$. La prueba de esta relación es un ejercicio elemental.

Una mezcla de ambos aspectos (topológicos y dinámicos) es la siguiente pregunta fundamental para cualquier campo vectorial $C^\infty$: ¿dado $p_0 \in \mathbb{R}^n$, a donde va el pasajero que está en $p_0$ al tiempo $t = 0$, cuando el tiempo $t$ tiende a $\pm\infty$?

## 4. Rotaciones y conmutadores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.

Necesitamos ahora algunos elementos que nos permitan comparar los espacios euclideanos reales y complejos. Definimos la rotación $J$ en $\mathbb{R}^2$ mediante la función:

$$J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} .$$

En efecto $J$ es una rotación euclideana por $\pi/2$ radianes en sentido del reloj. Para $\mathbb{R}^4$ podemos definir análogamente la rotación $J : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mediante la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Nuestro segundo ingrediente es el paréntesis de Lie. Dados dos campos vectoriales $F = (f_1, ..., f_n)$ y $G = (g_1, ..., g_n)$ en $\mathbb{R}^n$, el paréntesis de Lie de ellos es un nuevo campo vectorial definido como

$$[F,G] = \left( \sum^n (g_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} - f_i \frac{\partial g_1}{\partial x_i}), ..., \sum^n (g_i \frac{\partial f_n}{\partial x_i} - f_i \frac{\partial g_n}{\partial x_i}) \right) .$$

Cuando $[F,G] \equiv 0$ decimos que los campos vectoriales *conmutan.* Su interpretación es como sigue:

**Lema.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
i) *Dos campos vectoriales $F$ y $G$ en $\mathbb{R}^n$ conmutan.*
ii) *Para todo $p_0 \in \mathbb{R}^n$ los flujos asociados $\Phi_F$, $\Phi_G$ son tales que*

$$\Phi_F(t, \Phi_G(s, p_0)) = \Phi_G(s, \Phi_F(t, p_0))$$

*para tiempos suficientemente pequeños $0 < s, t < \epsilon(p_0)$.*
iii) *Un pasajero que partiendo de $p_0$ viaja un tiempo $t$ por los trenes de $F$ y luego un tiempo $s$ por los trenes de $G$, llega al mismo punto viajando primero un tiempo $s$ por los trenes de $G$ y luego un tiempo $t$ por los trenes de $F$ (para tiempos suficientemente pequeños $0 < s, t < \epsilon(p_0)$).*

La demostración puede verse en [1, pág. 209] ó [15, pág. 221].

## 5. Parejas de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$.

**Notación.** Como es usual identificamos $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)\}$ con $\mathbb{C} = \{z\}$ mediante la biyección $(x,y) \leftrightarrow z = x + \sqrt{-1}y$. En lo que sigue un campo vectorial real $C^\infty$ en $\mathbb{R}^2$ se escribira como

$$F = (u(x,y), v(x,y)) \doteq u(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + v(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \,.$$

La rotación $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ arriba definida actúa en los campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$, rotando cada vector por un ángulo $\pi/2$, tenemos entonces un *campo rotado*

$$JF = (-v(x,y), u(x,y)) \doteq v(x,y)\frac{\partial}{\partial x} - u(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \,.$$

Evidentemente los campos vectoriales $F$ y $JF$ tienen la misma norma y son $\mathbb{R}$–linealmente independientes en los puntos donde $F \neq 0$.

**Proposición.** *Para $F$ un campo vectorial $C^\infty$ en $\mathbb{R}^2$ con ceros aislados, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
i) *$F$ y $JF$ conmutan.*
ii) *$u(x,y)$ y $v(x,y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann.*

*Demostración:* Un cálculo sencillo muestra que

$$[F, JF] = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)(-u, v) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)(v, u) \,.$$

Supongamos que el conmutador se anula. Como los campos vectoriales $(-u,v)$ y $(v,u)$

de Cauchy–Riemann se satisfacen para la función $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$. Por el teorema de extensión de Riemann (usando que los ceros de $F$ son aislados), sigue que las ecuaciones de Cauchy–Riemann también se satisfacen en los ceros de $F$. El inverso es ahora inmediato. $\square$

**Definición.** Una pareja de campos vectoriales reales $C^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, de la forma

$$F = u(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + v(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ \ JF = v(x,y)\frac{\partial}{\partial x} - u(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

forman un *campo vectorial holomorfo* en $\mathbb{C}$ si satisfacen alguna de las propiedades en la Proposición anterior. La notación compleja para la pareja es

$$X = (u(x,y) + \sqrt{-1}v(x,y))\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{ó} \quad X = f(z)\frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

conveniendo que $f(z) = u(x,y) + \sqrt{-1}v(x,y)$.
Ejemplos y teoría de estos campos en $\mathbb{C}$, pueden hallarse en [5] y [12].

## 6. Parejas de campos vectoriales en $\mathbb{R}^4$.

Identificamos $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, y_1, x_2, y_2)\}$ con $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2)\}$ mediante $(x_i, y_i) \leftrightarrow z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$. Un campo vectorial real $C^\infty$ en $\mathbb{R}^4$ se escribe como

$$F = u_1(x_1,y_1,x_2,y_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + v_1(x_1,y_1,x_2,y_2)\frac{\partial}{\partial y_2} + u_2(x_1,y_1,x_2,y_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + \\ + v_2(x_1,y_1,x_2,y_2)\frac{\partial}{\partial y_2}\ .$$

La rotación $J : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ actua en los campos vectoriales en $\mathbb{R}^4$ y tenemos un *campo rotado*

$$JF = v_1\frac{\partial}{\partial x_1} - u_1\frac{\partial}{\partial y_2} + v_2\frac{\partial}{\partial x_1} - u_2\frac{\partial}{\partial y_2}\ .$$

**Proposición.** *Para $F$ un campo vectorial $C^\infty$ en $\mathbb{R}^4$ con ceros aislados Si $u_i(x,y)$ y $v_i(x,y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann entonces $F$ y $JF$ conmutan.*

*Demostración:* Recordemos que las ecuaciones de Cauchy–Riemann se extienden de manera obvia para funciones entre $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ de la forma

$$(x_1 + \sqrt{-1}y_1, x_2 + \sqrt{-1}y_2) \mapsto (u_1 + \sqrt{-1}v_1)\ ,$$

$$(x_1 + \sqrt{-1}y_1, x_2 + \sqrt{-1}y_2) \mapsto (u_2 + \sqrt{-1}v_2)\ ,$$

requiriendo que se satisfagan las ecuaciones de Cauchy–Riemann en cada variable $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i \in \mathbb{C}$ por separado. La prueba se reduce a un cálculo bastante laborioso usando los mismos argumentos de la sección anterior. $\square$

**Definición.** Una pareja de campos vectoriales reales $C^\infty$ en $\mathbb{R}^4$, de la forma $F$ y $JF$ forman un *campo vectorial holomorfo* en $\mathbb{C}^2$ si satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann como en el resultado anterior. La notación compleja para la pareja es

$$X = f_1(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + f_2(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_2} \ ,$$

conveniendo que $f_i(x_1+\sqrt{-1}y_1, x_2+\sqrt{-1}y_2) = u_i(x_1, y_1, x_2, y_2)+\sqrt{-1}v_i(x_1, y_1, x_2, y_2)$.

**Ejemplo. Los polinomios como campos vectoriales holomorfos.** Sea $P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ una función cuyas componentes sean polinomios complejos de dos variables $P(z_1, z_2) = (P_1(z_1, z_2), P_2(z_1, z_2))$. Separando partes reales e imaginarias obtenemos una función real

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x_1, y_1, x_2, y_2) & \mapsto & (\Re e(P_1), \Im m(P_1), \Re e(P_2), \Im m(P_2)) \ , \end{array}$$

que son ejemplos de funciones reales que satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann, como en la Proposición anterior.

La generalización de esta propiedad para campos vectoriales holomorfos en $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$ es ahora obvia siguiendo las mismas ideas. Ejemplos y teoría de estos campos en $\mathbb{C}^n$, pueden hallarse en [7].

## 7. Significado geométrico del tiempo complejo $\mathbb{C}$.

Un campo holomorfo $X$ en $\mathbb{C}$ o $\mathbb{C}^2$ da origen naturalmente a dos campos reales $F$ y $JF$ llamados la *parte real* y la *parte imaginaria* de $X$, respectivamente. Para fijar ideas veamos como se hace esto en la práctica.

**Ejemplo.** Sea $X = z^2\frac{\partial}{\partial z}$ un campo vectorial holomorfo en $\mathbb{C}$. La función $z \mapsto z^2$ se escribe en notación real como $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$. Los correspondientes campos vectoriales parte real y parte imaginaria son:

$$F = (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad JF = 2xy\frac{\partial}{\partial x} - (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial y} \ .$$

El acoplamiento de $F$ y $JF$, en el sentido de que conmutan, tiene dos consecuencias:

Consecuencia dinámica: como tiempo para $X$ puede usarse la suma $\mathbb{R}_F \oplus \mathbb{R}_{JF} = \mathbb{R}^2$ de los tiempos reales $\mathbb{R}_F$, $\mathbb{R}_{JF}$ asociados a los campos vectoriales reales $F$ y $JF$.

Consecuencia geométrica: El sistema de trenes de $X$ da origen superficies reales en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^4$ (equivalentemente $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{C}^2$).

Veamos en detalle la primera.

Coloquialmente:

Sea $p_0 \in \mathbb{R}^4$ un punto fijo, colocamos en este punto a un pasajero ideal de tren (como en la sección 2). Poniendo en $\mathbb{R}^4$ el campo vectorial $F$, el pasajero tiene a su disposición un sistema de trenes por los cuales puede viajar. Pero de hecho solo un tren pasa por el punto $p_0$ donde él esta. Si adicionalmente se considera el campo $JF$ el pasajero tiene ahora dos sistemas de trenes por los cuales viajar. De hecho es conveniente que el pasajero posea dos relojes, uno para medir el tiempo cuando viaja en los trenes de $F$ y otro para cuando viaja en los trenes de $JF$.

Matemáticamente:

Dado dos sistemas de trenes $F$ y $JF$ que conmutan en $\mathbb{R}^4$, la historia de todos los pasajeros nos da una función $\Phi_{\mathbb{C}}$ llamada *flujo complejo* de la forma

$$\begin{array}{rcl}\Phi_{\mathbb{C}} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (t,s) \times p_0 & \mapsto & \Phi_{\mathbb{C}}((t,s),p_0)\end{array}$$

(para $\Omega$ un abierto) definida como

$\Phi_{\mathbb{C}}((t,s),p_0) \doteq$ posición al tiempo $t$ del pasajero que al tiempo $(0,0)$ se encontraba en $p_0$ y que ha viajado un tiempo $t$ bajo $F$ y luego un tiempo $s$ bajo $JF$,

y se satisfacen las siguientes condiciones:

i) $\Phi_{\mathbb{C}}((0,0),p_0) = p_0$

(los pasajeros no se mueven para el tiempo cero).

ii) Para todo $p_0 \in \mathbb{R}^4$ se tiene que

$$\Phi_{\mathbb{C}}(t,s),p_0) = \Phi_{\mathbb{C}}((s,t),p_0)$$

para tiempos suficientemente pequeños $0 < s,t < \epsilon(p_0)$.

Sin embargo es sorprendente que existen campos vectoriales holomorfos tales que :

$$\Phi_{\mathbb{C}}((t,s),p_0)) \neq \Phi_{\mathbb{C}}((s,t),p_0)\ ,$$

para tiempos $t, s$ suficientemente grandes, i.e. el pasajero debe ser cuidadoso al elegir a que tren sube primero (ver ejemplo en la sección 8).

Fijo un punto $p_0$, los conjuntos de la forma $\{\Phi_{\mathbb{C}}((t,s),p_0) \mid \text{ para todo } 0 < s,t < \epsilon(p_0)\}$ pueden asumir dos posibilidades topológicas:

un punto (si y solo si $F(p_0) = 0$), ó

una superficie lisa, (si y solo si $F(p_0) \neq 0$).

Cuando este conjunto es una superficie (contenida en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^4$) le llamaremos una *placa de flujo*.

**Definición.** Una *trayectoria compleja* $\mathcal{L}$ por un punto $p_0$, para un campo holomorfo $X$ en $\mathbb{R}^{2n}$, con campos asociados $F$ y $JF$, es un conjunto de la forma

$$\mathcal{L} = \{q \in \mathbb{R}^{2n} \mid \text{existe colección de placas de flujo cuya unión es conexa y contiene a } p_0 \text{ y } q\}\,.$$

Topológicamente una trayectoria compleja $\mathcal{L}$ puede ser un punto o una superficie real, lisa conexa y orientable. Esto conduce a una infinidad de posibilidades, a diferencia del caso de trayectorias reales, que solo pueden asumir tres formas topológicas como se dijo en la sección 3.

## 8. Dinámica topológica cerca de puntos de velocidad infinita.

La dinámica topológica (que se entenderá como la descripción del comportamiento de las trayectorias complejas) de un campo holomorfo en $\mathbb{C}^2$ dista mucho de ser bien entendida. Más que tratar de reseñar sistemáticamente lo que se conoce de ella (como se dice comunmente; ello va más alla de los objetivos de este trabajo ... y de los alcances de este autor... ), simplemente mencionaremos tres ejemplos de comportamientos rádicalmente distintos en los sistemas de trenes provenientes de campos complejos.

**Ejemplo. Campos lineales.** Para la teoría general ver [4]. Consideremos el campo vectorial lineal

$$X = z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \sqrt{-1}z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\,.$$

Su flujo complejo es

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{\mathbb{C}} : \Omega \subset \mathbb{C}\times\mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ (t+\sqrt{-1}s)\times(z_1,z_2) & \mapsto & (e^{t+\sqrt{-1}s}z_1, e^{\sqrt{-1}(t+\sqrt{-1}s)}z_2)\,. \end{array}$$

En coordenadas reales la expresión se complica (pero a cambio evitamos $\sqrt{-1}$):

$$\Phi_{\mathbb{C}} : \Omega \subset \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

$$(t,s)\times(x_1,y_1,x_2,y_2) \mapsto (x_1e^t sen(s) - y_1e^t cos(s), ..., x_2e^{-s}cos(t) + y_2e^{-s}sen(t))\,,$$

quizá esto no ayuda a entender claramente, veamos otro camino describiendo algunas trayectoria complejas típicas.

El eje $z_1$ es una copia de $\mathbb{C}\subset\mathbb{C}^2$ y es una trayectoria compleja del campo $X$. Ahí el campo se reduce a $z_1\frac{\partial}{\partial z_1}$. Las partes reales e imaginarias son

$$F = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial}{\partial y_1}\quad,\quad JF = y_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial y_1}\,,$$

Ahora entendemos: un pasajero que parte de $p_0 = (x_1,y_1,0,0)$, al usar los trenes de $F$ se mueve en la linea real que une $p_0$ con el origen en $\mathbb{C}^2$, acercandose al origen en tiempo negativo y alejandose del origen para tiempo positivo. Al usar los trenes de

$JF$ se viaja en el círculo contenido en el eje $z_1$, con centro el origen y que pasa por $p_0$. Ambos tiempos (el de $F$ y el de $JF$) tienen un significado real.

En el eje $z_2$ los papeles se invierten, un pasajero en los trenes de $F$ se mueve sobre círculos y en los trenes de $JF$ el pasajero lo hace sobre la línea real que une el origen con su punto de partida $p_0$.

Partiendo del punto $(1,1) \in \mathbb{C}^2$ el flujo en notación compleja es

$$t + \sqrt{-1}s \mapsto (e^{t+\sqrt{-1}s}, e^{-s+\sqrt{-1}t}) \, .$$

La trayectoria compleja $\mathcal{L}$ es homeomorfa a una copia de $\mathbb{C}$. Los trenes de $F$ y $JF$ definen dos familias de líneas "paralelas" entre si sobre $\mathcal{L}$.

**Ejemplo. Los polos como estaciones de tren.** Sea $X = \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}$ un campo vectorial con un polo en $0 \in \mathbb{C}$. Sus partes reales e imaginarias son:

$$F = \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad , \quad JF = \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\left(-y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) \ ,$$

que son campos vectoriales $C^\infty$ en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Describiendo la dinámica de $F$: las vías de tren son como la silla usual, los cuatro semiejes son trayectorias y las otras trayectorias son hiperbólas con los ejes como asíntotas.

Partiendo de los puntos $p_0$ en el eje semieje $x$ positivo el flujo solo está bien definido para tiempos positivos, mientras que para el tiempo negativo

$$t_1 = \int_{p_0}^{0} x dx < 0$$

se llega en ese tiempo al origen. Algo similar ocurre si $p_0$ se situa en el eje $y$, pero ahora el pasajero puede viajar tiempo arbitrariamente negativo, sin embargo para el tiempo positivo

$$t_1 = \int_{0}^{p_0} x dx > 0$$

llega al origen. Esto es, el origen $0 \in \mathbb{R}^2$ es como una estación de tren en la que dos trenes arriban a un tiempo finito (los semiejes en $y$) y dos trenes salen a un tiempo finito (los semiejes en $x$). Coloquialmente dicho el origen es una estación del sistema de trenes $F$.

Comparemos que pasa para el campo vectorial $C^\infty$

$$x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} \, .$$

Los trenes en los semiejes $y$ se acercan a la estación en el origen pero mientras más se acercan más reducen su velocidad y no llegan a ella en tiempo finito. Un pasajero que inicia su viaje en $p_0 \in \{\text{eje } y\} - \{0\}$ ve que el tren se acerca a la estación 0 conforme el tiempo va a $+\infty$ pero nunca puede arribar a ella.

Con esta experiencia ahora es fácil ver que si para $F$ como arriba un pasajero que empieza su viaje en $p_0 = (1, 0.1)$ puede elegir una pareja de tiempos $(t, s) = (-2, 2)$ tal que

$$\Phi_{\mathbb{C}}((-2,2), p_0)) \neq \Phi_{\mathbb{C}}((2,-2), p_0) \ ,$$

Comportamientos mucho más complicados con respecto a las estaciones de tren pueden ocurrir en más variables como sigue:

**Ejemplo. Una infinidad de pasajeros pasando por el mismo punto al mismo tiempo, en distintos trenes.** Consideremos el siguiente campo vectorial en $\mathbb{C}^2$

$$X = \frac{1}{z_1}\left( z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \ .$$

La imagen de sus trayectorias complejas son copias del plano $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2$ definidas por ecuaciones $\{z_1 - \lambda z_2 = 0\}$ para $\lambda \in \mathbb{C}$, esto es, son todas las líneas complejas por el origen.

Si miramos a la línea $\mathcal{L} = \{z_2 = 0\} - \{(0,0)\}$, el campo se anula ahí idénticamente. Los pasajeros permanecen sin moverse.

Si miramos a la línea $\mathcal{L} = \{z_1 - \lambda z_2 = 0\} - \{(0,0)\}$ para $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, poniendo coordenadas complejas $\{w\}$ en esa línea, mediante la parametrización $\xi : w \mapsto (\lambda w, w)$, el campo puede escribirse como

$$\xi^* X = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial w} \ .$$

El campo vectorial posee velocidad constante no cero, y las vías son como líneas reales euclideanas paralelas entre sí. En particular, muchos pasajeros cruzan por el origen de $\mathbb{C}^2$ al mismo tiempo.

Si miramos a la línea $\mathcal{L} = \{z_1 = 0\} - \{(0,0)\}$, el campo es ahí idénticamente infinito. Los pasajeros se mueven a velocidad infinta o quizá sea mejor decir que el tiempo no fluye en esa línea.

Esta complejidad se debe que el campo $X$ no es $C^\infty$ en $\{z_1 = 0\}$, en particular el teorema de existencia y unicidad de soluciones no se aplica en esa línea.

## 9. Centros isocronos.

Si $F$ es un campo vectorial $C^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, decimos que tiene un *centro isocrono* en $p_0 \in \mathbb{R}^2$ si $p_0$ es un cero aislado de $F$ y todas las trayectorias en una vecindad abierta $U \subset \mathbb{R}^2$ de $p_0$ son periódicas con el mismo período $T > 0$. Al abierto conexo máximo que está lleno de esas trayectorias se le llama la cuenca del centro. Coloquialmente: los trenes de $F$ dan vuelta alrededor de $p_0$ y todos tardan el mismo tiempo en dar exactamente una vuelta.

Un problema clásico de campos vectoriales en el plano $\mathbb{R}^2$ es el hallar algoritmos para determinar cuando un campo posee un centro. Es también interesante decidir cuando posee un centro isocrono.

Los centros isocronos fueron descubiertos por Galileo, estudiando el péndulo ideal sin fricción, que en el lenguaje de campos vectoriales es dado por

$$F = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} ,$$

(pensando a $x$, $y$ como la posición y velociad angulares del péndulo respectivamente). Este campo posee un cero en el origen y trayectorias periódicas de período constante $T = 2\pi$, por lo tanto es un centro isocrono. Fue Ch. Huygens quién probablemente primero describio matemáticamente centros isocronos. El estudio de centros isocronos ha continuado recientemente, ver [6, 10]. Nuestro resultado es que los campos holomorfos permiten hallar familias de ejemplos con centros isocronos, de manera sencilla.

**Proposición.** *Sea $X(z) = P(z)\frac{\partial}{\partial z}$ un campo vectorial holomorfo en $\mathbb{C}$. Supongamos que tiene un cero en $z_0 \in \mathbb{C}$ con parte lineal $P'(z_0) = \sqrt{-1}\lambda$ imaginaria pura ($\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$). Entonces su campo vectorial parte real $F$ posee un centro isocrono en $z_0$ de período $T = 2\pi|\lambda|$.*

Demostración. Es posible mostar que salvo cambio de coordenas holomorfo, un campo vectorial con un cero es localmente equivalente a su parte lineal ver [5], que en este caso seria

$$P'(z_0)z\frac{\partial}{\partial z} \quad , \text{ esto es } \sqrt{-1}\lambda\frac{\partial}{\partial z} .$$

Pasando a la parte real de este campo se obtiene un mútiplo real del campo que describe el péndulo ideal sin fricción. □

Ahora es fácil hallar ejemplos con un número arbitrariamente grande de centros isocronos.

**Ejemplos.** Sea $P(z)$ un polinomio complejo con $d$ raices reales y con derivada real en esos puntos, entonces $\sqrt{-1}P(z)\frac{\partial}{\partial z}$ posee $d$ centros isocronos. Más en general usando que es bien conocida la existencia de funciones holomorfas $h(z)$ en todo $\mathbb{C}$ con con un número infinito de ceros reales (inponiendo algunas condiciones que dicen como deben estar asintóticamente distribuidos dichos ceros) con derivada real. Entonces $h(z)\frac{\partial}{\partial z}$ da origen a campos reales $C^\infty$ en $\mathbb{R}^2$, con una infinidad de centros isocronos.

## 10. Campos Hamiltonianos.

Dada una función $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ de clase $C^\infty$ se define el *campo Hamiltoniano* asociado como:

$$X_h = -\frac{\partial h}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial h}{\partial y_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_2} .$$

Muchos problemas físicos pueden modelarse con este tipo de campos ver [1].

Dos propiedades útiles y deseables en el estudio de estos campos son las siguientes.

El campo vectorial $X_h$ *posee una primera integral adicional* si existe una segunda función $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $C^\infty$, con su campo Hamiltoniano asociado $X_g$ linealmente independiente con $X_h$ casi en todo punto de $\mathbb{R}^4$, y tal que los campos Hamiltonianos asociados conmutan

$$\{X_h, X_g\} = 0 \, .$$

Geométricamente esto dice que fijo un conjunto de la forma

$$\{h^{-1}(c_1)\} \cap \{g^{-1}(c_2)\} \subset \mathbb{R}^4 \quad \text{para } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ constantes,}$$

las trayectorias de $X_h$ y $X_g$ que empiezan en un punto de este conjunto permanecen siempre en él.

El campo vectorial $X_h$ es *completo* si para todo $p_0 \in \mathbb{R}^4$ la trayectoria solución que pasa por él está bien definida para todo tiempo real $t \in \mathbb{R}$. El problema de estudiar la completez de campos Hamiltoniamos es muy interesante y posee diversas aplicaciones teóricas y practicas, ver [14].

Nuestro objetivo es mostrar que estas dos propiedades, aparentemente independientes, están entrelazadas (usando algunas técnicas de campos vectoriales holomorfos).

Bajo la hipótesis de que ambos campos Hamiltonianos conmutan, sabemos de la sección 7 que podemos definir un sistema de trenes con tiempo $\mathbb{R}^2$ y las trayectorias de este nuevo sistema dan origen a una colección de superficies reales $\{\mathcal{L}\} \subset \mathbb{R}^4$. Nótese que siempre se puede escribir

$$\mathcal{L} \subseteq \{h^{-1}(c_1)\} \cap \{g^{-1}(c_2)\} \, ,$$

eligiendo las constantes $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$ adecuadamente.

Nuestro primer ingrediente es el siguiente:

**Lema.** *Sea $\mathcal{L}$ una $\mathbb{R}^2$–trayectoria de dos campos Hamiltonianos $X_h$ y $X_g$ y supóngase que esos campos son $\mathbb{R}$–linealmente independientes en cada punto de $\mathcal{L}$. Entonces existen funciones $\psi : V \subset \mathbb{C} \to \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^4$ de clase $C^\infty$ y un campo vectorial holomorfo $X$ en $V$ teniendo partes real e imaginaria $F$, $JF$ tales que:*

$$\psi_* F = X_h \quad y \quad \psi_* JF = X_g \, .$$

Demostración. Usar las ideas de la sección 7. □

Esto es, el comportamiento de la pareja de campos Hamiltonianos (cuando no se alinean) es como el de los campos holomorfos. Veamos ahora que tales funciones $\psi$ pueden cubrir puntos donde $X_h$ y $X_g$ se anulan simultaneamente, ello requiere mayor trabajo dando resultados más interesantes.

**Teorema.** *Sean $X_h$ y $X_g$ dos campos vectoriales Hamiltonianos polinomiales en $\mathbb{R}^4$, supongamos que conmutan y tienen un cero común en $p_0 \in \mathbb{R}^4$. Sea $\mathcal{L}$ una $\mathbb{R}^2$–trayectoria que contiene en su cerradura a $p_0$.*

*i) Entonces existen una función $\psi : V \subset \mathbb{C} \to \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^4$ de clase $C^\infty$ y un campo vectorial holomorfo $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ en $V$ con un cero en $\psi^{-1}(p_0)$ y teniendo partes real e imaginaria $F$, $JF$ tales que:*

$$\psi_* F = X_h \quad y \quad \psi_* JF = X_g \ .$$

*ii) Si los campos Hamiltonianos $X_h$, $X_g$ son completos:*

*el orden del cero de $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ es 1 y $\mathcal{L}$ es homeomorfa a un cilindro,*

*ó*

*el orden del cero de $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ es 2 y $\mathcal{L}$ es homeomorfa a un plano.*

Demostración. Daremos solo un bosquejo de la prueba los detalles y una version más general del resultado pueden verse en [11].

La primera dificultad es la existencia de una función diferenciable $\psi$ cuya imagen cubre a $p_0$, ya que $\mathcal{L} \cup \{p_0\}$ puede no ser una superficie lisa en $p_0$. Aplicando la teoría de singularidades para conjuntos algebraicos, (usando que $h$ y $g$ son polinomios) sigue que tal función $\psi$ existe y se le llama una *resolución.*

Como la resolución es localmente un difeomorfismo fuera de $\psi^{-1}(p_0)$, es posible jalar los campos Hamiltonianos para obtener el $V$ dos campos reales $F$ y $JF$ que conmutan y no se alinean simultáneamente. De hecho reduciendo $V$ si es necesario puede suponerse que ambos campos no se anulan en $V - \{\psi^{-1}(p_0)\}$.

Por lo expuesto en la sección 5, el campo holomorfo $X$ existe en $V - \{\psi^{-1}(p_0)\} \subset \mathbb{C}$. Es fácil ver que es acotado cerca de $\psi^{-1}(p_0)$ y por el teorema de extensión de Riemann, se extiende holomorfamente a ese punto. Como $X_h$ y $X_g$ se anulan en $p_0$, necesariamente dicha extensión de $X$ debe anularse en $\psi^{-1}(p_0)$. Ello termina la prueba de la parte (i).

Para (ii) es posible hacer una lista de la posibilidades de superficies reales $\mathcal{L}$ que poseen dos campos vectoriales reales, completos, que conmutan, sin ceros y nunca se alinean. Obteniendo que $\mathcal{L}$ es homeomorfa a un cilindro, un plano o un toro. El toro debe descartarse pues por (i), los campos se anulan en la superficie ya compactada; $\mathcal{L} \cup \{p_0\}$. La lista además permite mostar que si $\mathcal{L}$ es un plano necesariamente el orden del campo holomorfo en el punto agregado para hacer compacta a $\mathcal{L}$ es 2. ■.

**Ejemplo.** *Campos Hamiltonianos incompletos.*

Consideremos los polinomios

$$h = x_1^2 - x_2^2 - y_1^3 + 3y_1y_2^2 \ \text{ y } \ g = -2x_1x_2 - 3y_1^2y_2 + y_2^3$$

en $\mathbb{R}^4$, por ejemplo el campo Hamiltoniano asociado a $h$ es

$$X_h = (3y_1^2 - 3y_2^2)\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1\frac{\partial}{\partial y_1} - 6y_1y_2\frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_2\frac{\partial}{\partial y_2} \ .$$

Un cálculo simple muestra que los campos Hamiltonianos conmutan $[X_h, X_g] = 0$, Fijando $p_0 = 0 \in \mathbb{R}^4$ consideramos una $\mathbb{R}^2$–trayectoria $\mathcal{L} \subset \{h^{-1}(0)\} \cap \{g^{-1}(0)\}$ lo contiene a $p_0$ en su cerradura, es fácil verificar que los campos no se alinean en $(\{h^{-1}(0)\} \cap \{g^{-1}(0)\}) - \{0\}$. La resolución de la singularidad en este caso es

$$\begin{array}{ll} \psi : \mathbb{R}^2 \to & \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^4 \\ (x,y) \mapsto (-x^3 + 3xy^2, 3x^2y - y^3, x^2 - y^2, 2xy) \, . \end{array}$$

Notese que $\psi$ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ sobre $\mathcal{L} - \{0\}$.

Definiendo un campo vectorial auxiliar $A(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ in $\mathbb{R}^2$, tal que satisfaga $\psi_* F = X_h$ y $\psi_* JF = X_g$ sobre $\mathcal{L}$, es posible calcular que

$$F \doteq \psi^* X_h = (-x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y} \, .$$

Este es el campo vectorial que es la parte real del campo vectorial holomorfo

$$-z^2 \frac{\partial}{\partial z} \, ,$$

haciendo $z = x + \sqrt{-1}y$. El orden del cero de este campo es 2 en $0 \in \mathbb{R}^2$.

Usando $\psi$, es fácil ver que $\mathcal{L}$ escapa hacia el infinito en $\mathbb{R}^4$, y que cerca de $p_0 = 0$ es homeomorfa a un disco con un punto removido. Sigue que $\mathcal{L}$ no es homeorfa a un plano, en consecuencia $X_h$ y $X_g$ no pueden ser simultáneamente campos vectoriales completos.

El interés de la conclusión está en que no fue necesario resolver las campos Hamiltonianos o conocer explícitamente sus flujos. De hecho la parte difícil de este procedimiento es hallar la resolución $\psi$ explícitamente.

## 11. Problemas abiertos.

Enunciamos algunos problemas de campos vectoriales reales y holomorfos cuya formulación es sencilla y hasta donde el autor conoce siguen sin solución.

i) Elaborar una lista de los campos vectoriales polinomiales completos (i.e. teniendo flujo bien definido en todo $\mathbb{R}$), de grado dos en $\mathbb{R}^2$. Naturalmente tampoco se conoce la lista análoga en grados mayores que tres, o para $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, o para campos holomorfos polinomiales cuyo flujo complejo esté bien definido para todo tiempo complejo, en $\mathbb{C}^n$ para $n \geq 2$. Ver [13] o [9].

ii) Elaborar una lista de los campos vectoriales polinomiales completos de grado $d$ en $\mathbb{R}^3$, cuyos flujos $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sean completos y funciones polinomiales. Naturalmente tampoco se conoce la lista análoga en dimensión mayores que tres, o para campos holomorfos polinomiales completos en $\mathbb{C}^n$ para $n \geq 3$. Ver [2].

iii) Estimar para cada grado $d \geq 3$ el número máximo $N(d) \in \mathbb{N}$ de ciclos límites reales que puede tener un campo polinomial real de grado $d$ en $\mathbb{R}^2$. Por definición un ciclo límite es una trayectoria periódica aislada (de otras trayectorias periódicas). Ver [8].

iv) ¿ Existe un campo vectorial polinomial real en $\mathbb{R}^3$ con cero aislado en el origen, tal que todas sus trayectorias sean periódicas ? No se sabe tampoco si tal campo existe en el caso $C^\infty$. Parece ser un problema del folklore en el área, el autor no conoce citas explícitas.

v) ¿ Existen campos vectoriales polinomiales y completos en $\mathbb{R}^n$ con dos o más ceros aislados ? La misma pregunta es abierta para campos holomorfos (no necesariamente polinomiales) en $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Es sencillo construir ejemplos de campos vectoriales $C^\infty$ no polinomiales con esas condiciones. Ver [13] o [9].

vi) Sea $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ un campo vectorial en una vecindad del origen en $\mathbb{C}$, donde $f(z)$ es una función con una singularidad esencial aislada en el origen (singularidad esencial en el sentido de funciones de variable compleja). Describir cerca del origen el comportamiento de la pareja campos reales asociados $F$ y $JF$. Para ceros y polos de orden arbitrario el comportamiento se hace usando la teoría de diferenciales cuadráticas, ver [16].

vii) Dado un campo vectorial holomorfo polinomial en $\mathbb{C}^2$ de grado $d \geq 2$. Dar condiciones para que cualquiera de sus trayectorias complejas $\mathcal{L}$ tenga en su cerradura topológica $\overline{\mathcal{L}} \subset \mathbb{C}^2$ a un cero del campo vectorial. Ver [3]

## Bibliografía


1. V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer–Verlag (1978).
2. H. Bass, G. Meisters, *Polynomial flows in the plane*, Advances in Mathematics 55 (1985), 173–208.
3. Ch. Bonnatti, R. Langevin, R. Moussu, *Feuilletages de $CP(n)$: de l'holonomie hyperbolique pour les minimaux exceptionnels*, Publications Mathematiques IHES 75 (1992) 123–134.
4. O. Calvo Andrade, *Sistemas lineales complejos*, IV Escuela de Geometría y Sistemas Dinámicos, 0. Calvo et al. editores, Aportaciones Matemáticas 21 (1998) 95–120.
5. L. Brickman, E. S. Thomas, *Conformal equivalence of analytic flows*, Journal of Differential Equations 25 (1977) 310–324.
6. L. Gabrilov, *Isocronicity of plane polynomial Hamiltonian systems*, Nonlinearity 10 (1997) 433–448.
7. X. Gómez–Mont, L. Ortíz–Bobadilla, *Sistemas Dinámicos en Superficies*, Aportaciones Matemáticas, Notas de Investigación 3 (1989).
8. Yu. Ilyashenko, *Finiteness Theorems for Limit Cycles*, American Mathematical Society (1991).
9. J. L. López, J. Muciño–Raymundo, *On the problem of deciding whether a holomòrphic vector field is complete*, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser, 114 (2000) 171–195.
10. P. Mardešić, Ch. Rousseau, B. Toni, *Linearization of isochronous centers*, Journal of Differential Equations 121 (1995) 67–108.
11. J. Muciño–Raymundo, *Existence of and additional first integral and completeness of the flow, for Hamiltonian vector fields*, por aparecer en Proceedings of the Hamsys 98. J. Llibre et al. editores, World Scientific (2000).

12. J. Muciño–Raymundo, C. Valero–Valdés, *Bifurcations of meromorphic vector fields on the Riemann sphere*. Ergodic Theory and Dynamical Systems 15 (1995) 1211–1222.
13. J. P. Rosay, *Automorphisms of $\mathbb{C}^n$, a suvey of Andersen–Lempert theory and applications*, en Complex Geometric Analysis in Pohang, K.-T. Kim et al. editores, Contemporary Mathematics 222 (1999) 131–145.
14. D. G. Saari, Z. Xia, *Off to infinity in finite time*, Notices of the AMS, 42, 5 (1995) 538–546.
15. M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I*, Publish or Perish (1979).
16. K. Strebel *Quadratic Differentials*, Springer–Verlag (1984).