Miscelánea Matemática 30 (2000) 41–58 SMM

Algunos problemas de geometría en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ para el siglo XXI*

Jesús Muciño–Raymundo
Instituto de Matemáticas
UNAM, Campus Morelia
58190 Morelia, Michoacán
México
muciray@matmor.unam.mx

1 Introducción.

El último teorema de Fermat, posee como atractivo la dicotomía entre un enunciado elemental y una solución extremadamente complicada. Describiremos brevemente algunos problemas abiertos involucrando cambios de coordenadas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$, que quizás reunen las dos características anteriores. Recordemos que en cálculo decimos que un *cambio de coordenadas* es una función

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^n$$

(entre dos abiertos A y B) tal que es biyección C^∞ con inversa $f^{-1} : B \to A$ también C^∞. Metafóricamente, para muchos problemas si A y B son equivalentes bajo un cambio de coordenadas, i.e. existe $f : A \to B$ como antes, entonces podemos pensar a A y B como una misma muchacha, pero con distinto vestido.

Siendo jóvenes, siempre nos fascina cuando en lo más oscuro de un problema (de integración, de ecuaciones diferenciales, de mecánica, ... etc.) aparece un imaginativo cambio de coordenadas que instantáneamente hace el problema claro como la luz del día. Al preguntar al tutor en turno

¿cómo se te ocurrió ese cambio de coordenadas?

*Apoyado por DGAPA-UNAM y Conacyt 28492-E.

la respuesta puede tomar prestado cualquiera de los colores del crepúsculo. Hallar cambios de coordenadas es un problema difícil e interesante. Es conveniente distinguir entre:

(i) tener un teorema de existencia, con ciertas condiciones en A, B y/o f,

(ii) hallar explícitamente un cambio de coordenadas para una situación precisa.

Recordando nuestros cursos de licenciatura concluimos que desafortunadamente ambos problemas son independientes; ni $(i) \nRightarrow (ii)$, ni $(ii) \nRightarrow (i)$.

Vale la pena resaltar que en muchas de las situaciones mencionadas aquí para $\mathbb{R}^n$, resulta una simplificación empezar trabajando con el problema respectivo en $\mathbb{C}^n$ (cuando éste hace sentido).

Personalmente, el atractivo de lo que se menciona aquí puede estar en que al trabajar sobre alguno de estos problemas se hace evidente una mezcla de análisis real y complejo, topología, geometría, álgebra, física ... .

2 Cúmulos de burbujas en 2 dimensiones.

Iniciemos recordando un problema cuya solución es clásica.

Consideremos una bola abierta $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ (con centro y radio dados), coloquialmente le llamamos una *burbuja.* Si agregamos a B_1 nuevas burbujas, obtenemos un *cúmulo de burbujas* $A = \cup_j B_j$.

Supongamos que hemos agregado las burbujas que forman A sin cambiar la topología de la burbuja original B_1, esto es: A es conexo, abierto y simplemente conexo (i.e. todo lazo cerrado en A es continuamente contraible a un punto dentro de A, intuitivamente A no tiene agujeros).

Si para ese cúmulo A podemos encontrar una función $f : A \to B_1$ biyección C^∞ con inversa C^∞, entonces decimos que A presenta el fenómeno de *absorción de burbujas* C^∞.

En efecto, suele suceder para burbujas de jabón como con las que juegan los niños que dos burbujas chocan, formandose una pared entre ellas, al poco tiempo esa pared se rompe, quedando una nueva burbuja que absorbe a las dos originales.

En lenguaje abstracto podemos formular el siguiente:

Problema de absorción de burbujas C^∞: Dado $A \subset \mathbb{R}^2$ conexo, abierto y simplemente conexo ¿ existe $f : A \to B^1$ biyección C^∞ con inversa C^∞ ?

La dificultad del problema radica en la enorme complejidad de formas que puede asumir la frontera de A. Por ejemplo A puede ser acotado o no acotado, con frontera no diferenciable, con frontera fractal, ... etc.

Respuesta: siempre existe tal f.

La herramienta necesaria para la respuesta es la teoría de funciones armónicas en $\mathbb{C}$ (usaremos libremente la identificación $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$).

Dado $A \subset \mathbb{C}$, supongamos que $A \neq \mathbb{C}$ para que el problema sea no trivial y consideremos el disco $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Cambiemos el problema a hallar una función $f : A \to \Delta$ como antes. Encarguemos este problema a tres individuos:

El comentario de un físico:

Sugiero imaginar A como hecho de una lámina de un buen conductor eléctrico. Fijo algún $w_0 \in A$ pongamos en w_0 un punto de carga eléctrico, instantáneamente se forma en A un potencial eléctrico

$$V(z) : A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

con $V(w_0) = \infty$ y $V = c_0$ en la frontera de A, donde $c_0 \in \mathbb{R}$. Tenemos asociado a V;

- las líneas de flujo (trayectorias del gradiente de V), y
- las líneas equipotenciales (trayectorias V =constante).

Estas últimas son trayectorias topológicamente como círculos; encerrando w_0 y conforme se aproximan a la frontera de A se van pareciendo más a ella. Las líneas de flujo son ortogonales a las equipotenciales y topológicamente son rayos que emanan de w_0, ver [2, pág. 582]. Esto debiera ayudar ...

El comentario de un geómetra:

Sugiero imaginar sobre A las líneas de flujo y las líneas equipotenciales como formando una telaraña en A. Ambas familias de trayectorias son mutuamente ortogonales, y pueden pensarse como coordenadas polares "exóticas" $\{(\rho, \alpha)\}$ en A. Usando coordenadas polares clásicas $\{(r, \theta)\}$ en Δ puedes poner ambos sistemas en correspondencia biyectiva, ver

[2, pág. 583], hallando f como

$$\begin{array}{rcl} f : A & \to & \Delta \\ (\rho, \alpha) & \mapsto & (r, \theta) \,. \end{array}$$

El comentario de un analista:

Para estar completamente convencido solo falta resolver la ecuación de Laplace en $A - \{w_0\}$, hallando una función armónica (el potencial eléctrico) $V(z) : A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que satisfaga las condiciones de frontera:

(i) $V = c_0$ en la frontera de A,

(ii) $V(z)$ se comporta como $\log(1/|z - w_0|)$ cerca de w_0.

Afortunadamente tal función V existe (como el físico nos sugirió) cuando A es simplemente conexo y distinto de $\mathbb{C}$, gracias al método de Perron para resolver problemas de Dirichlet con valores de frontera (i) y (ii), ver [3, pág. 136] o [4, pág. 248].

Con lo anterior hemos dado una idea de la prueba de una de las joyas de la matemática del siglo XIX:

Teorema de absorción de burbujas (o de la aplicación de Riemann). *Dado $A \subset \mathbb{C}$ conexo, abierto y simplemente conexo, con $A \neq \mathbb{C}$. Siempre existe $f : A \to \Delta$ biyección C^∞ con inversa C^∞.*

Es un ejercicio de cálculo mostrar que existe $f : \Delta \to \mathbb{C}$ biyección C^∞ con inversa C^∞, y hemos llegado al:

Corolario 1. Solo existe un cúmulo de burbujas C^∞ en $\mathbb{R}^2$. *Dado $A \subset \mathbb{R}^2$ conexo, abierto y simplemente conexo. Siempre existe $f : A \to \mathbb{R}^2$ biyección C^∞ con inversa C^∞.*

Sin embargo:

Corolario 2. Existen dos cúmulos de burbujas holomorfos en $\mathbb{C}$.

(i) *Dado $A \subset \mathbb{C}$ conexo, abierto y simplemente conexo, con $A \neq \mathbb{C}$, siempre existe $f : A \to \Delta$ biyección holomorfa con inversa f^{-1} también holomorfa.*

(ii) *Si $A = \mathbb{C}$, entonces no existe $f : \mathbb{C} \to \Delta$ biyección holomorfa.*

¿Por qué $\mathbb{C}$ y Δ son distintos bajo funciones holomorfas?

Preguntemos a dos de los individuos que ya conocemos.

Comentario del geómetra:
Si tal $f : \mathbb{C} \to \Delta$ existiera entonces induciría un isomorfismo entre los grupos de cambios de coordenadas holomorfos de $\mathbb{C}$ y de Δ, respectivamente

$$\begin{aligned}\operatorname{Aut}(\mathbb{C}) &= \{g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid g \text{ es holomorfa biyectiva con inversa} \\ &\qquad \text{holomorfa}\}, \\ \operatorname{Aut}(\Delta) &= \{h : \Delta \to \Delta \mid h \text{ es holomorfa biyectiva con inversa} \\ &\qquad \text{holomorfa}\}.\end{aligned}$$

Ya que dado $g \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$, podríamos asociarle una elemento $h \in \operatorname{Aut}(\Delta)$, mediante

$$g \mapsto h \doteq f \circ g \circ f^{-1}.$$

Pero es un ejercicio sencillo probar que estos grupos no son isomorfos pues se conoce explícitamente que

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{C}) = \{g(z) = az + b \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\},$$

$$\operatorname{Aut}(\Delta) = \{h(z) = e^{\sqrt{-1}\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \mid \theta \in [0, 2\pi),\ a \in \Delta\}.$$

Por lo que no puede existir una función $f : \Delta \to \mathbb{C}$ biyección holomorfa con inversa holomorfa.

Comentario del analista:
Si $A = \mathbb{C}$ el método de Perron para hallar V no funciona pues no existen funciones armónicas $V : \mathbb{C} - \{w_0\} \to \mathbb{R}$ no constantes y acotadas inferiormente (en nuestro caso $V(z) \geq c_0$), ver [3, pág. 141].

3 La conjetura del Jacobiano.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función C^∞, nuestra cuestión básica es

¿ cómo verificar que f es un cambio de coordenadas ?

esto es, que es biyección C^∞ con inversa C^∞.

Si f es lineal basta calcular el determinante de su matriz asociada y verificar que es no cero. Pero si f no es una función lineal el problema es mucho más complejo. Trabajaremos con la familia de funciones polinomiales, sea

$$f(x_1,\ldots,x_n)=(P_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots P_n(x_1,\ldots,x_n)):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$

polinomial, esto es cada P_j es un polinomio en n variables. De acuerdo al teorema de la función inversa, una condición necesaria para que f sea invertible con inversa C^∞, es que

$$J(f)\doteq \text{determinante}\left(\frac{\partial P_j}{\partial x_i}\right)\neq 0\,,\ \text{para todo punto en } \mathbb{R}^n\,.$$

Pensando en funciones polinomiales, $J(f)$ mismo es un polinomio por lo que para su estudio reemplazar $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{C}^n$ es una *¡simplificación!* La afirmación de que la condición $J(f)\neq 0$ es suficiente es justo:

La conjetura del Jacobiano (1939). Para una función polinomial compleja $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ donde $n\geq 2$, tal que $J(f)\neq 0$ en todo $\mathbb{C}^n$, necesariamente f^{-1} polinomial existe.

Observaciones inmediatas son:

– Es posible mostrar que dado f polinomial, si su inversa f^{-1} existe es necesariamente polinomial. De donde a primera vista la conjetura pregunta sobre la inyectividad y sobreyectividad de f a partir de saber que $J(f)\neq 0$.

– Para $\mathbb{C}^n$ la hipótesis $J(f)\neq 0$ es trivial de comprobar pues $J(f)$ es un polinomio complejo y carecerá de raices si y solo si es idénticamente constante. Note que para funciones polinomiales reales $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ la hipótesis de que $J(f)$ no tenga raices reales es en la práctica no trivial de verificar. De donde en efecto pensar en $\mathbb{C}$ es una simplificación.

– La conjetura del Jacobiano fue propuesta por O. Keller en [13].

¿El problema es difícil?

Introduciendo coordenadas w_j en el contradominio tenemos

$$f(z_1,\ldots,z_n)=(P_1(z_1,\ldots,z_n),\ldots P_n(z_1,\ldots,z_n))=(w_1,\ldots,w_n)\,.$$

La conjetura del Jacobiano pregunta (suponiendo $J(f)\neq 0$) sobre la posibilidad de despejar las "z_i" en términos de las "w_j". De nuestra experiencia en secundaria con polinomios de una variable, deducimos que el problema deberá ser muy difícil para $n\geq 2$. Intentemos construir ejemplos donde la conjetura se cumpla.

4 ¿De qué material está hecho $\mathbb{C}^n$?

Dados, un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ y un grupo fijo de transformaciones biyectivas invertibles $G = \{f : X \to X\}$, donde la operación del grupo siempre es la composición de funciones. Una idea clásica debida a F. Klein nos dice que la pareja (X, G) es una *geometría* en el espacio X y las propiedades de subconjuntos de X preservadas por G son las propiedades invariantes de la geometría (X, G). Es común pensar que G nos dice de qué material está hecho X. Algunos ejemplos clásicos son dados en la tabla 1.

En el último renglón de la tabla 1 estamos pensando en el grupo

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n) = \{f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \mid f \text{ es holomorfa biyectiva con inversa} \\ \text{holomorfa}\}.\end{aligned}$$

Una función de varias variables complejas es *holomorfa* si puede expresarse localmente mediante series de potencias convergentes, o equivalentemente si satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann en cada variable por separado, ver por ejemplo [16].

Nuestra simplificación es solo considerar en $\mathbb{C}^n$ el grupo de automorfismos polinomiales

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}_{\mathrm{pol}}(\mathbb{C}^n) = \{f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \mid f \text{ es polinomial biyectiva con inversa} \\ \text{polinomial}\}.\end{aligned}$$

Aunque no conocemos la respuesta sobre el material que describe a $\mathbb{C}^n$ provisto con el grupo $\mathrm{Aut}_{\mathrm{pol}}(\mathbb{C}^n)$, podemos aproximarla como sigue:

1^{er} Ingrediente:

Un *movimiento tijera* en $\mathbb{C}^2$ es una función de la forma

$$(z_1, z_2) \mapsto (z_1, h(z_1) + z_2),$$

para $h(z_1)$ función polinomial en $\mathbb{C}$. La geometría de uno de estos movimientos es sencilla. Imaginemos $\mathbb{C}^2$ como un mazo de naipes

$$\mathbb{C}^2 = \cup_{z_1} \mathbb{C}_{(z_1)}$$

(donde cada copia $\mathbb{C}_{(z_1)}$ de $\mathbb{C}$ es un naipe vertical que pasa por $(z_1, 0)$ en $\mathbb{C}^2$). El movimiento translada cada naipe sobre si mismo por el vector $h(z_1) \in \mathbb{C}$. El Jacobiano de un movimiento de tijera es 1.

Espacio X	Grupo G	Nombre de la geometría	Material para X
$\mathbb{R}^n$	$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ biyecciones	teoría de conjuntos	arena
$\mathbb{R}^n$	$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ biyecciones continuas	topología	hule
$\mathbb{R}^n$	$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preservando distancias	geometría euclideana	madera
$\mathbb{R}^2$	$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ preservando ángulos	geometría conforme ($\subset$ variable compleja)	madera, que se expande o contrae uniformemente
$\mathbb{R}^2$	$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ C^∞, preservando áreas	geometría simpléctica	hule incompresible
$\mathbb{C}^n$	$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ biyecciones holomorfas	varias variables complejas	¿ ... ?

Tabla 1.

2^o Ingrediente:

Ampliando el concepto decimos que un *movimiento de naipes* en $\mathbb{C}^2$ es una función de la forma

$$(z_1, z_2) \mapsto (z_1, h(z_1) + g z_2) \ ,$$

para $h(z_1)$ función polinomial en $\mathbb{C}$ y una constante $g \in \mathbb{C} - \{0\}$. Geométricamente cada naipe vertical primero se translada por el vector $h(z_1)$, luego se expande o contrae y rota por el factor g. El Jacobiano de un movimiento de naipes es g.

Mezclando ambos ingredientes:

$\mathbb{C}^2$ puede descomponerse en dos mazos de cartas; verticales y horizontales. Los movimientos de tijera y de naipes pueden generalizarse en ambas direcciones. Tomemos estos movimientos como elementos de un grupo, es claro que la composición de un número finito de ellos produce grupos de automorfismos de $\mathbb{C}^2$, más precisamente sean:

$$G_1 = \{f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 | f \text{ es composición finita de movimientos de tijera}\} \ ,$$

$$G_2 = \{f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 | f \text{ es composición finita de movimientos de naipes}\} \ .$$

Las inclusiones naturales producen morfismos de grupos entre ellos y tenemos que:

$$G_1 < G_2 < \mathrm{Aut}_{\mathrm{pol}}(\mathbb{C}^2) < \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2) \ .$$

Evidentemente:

Corolario 3. *Todas las funciones en G_1 y G_2 satisfacen afirmativamente la conjetura del Jacobiano.*

Ahora podemos superficialmente proponer un material para el espacio complejo.

El material del que está hecho $\mathbb{C}^2$, provisto del grupo G_1 ó de G_2: Es el que proviene de pensar $\mathbb{C}^2$ como compuesto por los mazos de cartas horizontales y verticales con los movimientos respectivos. Es posible imaginar el cubo de Rubick como un "modelo discreto" de los dos mazos de naipes en $\mathbb{C}^2$, donde las hileras horizontales y veticales del cubo pueden girar independientemente.

Ello es una aproximación al material de que esta hecho $\mathbb{C}^2$ cuando se usan el grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$, material que no sabemos describir hoy día.

La conjetura de Jacobiano es justo la afirmación de que la condición $J(f) \neq 0$ caracteriza por si sola a las funciones en $\mathrm{Aut}_{\mathrm{pol}}(\mathbb{C}^2)$.

Es fácil ver que $J(f) \neq 0$ no caracteriza a los elementos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$. El contraejemplo es

$$f(z_1, z_2) = (e^{z_1}, z_2 e^{-z_1}) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

holomorfa, con $J(f) \equiv 1$. Sin embargo no es biyectiva pues la imagen inversa del punto $(1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ bajo f es

$$\{(2\pi k\sqrt{-1}, w_2) \in \mathbb{C}^2 \mid k \in \mathbb{Z}\} .$$

Por lo que f no pertenece al grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$, y la conjetura del Jacobiano es falsa para funciones holomorfas (no polinomiales).

Tres observaciones sobre la estructura de estos grupos son como sigue.

– Hay caracterizaciones algebraicas del grupo $\mathrm{Aut}_{\mathrm{pol}}(\mathbb{C}^2)$, ver [14] y [15, pág. 305], de hecho $G_2 \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{pol}}(\mathbb{C}^2)$, pero el análogo para $n \geq 3$ es un problema abierto [9, pág. 20].

Los movimientos de naipes pueden generalizarse a cualquier $\mathbb{C}^n$ usando funciones holomorfas h y g (que ahora serán funciones nunca nulas), a ellos les llamaremos *movimientos de naipes holomorfos.*

– El subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ generado por composiciones finitas de movimientos de naipes holomorfos (en todas las direcciones z_j en $\mathbb{C}^n$) es denso en $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$, ver [5].

– Existen elementos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ que no son composición finita de movimientos de naipes holomorfos, ver [5].

5 ¿Qué se sabe de la conjetura del Jacobiano?

Un avance importante es:

Teorema 1. A. Bialynicki–Birula, M. Rosenlich (1962). *Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ polinomial e injectiva con $J(f) \neq 0$, entonces f es sobreyectiva y f^{-1} es polinomial, i.e. la conjetura del Jacobiano se cumple para esa función.*

En consecuencia se tiene el siguiente:

Corolario 4. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) *La conjetura del Jacobiano se cumple.*

(ii) *Si* $J(f) \neq 0$ *entonces* f *es inyectivo.*

(iii) [**Propiedad de Rolle para funciones polinomiales.**] *Si* $f(a) = f(b)$ *para alguna pareja de puntos* $a, b \in \mathbb{C}^n$ *con* $a \neq b$, *entonces* $J(f) = 0$ *para algún punto* $c \in \mathbb{C}^n$.

El atractivo de (iii) es que nos muestra que esta versión del teorema de Rolle que conocemos de cálculo elemental es un problema abierto. Ahora es elemental el:

Corolario 5. *La conjetura del Jacobiano es cierta para* $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *polinomial de grado dos.*

De acuerdo al teorema basta probar que $J(f) \neq 0$ implíca inyectividad. Supongamos que $J(f) \neq 0$ y f no es inyectiva. Digamos que $f(0) = 0 = f(c)$ para el origen $0 \in \mathbb{C}^n$ y algún otro punto distinto $c \in \mathbb{C}^n$. La función f se puede escribir como $f = f_{(1)} + f_{(2)}$, separando su parte lineal $f_{(1)}$ y su parte cuadrática $f_{(2)}$. Calculando f a lo largo del rayo $\{tc\}$, para $t \in \mathbb{C}$, tenemos

$$f(tc) = t f_{(1)}(c) + t^2 f_{(2)}(c) .$$

Derivando con respecto a t se llega a

$$f_{(1)}(c) + 2t f_{(2)}(c) = \frac{d}{dt} f(tc) = Jf(tc) \cdot c \neq 0$$

para toda $t \in \mathbb{C}$. Hemos supuesto que $c \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ y que $J(f) \neq 0$, lo que da la desigualdad en la derecha. Haciendo $t = \frac{1}{2}$, tenemos de la parte izquierda que $f(c) \neq 0$, pero ello es una contradicción con el supuesto de que f es no inyectiva $f(c) = 0 = f(0)$. Así pues f es inyectiva y por el teorema anterior la conjetura del Jacobiano se cumple para f de grado dos en cualquier $\mathbb{C}^n$.

Siguiendo a H. Bass et al. [6], [10, pág. 57] puede decirse que una prueba o contraejemplo para la conjetura del Jacobiano, debe hallarse para $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ con $n \geq 2$ y f de grado mayor o igual a 3.

Habiendo considerado primero a la conjetura del Jacobiano (en $\mathbb{C}^n$), es natural plantear un:

2^o **Problema.** ¿Bajo qué condiciones el análogo de la conjetura del Jacobiano para funciones polinomiales reales $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se cumple?

Por ejemplo se sabe que si $J(f)$ es un polinomio real no nulo, la conjetura es falsa ver [9, pág. 47], debido a un contraejemplo de S. Pinchuk.

Más información de la conjetura de Jacobiano puede verse en [6, 9, 10, 13] y [15].

6 Tensando cuerdas holomorfas.

Otro punto de vista para entender los grupos $\mathrm{Aut}_{\mathrm{pol}}(\mathbb{C}^n)$ es tratar de describir con cuanta libertad pueden transformar objetos contenidos en $\mathbb{C}^n$. Sea

$$\alpha(t) = (P_1(t), P_2(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

una trayectoria polinomial. Llamamos a su imagen $\alpha(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ una *cuerda*. Su velocidad en cada punto esta dada por el vector $d\alpha/dt$, y si estos vectores son no cero para toda $t \in \mathbb{R}$ entonces la trayectoria es lisa, sin picos. Adicionalmente si α es inyectiva, la cuerda no se autointersecta. Usando que α es polinomial el comportamiento de ella es bastante aburrido en $\mathbb{R}^2$, pues separa a $\mathbb{R}^2$ en dos abiertos que son diferenciablemente como discos (de acuerdo a los resultados de la sección 2). Para $\alpha : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$, polinomial, inyectiva y con velocidad no nula, la topología de la cuerda $\alpha(\mathbb{R})$ es más divertida, se puede "anudar" en $\mathbb{R}^3$. Es natural preguntar si puede conseguirse un automorfismo polinomial $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que "desanude" la cuerda, esto es tal que

$$f(\alpha(\mathbb{R})) = \{eje\ x_1\} \subset \mathbb{R}^3 ,$$

el mismo problema hace sentido para el caso $\mathbb{R}^n$. La respuesta en el caso complejo es afirmativa.

Teorema 2. S. Abhyankar, T. Moh (1975). Tensando cuerdas holomorfas. *Sea $\alpha(z) = (P_1(z), P_2(z)) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ una función polinomial compleja, con $\frac{d\alpha}{dz} \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y α inyectiva. Entonces existe $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ polinomial con inversa polinomial, tal que*

$$f(\alpha(\mathbb{C})) = \{eje\ \ z_1\} \subset \mathbb{C}^2 .$$

La prueba original en [1] usa álgebra, una prueba usando teoría de nudos puede leerse en [19].

3^{er} **Problema.** ¿Existe tal $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ para $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$, con $n \geq 3$?

4^{o} **Problema.** ¿Existe tal $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ para $\alpha : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, con $n > m \geq 2$?

Observación, para $\alpha : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ los problemas anteriores parecen abiertos, quizá deben imponerse condiciones adicionales en α para mostrar el resultado en positivo.

7 Distintas caras para $\mathbb{C}^n$.

De lo aprendido en la sección 2 sabemos que $\mathbb{C}$ no cabe propia y holomorfamente en si mismo, esto es, no existe $f : \mathbb{C} \to A \subset \mathbb{C}$ biyección holomorfa sobre su imagen $f(\mathbb{C}) = A \neq \mathbb{C}$, tal que su inversa es holomorfa.

¿Qué pasa en dimensiones superiores? Es sorprendente el:

Teorema 3. P. Fatou (1919), L. Bieberbarch (1933). Para $n \geq 2$, el espacio $\mathbb{C}^n$ cabe propia y holomorfamente en si mismo. *Esto es, existe $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ biyección holomorfa sobre su imagen $f(\mathbb{C}^n)$ tal que su inversa $f^{-1} : f(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^n$ es holomorfa, pero $f(\mathbb{C}^n) \neq \mathbb{C}^n$.*

Un abierto $A \subset \mathbb{C}^n$ que es imagen de una función f como en el teorema se llama un *dominio de Fatou–Bieberbach.*

Esto es, un domino de Fatou–Bieberbach A es como una copia holomorfa de $\mathbb{C}^n$, pero que asume una forma distinta de $\mathbb{C}^n$ mismo. Decimos que dos dominios de Fatou–Bieberbach A y B son iguales si existe un automorfismo holomorfo $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ tal que $g(A) = B$.

5^o **problema.** Clasifica los dominios de Fatou–Bieberbach, salvo funciones en $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$.

¿Cuál es la dificultad para hallar dominios de Fatou–Bieberbach?

Hasta donde el autor conoce los ejemplos provienen de la iteración de ciertas funciones holomorfas $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, donde el dominio de Fatou–Bieberbach A aparece como la cuenca de atracción de un punto fijo $w_0 \in \mathbb{C}^n$ de f, esto es

$$A = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(z) = w_0\},$$

aquí $f^{(n)} = f \circ \cdots \circ f$ es la composición n veces de f consigo misma, y $f(w_0) = w_0$. Como primera aproximación podemos imaginar un dominio de Fatou–Bieberbach como un análogo en dimensión superior al interior de un conjunto de Julia en $\mathbb{C}$ (figuras de estos conjuntos ahora son muy populares, ver [8]). En la mayoria de los ejemplos ni siquiera aparece f explícitamente, y aún teniendola resta el problema de decidir si un punto pertenece a A. Para ejemplos de dominios de Fatou–Bieberbach ver [7, 11, 18], [20, pág. 54] y [22].

8 Cúmulos de burbujas *exóticos* en 4 dimensiones.

¿Como se generalizan los resultados de la sección 2 sobre cúmulos de burbujas C^∞ en $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 3$? Por ejemplo, una pregunta a considerar podría ser:

Problema de absorción de burbujas C^∞ para dimensión $n \geq 3$: Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, conexo, abierto y homeomorfo a una bola abierta euclideana n–dimensional, ¿existe $f : A \to \mathbb{R}^n$ biyección C^∞ con inversa C^∞?

El autor no conoce referencia a resultados en esta dirección. Sin embargo hay ciertos cúmulos de burbujas *exóticos* que han sido recientemente descubiertos.

Sea $\mathbb{R}^4_{\text{top}}$ el espacio euclideano, provisto de la topología usual. Consideremos una colección a lo más numerable de bolas abiertas euclideanas $\{B_j\} \subset \mathbb{R}^4$, recortadas en otras copias de $\mathbb{R}^4$. Provistos de dichas copias las colocamos sobre $\mathbb{R}^4_{\text{top}}$, cubriendolo con esos parches. Ello se hace mediante funciones continuas y biyectivas sobre su imagen

$$\phi_j : B_j \to \phi_j(B_j) \subset \mathbb{R}^4_{\text{top}}$$

tales que:

(i) la unión $\cup_j \phi_j(B_j)$ cubre a todo $\mathbb{R}^4_{\text{top}}$,

(ii) cada vez que dos parches $\phi_j(B_j)$ y $\phi_k(B_k)$ se intersectan en un conjunto no vacío, digamos $A_{jk} \subset \mathbb{R}^4_{\text{top}}$, la correspondiente función

$$\phi_k^{-1} \circ \phi_j : \phi_j^{-1}(A_{jk}) \subset \mathbb{R}^4 \to \phi_k^{-1}(A_{jk}) \subset \mathbb{R}^4$$

es un cambio de coordenadas C^∞ (como en la sección 1).

A una colección

$$\mathbb{R}^4_\Sigma = \{(B_j, \phi_j)\}$$

satisfaciendo (i) y (ii), le llamamos un *cúmulo de burbujas* 4–*dimensional* (el nombre técnico usual es; una estructura de variedad diferenciable en $\mathbb{R}^4$, ver [12, pág. 12]).

Otra visualización de estos cúmulos es pensarlos como espacios cociente de la unión disjunta de la burbujas

$$\frac{\coprod_j B_j}{\sim},$$

donde $p \in B_j$ esta relacionado con $q \in B_k$, esto es $p \sim q$, si y sólo si $\phi_k^{-1} \circ \phi_j(p) = q$.

Tres observaciones:

– El ejemplo trivial es $\Sigma = \text{est} \doteq \{(B_1 = \mathbb{R}^4, \phi_1 = \text{Identidad})\}$, mismo que denotamos simplemente por $\mathbb{R}^4_{\text{est}}$.
– Esta noción generaliza los cúmulos en $\mathbb{R}^2$ estudiados en la sección 2, pues en ese caso todas las funciones $\{\phi_j\}$ eran restricciones de la función identidad $\phi_j = Id_{B_j}$ en $\mathbb{R}^2$. El caso realmente interesante en dimensión 4 es cuando $\{\phi_j\}$ son distintas de la identidad.
– Todo cúmulo $\mathbb{R}^4_\Sigma$ es como espacio topológico homeomorfo a $\mathbb{R}^4_{\text{top}}$.

Dado un $\mathbb{R}^4_\Sigma$; ¿ es realmente un objeto nuevo ?

La noción de igualdad es como sigue. Dados dos cúmulos $\mathbb{R}^4_\Sigma$ y $\mathbb{R}^4_{\Sigma'}$ decimos que son *diferenciablemente iguales* si existe una función

$$f : \mathbb{R}^4_\Sigma \to \mathbb{R}^4_{\Sigma'}$$

tal que cada vez que $\phi_j^{-1} \circ f \circ \phi_s$ tenga sentido es un cambio de coordenadas C^∞ (para $\phi_j \in \Sigma$ y $\phi_s \in \Sigma'$).

No es evidente que todos los cúmulos $\mathbb{R}^4_\Sigma$ sean diferenciablemente iguales al cúmulo estándar $\mathbb{R}^4_{\text{est}}$. De hecho se pensaba que sí lo eran, hasta antes del siguiente resultado.

Teorema 4. S. K. Donaldson, M. Freedman et al. (1983). Hay espacios $\mathbb{R}^4$ exóticos. *Existen cúmulos de burbujas $\mathbb{R}^4_\Sigma = \{(B_j, \phi_j)\}$ no diferenciablemente iguales al $\mathbb{R}^4_{\text{est}}$ estándar.*

A un cúmulo $\mathbb{R}^4_\Sigma$ como en el teorema se le llama un $\mathbb{R}^4$ *exótico.*

¿Cómo distinguir un $\mathbb{R}^4$ exótico?

Veamos un método algebraico. Las funciones diferenciables en $\mathbb{R}^4_{\text{est}}$, como las aprendimos en cálculo forman un anillo (se pueden sumar y multiplicar entre ellas). Dado un $\mathbb{R}^4_\Sigma$ es natural considerar todas las funciones del tipo

$$\{g : \mathbb{R}^4_\Sigma \to \mathbb{R} \mid g \circ \phi_j \text{ es } C^\infty \text{ para toda } \phi_j \in \Sigma\}$$

como el anillo de funciones diferenciables de $\mathbb{R}^4_\Sigma$. Si $\mathbb{R}^4_\Sigma$ es exótico ello significa que su anillo de funciones diferenciables no es isomorfo al anillo de funciones diferenciables de $\mathbb{R}^4_{\text{est}}$ (que conocíamos de nuestros cursos de cálculo). Ya que si son diferenciablemente iguales la función f entre ellos permitirá constuir un isomorfismo entre sus anillos de funciones diferenciables. Sin embargo este método no es práctico, pues los anillos en cuestión son enormes.

La prueba de la existencia de $\mathbb{R}^4$ exóticos es por contradicción, usando topología y teorías de norma, ver [17, pág. 5] o [23]. Así pues el primer reto que emana es el siguiente:

6^o **Problema.** Construir explícitamente un $\mathbb{R}^4$ exótico.

De hecho el autor no conoce si algún $\mathbb{R}^4$ exótico puede pensarse como subconjunto del $\mathbb{R}^4_{\text{est}}$.

Siendo un poco más ambiciosos puede plantearse el:

7^o **Problema.** Clasifica los $\mathbb{R}^4$ exóticos.

Con la ambición están los sueños:

8^o **Problema.** ¿Cómo cambiará la física en un $\mathbb{R}^4$ exótico?

Este problema tiene bastantes vertientes por ejemplo.

En geometría diferencial: ¿existe una métrica de Einstein en algún $\mathbb{R}^4$ exótico? (en más detalle estamos preguntando por la existencia un tensor métrico que satisface las ecuaciones de la teoría de la relatividad de Einstein).

En ciencia ficción: ¿existe un experimento físico que nos permita detectar en que espacio $\mathbb{R}^4_\Sigma$ vivimos? (suponiendo que vivimos en un espacio–tiempo 4 dimensional).

Finalmente debe recalcarse que la existencia de $\mathbb{R}^n$ exóticos solo se presenta en dimensión 4, esto es no hay $\mathbb{R}^n_\Sigma$ exóticos si $n \neq 4$, ver [23] para la prueba en $\mathbb{R}^1$ y las citas para los otros casos.

Finalmente debemos recomendar al lector interesado dos listados de problemas fascinantes en las referencias [15] y [21].

Agradecimientos.

El autor agradece a Gerardo Hernández su invitación al XXXII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana (lo que dio origen a este trabajo), a Homero Díaz Marín por sus comentarios, y a Juan José Rivaud por su amable sugerencia a someter el manuscrito en Miscelánea Matemática.

Referencias

[1] S. Abhyankar, T. Moh: *Embeddings of the line in the plane.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 276 (1975) 148–166.

[2] W. Abikoff: *The uniformization theorem.* American Mathematical Monthly vol. 88, 8 (1981) 574–592.

[3] L. V. Ahlfors: *Conformal Invariants Topics in Geometric Function Theory.* McGraw–Hill (1973).

[4] L. V. Ahlfors: *Complex Analysis.* Third Edition, McGraw–Hill (1979).

[5] E. Andersen, L. Lempert: *On the group of holomorphic automophisms of* $\mathbb{C}^n$. Inventiones Mathematicae 110 (1992) 371–388.

[6] H. Bass, E. H. Connell, D. Wright: *The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse.* Bulletin of the American Mathematical Society 7, 2 (1982) 287–330.

[7] L. Bieberbach: *Beispiel zweier ganzer funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlicht volumentreue Abbildung des* $\mathbb{R}_4$ *auf einen Teil seiner selbest Vermitteln.* Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsber (1933) 476–479.

[8] P. Blanchard: *Complex analytic dynamics on the Riemann sphere.* Bulletin of the American Mathematical Society 11, 1 (1984) 85–141.

[9] A. van den Essen (ed.): *Automorphisms of Affine Spaces.* Kluwer (1995).

[10] A. van den Essen: *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture.* En: Algebre non commutative groupes quantiques et invariants, J. Alev, G. Cauchon (eds.) Societé Mathématique de France (1995) 55–81.

[11] P. Fatou: *Sur les équations fonctionelles.* Bulletin Société Math. France 47 (1919) 161–271.

[12] M. W. Hirsch: *Differential topology.* Springer Verlag (1976).

[13] O. Keller: *Ganze Cremona–transformationen.* Monatsh. Math. Phys. 47 (1939) 299-306.

[14] H. W. E. Jung: *Über ganze birationale Transformationen der Ebene.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 184 (1942) 161–174.

[15] H. Kraft: *Challenging problems on affine n–space.* Seminarie Bourbaki, Astérisque 237 (1996) 295–317.

[16] S. G. Krantz: *What is several complex variables ?* American Mathematical Monthly vol. 94, 3 (1987) 236–256.

[17] H. B. Lawson: *The Geometry of Gauge Fields in Four Dimensions.* American Mathematical Society (1985).

[18] J. P. Rosay, W. Rudin: *Holomorphic maps form $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$.* Transactions of the American Mathematical Society 310, 1 (1988) 47–86.

[19] L. Rudolph: *Embeddings of the line in the plane.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 337 (1982) 113–118.

[20] B. V. Shabat: *Introduction to Complex Analysis Part II Functions of Several Variables.* American Mathematical Society (1992).

[21] S. Smale: *Mathematical problems for the next century.* Mathematical Intelligencer no. 2, 20 (1988) 7–15.

[22] B. Stensönes: *Fatou–Bieberbach domains with C^∞–smooth boundary.* Annals of Mathematics 145 (1997), 367–377.

[23] C. H. Taubes: *Morse theory and monopoles: topology in long range forces.* En: Progress in Gauge Field Theory (Cargese 1983), NATO Advanced Study Institute Ser. B: Phys. Plenum, 115 (1984) 563–587.