Aportaciones Matemáticas
Serie Comunicaciones **22** (1998) 179–207

Geometría de superficies de Riemann y haces lineales holomorfos*

L. Brambila–Paz[1] y Jesús Muciño–Raymundo[2]

[1] Centro de Investigación en Matemáticas
Ap. Postal 402 Callejón Jalisco s/n
Valenciana
36000 Guanajuato, Gto.
México
correo electrónico: lebp@fractal.cimat.mx

[2] Instituto de Matemáticas UNAM
Unidad Morelia
Nicolás Romero 150, Col. Centro
58000, Morelia, Mich.
México
correo electrónico: muciray@servidor.unam.mx

Resumen. En superficies de Riemann se consideran: el haz tangente, el haz canónico y el haz de diferenciales cuadráticas. Se discute el concepto de clase de Chern para haces lineales, relacionandolo con la existencia de secciones holomorfas de esos haces lineales. Se interpreta la información geométrica que de las superficies proveen dichas secciones holomorfas (o meromorfas). En particular de describe el caso de funciones meromorfas, campos vectoriales holomorfos y formas diferenciales holomorfas.

1. Introducción.

Intuitivamente hablando, una *superficie de Riemann* M es una superficie real orientable con una cubierta numerable, provista de una estructura conforme. Esto significa, que para todo punto de M y toda pareja de vectores tangentes a la superficie en dicho punto, se tiene definido el ángulo que forman ambos vectores.

1991 Mathematics Subject Classification: 14H .

* Apoyado por DGAPA–UNAM

El concepto definido de esta manera resulta equivalente con el de variedad compleja de dimensión uno.

Se sabe que toda superficie real orientable con una cubierta numerable posee estructura de superficie de Riemann.

Ejemplos naturales de superficies de Riemann son:

(1) Superficies reales orientables encajadas en $\mathbb{R}^n$.
(2) Superficies reales orientables provistas de una métrica Riemanniana.
(3) Curvas complejas no singulares en el espacio $\mathbb{C}^n$ (definidas como la imagen de funciones holomorfas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}^n$).
(4) Curvas complejas algebraicas no singulares en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$ (definidas como los ceros de un número finito de polinomios).

La riqueza de las estructuras involucradas en 1–4 motiva el estudio de superficies de Riemann desde distintos puntos de vista, ver Porter y Cornalba et al.

Sin embargo podemos decir que en principio es difícil visualizar el concepto de estructura conforme. Por ejemplo sin recurrir a información extra, como ocurre en 1–4.

Nuestro interés en este trabajo es mostrar como los conceptos de:

* *haz lineal holomorfo,*

* *secciones holomorfas (o meromorfas) de un haz lineal holomorfo,*

permiten codificar la información y modelos geométricos concretos (en el sentido de geometría diferencial y geometría algebraica), de cualquier superficie de Riemann. Estableciendo relaciones entre:

$$\begin{matrix} \textit{Secciones holomorfas} & & \textit{Propiedades} \\ \textit{(o meromorfas) de haces} & \Longleftrightarrow & \textit{geométricas} \\ \textit{lineales sobre } M. & & \textit{de } M. \end{matrix}$$

Haciendo énfasis en las siguientes características:

(1) La busqueda de secciones holomorfas (o meromorfas) de un haz lineal es no trivial por la rigidez de los objetos holomorfos, ver Secciones 5 y 6.
(2) Cuando M es compacta, las secciones holomorfas son pocas, si existen siempre forman un espacio vectorial complejo de dimensión finita, ver Sección 5.
(3) Una vez que puede hallarse una sección holomorfa (o meromorfa), ella deberá aportar información sobre la geometría de la superficie M, ver Secciones 7, 9, 11 y 13.
(4) Si es posible hallar una base del espacio de secciones holomorfas, el estudio de esa base debe codificar toda la información geométrica posible, ver Secciones 10, 12, 13.

Nuestras principales herramientas para llevar a cabo lo anterior consisten de:

* La estructura multiplicativa de $\mathbb{C}$.

* El concepto de clase de Chern para un haz lineal holomorfo.

* La integración de funciones holomorfas.

* Métricas planas asociadas a funciones meromorfas.

Suponemos a lo largo del trabajo que el lector posee conocimientos básicos de análisis complejo, geometría diferencial (variedades C^∞, haz tangente ...) y geometría algebraica (espacios proyectivos y curvas).

Esperamos que este trabajo proporcione una visión panorámica al lector interesado en superficies de Riemann y lo motive para el estudio de técnicas más avanzadas.

Contenido:

2. Los conceptos de superficie de Riemann y haz lineal.

Repasamos brevemente algunas definiciones básicas.

2.1 Definición. Una *superficie de Riemann* M está formada por una colección (M_{top}, U_i, ϕ_i) tal que:

(i) M_{top} es un espacio topológico Hausdorff.

(ii) $U_i \subset M_{top}$ son conjuntos abiertos que forman una cubierta numerable.

(iii) $\phi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{C}$ son *funciones de coordenadas* continuas con inversa continua (para V_i subconjutos abiertos de $\mathbb{C}$).

(iv) Cada vez que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ las funciones de *cambio de coordenadas*

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j) ,$$

son holomorfas con inversa holomorfa.

2.2 Ejemplo.

(1) *La esfera de Riemann.* Topológicamente es como la esfera real de dimensión dos, $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, agregando al plano un punto al infinito. Colocamos en ella dos copias $\mathbb{C}_z$, $\mathbb{C}_w$, del plano complejo mediante proyección estereográfica, con z y w sus correspondientes coordenadas. Tenemos entonces dos funciones de coordenadas

$$\phi_1 : U_1 = \mathbb{C}_z \subset (\mathbb{C}P^1 - \{\infty\}) \to \mathbb{C} \quad , \quad \phi_2 : U_2 = \mathbb{C}_w \subset (\mathbb{C}P^1 - \{0\}) \to \mathbb{C} \ ,$$

donde $\phi_1(z) = z$ y $\phi_2(w) = 1/w$. En $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C} - \{0\}$ está bien definida como función de cambio de coordenadas $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : z \mapsto 1/z = w$.

(2) *Toros complejos.* Se consideran dos números cumplejos w_1, w_2 linealmente independientes sobre los reales. Se toma el grupo

$$\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \{nw_1 + mw_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \ ,$$

bajo la operación de adición. Se define una relación de equivalencia en los números complejos: dos números z_1, z_2 son equivalentes si y solo si $z_1 - z_2 = nw_1 + mw_2$, para alguna pareja de enteros n, m. Las clases de equivalencia se denotan como $[\ ]$. El espacio cociente

$$\mathbb{C}/\Lambda = \{[z]\}$$

provisto de la topología cociente es lo que se conoce como un *toro complejo*. Sea $U_i \subset \mathbb{C}/\Lambda$ un abierto homeomorfo a una bola con centro en $[z_i]$. Entonces, hay tantos representantes de él, llamémosles $z_i \in \mathbb{C}$, como elementos $(m, n) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Para $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ en el toro los cambios de coordenadas pueden escribirse como:

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : z \mapsto z + c_{ji}$$

donde c_{ji} es una constante.

(3) *Dominios.* Todo dominio U (subconjunto abierto y conexo) de $\mathbb{C}$ es superficie de Riemann. Definida por una única función de coordenadas $\phi : U \to \mathbb{C}$, enviando $z \mapsto z$.

Recordemos que toda superficie compacta orientable es homeomorfa a una esfera provista de un número finito de asas. Este número se llama el género de la superficie y clasifica topológicamente a las superficies compactas orientables.

En la Sección 11 mostraremos que toda superficie compacta orientable de género g ≥ 2 posee una estructura de superficie de Riemann.

La consecuencia más importante de esta definición es qué:

Si M es una superficie de Riemann, para toda función $f : M \to \mathbb{C}$, es posible decidir si f es meromorfa.

Note que, abusando de la notación, escribiremos $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ como codominio para las funciones meromorfas, según convenga. Más precisamente:

2.3 Definición. Una función $f: M \to \mathbb{C}$ es *meromorfa* si y solo si para cada $U_i \subset M$ la composición

$$f \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

es meromorfa en el sentido usual (ver Ahlfors pág. 128).

Para el estudio de superficies de Riemann adicionalmente será útil definir formas diferenciales, campos vectoriales etc. Para ello debemos considerar el siguiente concepto:

2.4 Definición. Un *haz lineal holomorfo*, o simplente un *haz lineal* L sobre una superficie de Riemann $M = (M_{top}, U_i, \phi_i)$ está formado por una colección $L = (L_{top}, \pi, t_{ji})$ donde:

(i) Cada vez que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, las *funciones de transcisión*

$$t_{ji}: U_i \cap U_j \to \mathbb{C} - \{0\} ,$$

son holomorfas con inversa holomorfa. Satisfaciendo además:

$$t_{ii} \equiv 1 \quad , \; en \;\; U_i$$

$$t_{ji}t_{ij} \equiv 1 \quad , \; en \;\; U_i \cap U_j \neq \emptyset$$

$$t_{ik}t_{kj}t_{ji} \equiv 1 \quad , \; en \;\; U_k \cap U_i \cap U_j \neq \emptyset .$$

(ii) L_{top} es el espacio topológico que resulta de considerar la unión disjunta de $U_i \times \mathbb{C}$ e identificar parejas; $(p, v) \in U_i \times \mathbb{C}$ con $(q, w) \in U_j \times \mathbb{C}$ si y solo si $p = q$ en M_{top} y $w = t_{ji}(p)v$.

(iii) La función de proyección $\pi : L \to M$, está dada como $\pi(p, v) = p$.

Conviene aclarar que:

L_{top} posee una estructura de variedad compleja de dimensión dos. Donde $\{U_i \times \mathbb{C}\}$ forman una cubierta de L_{top}, con funciones coordenadas:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : U_i \times \mathbb{C} \subset L_{top} & \to & \mathbb{C}^2 \\ (p, v) & \mapsto & (\phi_i(p), v) \ , \end{array}$$

y cambios de coordenadas definidos como:

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : (z, v) \mapsto (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(z), \; t_{ji}(\phi^{-1}(z))(v)) .$$

En consecuencia, la función de proyección $\pi : L \to M$ es holomorfa. La inclusión natural, $i(M) : M \to L$ definida como $i(p) = (p, 0)$, hace a $i(M)$ una subvariedad compleja de L.

La imagen inversa $\pi^{-1}(p)$, llamada *fibra* es isomorfa a $\mathbb{C}$, lo que justifica el nombre de haz lineal (también se usa haz de líneas, o de líneas complejas, si se quiere ser más preciso).

Los siguientes ejemplos de haces lineales están naturalmente definidos en toda superficie de Riemann.

Nombre del haz:	Notación:	Funciones de transición:	Interpretación de sus secciones meromorfas:
haz trivial	$\mathcal{O}_M$	$t_{ji} \equiv 1$	funciones
haz tangente	$\mathcal{T}_M$	$t_{ji} = D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})$	campos vectoriales
haz canónico	$\mathcal{K}_M$	$t_{ji} = (D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}))^{-1}$	formas diferenciales
haz de diferenciales cuadráticas	$\mathcal{K}_M^{\otimes 2}$	$t_{ji} = (D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}))^{-2}$	diferenciales cuadráticas

Donde $D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}$ es la derivada (valuada en $\phi_i(p)$ para $p \in U_i \cap U_j$). Para interpretar la cuarta columna en la tabla necesitamos la siguiente:

2.5 Definición. Una *sección holomorfa (respectivamente, meromorfa) del haz lineal* L es una colección $s = \{s_i\}$ tal que:

(1) $s_i : U_i \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son funciones holomorfas (respectivamente, meromorfas).

(2) Satisfaciendo que

$$s_j = t_{ji} s_i \ .$$

Gráficamente, una sección holomorfa asocia a cada punto p de M un elemento de $\pi^{-1}(p) \subset L$ de tal forma que puede escribirse como una función

$$s : M \to L$$

descrita localmente por funciones holomorfas s_i y donde $\pi \circ s$ es la función identidad en M.

2.6 Ejemplo. Naturalmente la *sección cero* $s_i(p) \equiv 0$ está bien definida en cualquier haz. Toda función meromorfa $f : M \to \mathbb{C}$ es una sección meromorfa del haz trivial $\mathcal{O}_M$.

2.7 Ejemplo. *Las funciones de transición para campos vectoriales y formas diferenciales.* Sean V_i, V_j dominios en $\mathbb{C}$ con coordenadas z_i, z_j respectivamente, y $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : V_i \to V_j$ una función holomorfa con inversa holomorfa entre ellos. Clásicamente un campo vectorial holomorfo en V_i se escribe como:

$$s_i(z_i) \frac{\partial}{\partial z_i} \ ,$$

con $s_i : V_i \to \mathbb{C}$ función holomorfa. Dicho campo se transforma bajo la función $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ en un campo vectorial meromorfo en V_i, mediante la regla:

$$s_j(z_j) \frac{\partial}{\partial z_j} = s_i(\phi_j \circ \phi_i^{-1}(z_i)) D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(z_i) \frac{\partial}{\partial z_i} \ ,$$

conveniendo que $z_j = \phi_j \circ \phi_i^{-1}(z_i)$. Lo que también se escribe usualmente como:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(z_i)\frac{\partial}{\partial z_i} .$$

Para formas diferenciales; sea $s_i(z_i)dz_i$ una forma diferencial holomorfa en V_i. Entonces se transforma bajo la función en una forma diferencial holomorfa en V_j, mediante la regla:

$$s_j(z_j)dz_j = s_i(\phi_j \circ \phi_i^{-1}(z_i))[D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(z_i)]^{-1}dz_i .$$

o simplemente:

$$dz_j = [D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(z_i)]^{-1}dz_i .$$

Ver Miranda págs. 105, 341, para más detalles. Note que las anteriores leyes de transformación para $\frac{\partial}{\partial z}$ y dz generalizan las que se conocen de cálculo real.

2.8 Observación. *Las secciones holomorfas de un haz lineal L, forman un espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$. Basta comprobar que la suma y multiplicación por un escalar complejo satisfacen (ii) en la definición. Al *espacio vectorial de secciones holomorfas*, lo denotamos (a la manera clásica en geometría algebraica), por

$$H^0(M, L) ,$$

y su dimensión compleja por $dim_{\mathbb{C}}H^0(M, L) = h^0(L)$.

3. Multiplicando haces lineales.

La estructura multiplicativa de $\mathbb{C}$ permite extender el concepto de multiplicación e inverso multiplicativo para haces lineales. Dados L y $\widetilde{L}$ haces lineales sobre M con funciones de transición $\{t_{ji}\}$, $\{\widetilde{t_{ji}}\}$ respectivamente y $n \in \mathbb{Z}$, tenemos las siguientes operaciones:

Operación:	Notación:	Funciones de transcisión:
producto	$L \otimes \widetilde{L}$	$t_{ji} \cdot \widetilde{t_{ji}}$
dual	L^{-1}	$(t_{ji})^{-1}$
potencia n-ésima	$L^{\otimes n}$	$(t_{ji})^n$

Como consecuencia tenemos:

3.1 Corolario. (Existencia de inverso multiplicativo.) *Para todo haz lineal L:*

$$L \otimes L^{-1} = \mathcal{O}_M .$$

□

3.2 Corolario. *Para toda superficie de Riemann M:*

$$\mathcal{T}_M \otimes \mathcal{K}_M = \mathcal{O}_M \quad , \quad \mathcal{K}_M \otimes \mathcal{K}_M = \mathcal{K}_M^{\otimes 2} \ .$$

□

3.3 Observación. *Las operaciones entre haces de línea extienden a operaciones entre sus secciones meromorfas.* En símbolos,

$$H^0(M, L) \times H^0(M, \widetilde{L}) \to H^0(M, L \otimes \widetilde{L}) \ .$$

Explícitamente, si $s = \{s_i(z_i)\}$ y $\widetilde{s} = \{\widetilde{s_i(z_i)}\}$ son secciones de L y $\widetilde{L}$ respectivamente, entonces $s \otimes \widetilde{s} = \{s_i(z_i) \cdot \widetilde{s_i(z_i)}\}$, lo es de $L \otimes \widetilde{L}$.

La anterior dualidad entre el haz tangente y el canónico permite identificar sus secciones meromorfas mediante la correspondencia:

$$s_i(z_i)\frac{\partial}{\partial z_i} \leftrightarrow \frac{dz_i}{s_i(z_i)} \ ,$$

En palabras; $\{s_i(z_i)\}$ definen una sección meromorfa del haz tangente si y solo si $\{1/s_i(z_i)\}$ definen una del haz canónico.

Dado un haz lineal L, es natural preguntar si sus potencias $L^{\otimes n}$ dan origen a nuevos haces, desarrollaremos para ello lo siguiente.

4. La clase de Chern; una forma de medir el torcimiento de un haz.

Consideremos el siguiente ejemplo intuitivo.

4.1 Ejemplo. *El torcimiento de un haz, en el caso real.* Definamos sobre el círculo S^1 dos haces cuya fibras sean copias de $\mathbf{R}$:

(1) El cilindro $L_1 = S^1 \times \mathbb{R}$.
(2) La banda de Moebius L_2.

Es un ejercicio describirlos como haces lineales reales, mediante funciones de transición adecuadas, que sean C^∞ en S^1, y real valuadas nunca nulas. Las secciones $s : S^1 \to L_i$, son funciones continuas tales que $\pi \circ s$ es la identidad en S^1.

Definimos el número de torcimiento de un haz lineal real como el mínimo número de ceros que puede tener una sección.

En el caso del cilindro posee secciones sin ceros, su número torcimiento es cero. Decimos que el haz L_1 no está torcido. Mientras que en el caso de la banda de Moebius toda sección posee ceros. El mínimo número de ceros posibles es uno. Decimos que el haz L_2 está torcido.

Es posible mostrar que en efecto todo haz sobre el círculo con fibras como $\mathbb{R}$ es homeomorfo a alguno de los dos anteriores. Dicho de manera vaga; solo existen dos posibles formas de torcimiento para esta clase de haces. Mostraremos al final de la Sección, que para haces lineales holomorfos en superficies de Riemann hay tantas posibles formas de torcimiento como números en $\mathbb{Z}$.

Esto motiva a introducir la siguiente herramienta:

4.2 Definición. Sea $\pi: L \to M$ una haz lineal holomorfo sobre una superficie de Riemann compacta M, y $s : M \to L$ cualquier sección meromorfa no idénticamente nula, entonces *la clase de Chern del haz* $c_1(L)$ es:

$$c_1(L) = \{ceros\ de\ s\} + \{polos\ de\ s\} \in \mathbb{Z} ,$$

contando ambos números (de ceros y polos) con multiplicidad y donde por definición las multiplicidades de los polos son números negativos.

Lineas abajo indicamos que no depende de la elección de la seccción y que todo haz posee una sección.

Ver Griffiths et al. pág. 139 para la interpretación cohomológica de la clase de Chern.

4.3 Observación. *$c_1(L)$ es finito gracias a la compacidad de M.* Observe que los ceros y polos de una sección están aislados en M, por estar descritas las secciones localmente por funciones meromorfas.

4.4 Ejemplo.

$$c_1(\mathcal{O}_M) = 0 .$$

Si $f : M \to \mathbb{C}P^1$ es una función meromorfa (dando origen a una sección de $\mathcal{O}_M$) es un resultado clásico qué el número de sus ceros es igual al número de sus polos. Hay distintas pruebas, por ejemplo. Defina la forma diferencial meromorfa df/f en M. Un resultado clásico es que la integral $\int(df/f)$ en la frontera de una región mide el número de ceros y polos de f contenidos en la región, ver Ahlfors pág. 152. Calculando la integral $\int(f/df)$, sobre todo M, mediante una triangulación adecuada de M, ella debe medir el número de ceros y polos de f. Sin embargo la integral se anula, pues se descompone como la integral sobre las aristas de la triangulación, que se cancelan unas con otras al aparecer por pares con sentidos opuestos. □

4.5 Observación. *El resultado $c_1(L)$ no depende de la elección de la sección meromorfa del haz.* Dadas dos secciones meromorfas s_1, s_2 de L entonces $s_1 \otimes (s_2)^{-1} \doteq s_1/s_2$ es una sección de $L \otimes L^{-1} = \mathcal{O}_M$. Contamos el número de ceros y polos de s_1/s_2, recordando que una función meromorfa posee el mismo número de polos y de ceros:

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{O}_M) &= \{ceros\ de\ (s_1/s_2)\} + \{polos\ de\ (s_1/s_2)\} \\ &= \{ceros\ de\ (s_1)\} - \{polos\ de\ (s_2)\} + \{polos\ de\ (s_1)\} - \{ceros\ de\ (s_2)\} = 0 , \end{aligned}$$

por lo que

$$\{ceros\ de\ (s_1)\} + \{polos\ de\ (s_1)\} = \{ceros\ de\ (s_2)\} + \{polos\ de\ (s_2)\}\ .$$

□

Es inmediato, mediante el mismo argumento mostrar el:

4.6 Corolario. *Para L, $\widetilde{L}$ haces lineales, tenemos que:*

$$c_1(L \otimes \widetilde{L}) = c_1(L) + c_1(\widetilde{L})\ ,$$

$$c_1(L^{-1}) = -c_1(L)\ .$$

□

Será, útil el siguiente:

4.7 Corolario. *Si $c_1(L) < 0$, entonces L no posee secciones holomorfas (distintas de la sección cero).* □

Es inmediato también notar que

$$c_1(\mathcal{T}_M) = -c_1(\mathcal{K}_M)\ ,$$

de donde se tiene la siguiente simetría:

4.8 Corolario. (1) *Si $\mathcal{T}_M$ posee secciones holomorfas (distintas de la sección cero), se tiene que $c_1(\mathcal{T}_M) \geqslant 0$. Entonces $c_1(\mathcal{K}_M) < 0$, y $\mathcal{K}_M$ no posee secciones holomorfas (distintas de la sección cero).*

(2) *Si $\mathcal{K}_M$ posee secciones holomorfas (distintas de la sección cero), se tiene que $c_1(\mathcal{K}_M) \geqslant 0$. Entonces $c_1(\mathcal{T}_M) < 0$, y $\mathcal{T}_M$ no posee secciones holomorfas (distintas de la sección cero).* □

Como aplicación elemental tenemos:

4.9 Lema. *En toda superficie de Riemann compacta M, para cualquier número dado n en $\mathbb{Z}$, existe un haz lineal holomorfo L, con $c_1(L) = n$.*

Demostración: Como primer caso consideremos M como la esfera de Riemann $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, provista de dos funciones de coordenadas

$$\phi_1 : U_1 = \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}\quad , \quad \phi_2 : U_2 = \mathbb{C}_w \to \mathbb{C}\ ,$$

donde $\phi_1(z) = z$ y $\phi_2(w) = 1/w$.
En $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C} - \{0\}$ definimos como función de transición $t_{21}(z) = z^{-n}$. Sea L_n el haz lineal sobre $\mathbb{C}P^1$ asociado a ella.

Las funciones dadas por

$$s_1(z) = 1 : U_1 \to \mathbb{C} \quad , \quad s_2(w) = w^n : U_2 \to \mathbb{C} \ ,$$

definen una sección meromorfa s de L_n. En efecto $s_j = t_{ji}s_i$, se traduce en:

$$s_2 = w^n = z^{-n} \cdot 1 = t_{21}s_1 \ ,$$

ya que $w = \frac{1}{z}$. La sección s solo posee un polo o un cero de multiplicidad exactamente n en $w = 0$ que corresponde al punto al infinto en $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Con lo que $c_1(L_n) = n$.

En el caso general basta notar dos cosas. El cálculo anterior puede realizarse en un disco $\{|z| > c\} \cup \{\infty\}$ en la esfera de Riemann. Obteniendo un haz lineal sobre dicho disco con una función de transcisión y una sección que tiene un polo o cero de multiplicidad n. Introducimos en cualquier superficie de Riemann el disco anterior, con su haz lineal como antes. Para extenderlo a toda M, definimos las restantes funciones de transición t_{ij} como idénticamente 1. Dejemos como ejercicio al lector interesado comprobar los detalles. □

5. Flexibilidad C^∞ vs. rigidez holomorfa.

Sea M una superficie de Riemann compacta y $\mathcal{O}_M$, $\mathcal{T}_M$, $\mathcal{K}_M$, su haz trivial, su haz tangente, su haz canónico, respectivamente.

Deseamos hacer notar que en cualquiera de estos casos:

* Siempre existen secciones C^∞.

* De hecho forman un espacio vectorial de dimensión infinita.

Esto es lo que entendemos por flexibilidad C^∞.

Note que por dimensión infinita, entendemos que contiene subespacios vectoriales de dimensión arbitrariamente grande.

Como veremos más adelante las dos afirmaciones anteriores pueden ser falsas, si consideramos secciones holomorfas.

Esto es lo que entendermos por rigidez holomorfa.

Para el caso $\mathcal{O}_M$ tenemos:

5.1 Observación. Toda superficie de Riemann M posee funciones C^∞ complejo valuadas. El espacio vectorial de dichas funciones es de dimensión infinita.

Demostración: Utilizamos el concepto de partición de la unidad. Dada una cubierta abierta finita $\{U_i\}$ de M, como en la definición de superficie de Riemann. Una partición de la unidad es una colección de funciones C^∞, del tipo $\{\lambda_i : U_i \to \mathbb{R}\}$ tal que:

(1) λ_i es idénticamente cero cerca de la frontera de U_i.

(2) Para todo $p \in M$, se tiene que $\sum_i \lambda_i(p) = 1$.

Estos objetos siempre existen, pero su construcción es laboriosa, ver Spivak vol. I. pág. 70. Considerando, $h_i : U_i \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas arbitarias, la función suma

$$\sum_i \lambda_i h_i : M \to \mathbb{C} ,$$

está bien definida, es C^∞ y pueden elegirse las funciones h_i para que no sea idénticamente nula. Lo que muestra la existencia de secciones C^∞ de $\mathcal{O}_M$.

Para mostrar la segunda parte de la afirmación, fijamos un elemento de la cubierta digamos U_0. Existe una colección $\{h_j : U_0 \to \mathbb{C} \mid j = 1, 2...\}$ de funciones holomorfas que son $\mathbb{C}$–linealmente independientes para toda subcolección finita $j \in 1, ..., m$. Entonces la colección de funciones

$$\{(\sum_i \lambda_i + \lambda_0 h_j) : M \to \mathbb{C}\}$$

provee $\mathbb{C}$–espacios vectoriales de dimensión m, en el espacio de funciones C^∞ de M a $\mathbb{C}$. □

El caso de campos vectoriales y formas diferenciales (secciones de $\mathcal{T}_M$ y $\mathcal{K}_M$) es similar. Simplemente usando que la suma de secciones de un haz multiplicadas por las particiones de la unidad λ_i, vuelve a ser una sección. En efecto mediante el mismo argumento se prueba el:

5.2 Corolario. *Todo haz lineal posee secciones C^∞. El $\mathbb{C}$–espacio vectorial de dichas secciones es de dimensión infinita.* □

En contraste:

5.3 Teorema. *Para todo haz lineal holomorfo L, sobre una superficie de Riemann compacta M se tiene que*

$$0 \leq dim_{\mathbb{C}} H^0(M, L) < \infty ,$$

esto es, el espacio vectorial de sus secciones holomorfas es de dimensión finita.

Demostración: Hay muchas pruebas, accesibles según los conocimientos del lector, por ejemplo. Sea $\{U_i \times \mathbb{C}\}$ una cubierta abierta finita de L, como en la definición. Sea $\{\lambda_i\}$ partición de la unidad como antes. Tomando h_i la forma hermitiana usual en cada fibra de $U_i \times \mathbb{C}$, entonces $\lambda_i(z) h_i$ es una colección de formas hermitianas en $U_i \times \mathbb{C}$. La suma $\sum_i \lambda h_i$ define una forma hermitiana en cada fibra de L. De hecho puede suponerse que es positiva definida en cada fibra. Lo que se conoce como una mérica hermitiana en L.

Definimos un producto punto entre secciones holomorfas de L usando

$$(s_1, s_2) = \int_M [\sum_i \lambda_i h_i(s_1, s_2)] dM \ ,$$

para dM una forma de área real en M. Esto hace al espacio de secciones holomorfas un espacio de Hilbert.

Consideremos la bola unitaria de este espacio de Hilbert. Usando la compacidad de M y el Teorema de Montel, es posible mostrar que toda sucesión de secciones en la bola unitaria, tiene una subsucesión convergente. Ello implíca que dicha bola unitaria es compacta, en consecuencia el espacio de Hilbert es de dimensión finita.

Para referencias a otras pruebas, ver Le Potier pág. 25 ó Narasimhan. □

6. ¿ Por qué es difícil hallar secciones meromorfas en un haz lineal ?

Dado un haz lineal L sobre M el problema de hallar una sección meromorfa es elegir en cada abierto $U_i \subset M$ funciones meromorfas $s_i : U_i \to \mathbb{C}P^1$ tales que satisfagan:

$$s_j = t_{ji} s_i \ .$$

Esto es, hay que resolver estas ecuaciones acopladas entre funciones meromorfas, donde los datos son $\{t_{ji}\}$ y las incógnitas las funciones $\{s_i\}$.

Un resultado general afirma que:

6.1 Teorema. *Todo haz lineal posee secciones meromorfas.* □

Ver Gunning pág. 57.

Mostramos algunos casos donde es posible resolver fácilmente el problema:

6.2 Ejemplo. *Secciones meromorfas de haces lienales sobre la esfera de Riemann.* Cubriendo la esfera con dos funciones de coordenadas como es usual, sea

$$t_{21} : U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}P^1 - \{0, \infty\} \to \mathbb{C} - \{0\}$$

función de transición de un haz lineal L. Curiosamente: si t_{21} es polinomial, toda función racional $s_1(z) = P(z)/Q(z) : U_1 = \mathbb{C}_z \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde P y Q son polinomios, extiende a U_2 de manera única como una sección meromorfa de L.

En efecto, basta observar que la sección s_2 en U_2 se escribe como

$$\frac{P(1/z)}{Q(1/z)} \, t_{21}(1/z) : U_2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \ .$$

Qué resulta ser una función racional, por lo que extiende con un cero o un polo en $\infty \in \mathbb{C}P^1$.

6.3 Ejemplo. *Secciones meromorfas de $\mathcal{O}_M$, $\mathcal{T}_M$, $\mathcal{K}_M$ sobre un toro.* Recordemos que para un toro las funciones de cambio de coordenadas son de la forma $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : z \mapsto z + c_{ji}$, de donde $D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) \equiv 1$. Lo que implica que $\mathcal{O}_M$, $\mathcal{T}_M$ y $\mathcal{K}_M$ tienen funciones de transcisión $t_{ji} \equiv 1$.

En consecuencia, las secciones meromorfas de $\mathcal{O}_M$, $\mathcal{T}_M$ y $\mathcal{K}_M$ sobre un toro $M = \mathbb{C}/\Lambda$ están en correspondencia uno a uno con las funciones meromorfas $s : M \to \mathbb{C}P^1$.

Adicionalmente, las funciones meromorfas sobre $M = \mathbb{C}/\Lambda$ están es correspondencia uno a uno con las funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ que son doblemente periódicas con respecto a Λ, esto es funciones $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^1$ tales que:

$$h(z) = h(z + nw_1 + mw_2) \ ,$$

para todo $(n, m) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Estas son conocidas clásicamente como *funciones elípticas*, ver Ahlfors pág. 263.

7. Interpretación geométrica de la existencia funciones meromorfas.

7.1 Observación. *En una superficie de Riemann compacta toda función holomorfa es constante.* En efecto, basta observar que toda función holomorfa no constante f es tal que admite un punto donde $|f|$ es máximo. Pero ello implícaria que dicho máximo se alcanza en un punto interior de M lo que es imposible (pues la norma $|f \circ \phi_i^{-1}|$ tendría un máximo).

Por lo que centraremos nuestra atención en funciones meromorfas, afortunadamente:

7.2 Teorema. *Toda superficie de Riemann posee funciones meromorfas no constantes.* □

Ver Farkas et al. pág. 52.

Primera interpretación: *Una función meromorfa $f : M \to \mathbb{C}P^1$ produce una cubierta ramificada entre M y la esfera de Riemann $\mathbb{C}P^1$.*

Por *cubierta ramificada entre superficies* entendemos una función entre superficies que en todo punto puede escribirse (probablemente salvo cambio de coordenadas) de la forma

$$z \mapsto z^n \ ,$$

donde n es un entero positivo.

Lo anterior no tiene nada de particular pues:

7.3 Observación. *Toda función holomorfa es localmente como z^n.* Más precisamente, dada una función holomorfa $f : U \to V$, entre U y V dos dominios de $\mathbb{C}$. Para cada $z_0 \in U$ existen dos funciones de cambio de coordenadas

$$h_1 : U \to \widetilde{U} \quad , \quad h_2 : V \to \widetilde{V}$$

(esto es holomorfas con inversa holomorfa), tales que

$$h_2^{-1} \circ f \circ h_1(z) = z^n.$$

Dejamos mostrar la existencia de h_1 y h_2 como ejercicio al lector interesado. Basta expresar h_1, h_2 como series de potencias, substituyendo en la ecuación $h_2^{-1} \circ f \circ h_1$, calculando los coeficientes de las series de h_1 y h_2 en términos de los de f. Y finalmente probar la convergencia.

7.4 Ejemplo. La función $z^n\colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ como cubierta ramificada. Convenimos que $\infty \mapsto \infty$ bajo z^n. Entonces esta función es tal que cada punto en $\mathbb{C}P^1$ tiene exactamente n preimagenes, con la exepción de cero e infinito, que son los puntos de ramificación.

Segunda interpretación: *Una n-ada de funciones meromorfas $f_1, ..., f_n : M \to \mathbb{C}P^1$, hace a M una curva en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$.*

Consideremos M cualquier superficie de Riemann compacta, seleccionemos una pareja de funciones meromorfas

$$f_1, f_2 : M \to \mathbb{C}P^1 .$$

Entonces podemos producir una función de M en el espacio proyectivo $\mathbb{C}P^2$ como:

$$\begin{aligned} i : M &\to \quad \mathbb{C}P^2 \\ z &\mapsto [f_1(z), f_2(z), 1] \end{aligned}$$

donde el corchete [ ] nos indica las clases de equivalencia en $\mathbb{C}P^2$. Mismo que por definición es $\mathbb{C}^3 - \{0\}$ módulo la relación de equivalencia, que identifica dos puntos si y solo uno es múltiplo complejo del otro. Para mostrar que la función i está bien definida en los polos de f_1 y f_2 simplemente basta considerar las expresiones alternas:

$$z \mapsto [1, \frac{f_2(z)}{f_1(z)}, \frac{1}{f_1(z)}] \quad , \quad z \mapsto [\frac{f_1(z)}{f_2(z)}, 1, \frac{1}{f_2(z)}] .$$

Dicha función i es una *inmersión holomorfa* (la imagen de M puede ser una curva singular e incluso tener auto intersecciones).

Inversamente si consideramos $i(M) \subset \mathbb{C}P^2$ como una curva en el plano proyectivo entonces es fácil ver que la proyecciones $p_i : \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^1$ definidas como $p_i([z_1, z_2, z_3]) = (z_i/z_3)$, para $i = 1,\ 2$ son tal que al restringirlas a $i(M) \subset \mathbb{C}P^2$ determinan dos funciones meromorfas $p_i : M \to \mathbb{C}P^1$. En conclusión se ha mostrado la:

7.5 Proposición. *Existe una correspondencia uno a uno entre:*

(1) *Colecciones $\{f_1, ..., f_n\}$ de n funciones meromorfas en M.*

(2) *Inmersiones holomorfas $i : M \to \mathbb{C}P^n$, de M en el espacio proyectivo $\mathbb{C}P^n$.*

□

De hecho M es compacta si y solo si es posible describir a $i(M)$ como los ceros de un número finito de polinomios homogéneos en $\mathbb{C}P^n$ (esto es por definición que $i(M)$ sea una *curva algebraica*). Este resultado se conoce como el Teorema de Chow, ver Griffiths et al. pág. 167.

Informalmente hablando, tenemos que si $i(M) \subset \mathbb{C}P^n$ es una curva algebraica entonces la geometría proyectiva de tal inmersión puede hacerse al estudiar los conjuntos $\{f_1(z), ..., f_n(z)\}$.

7.6 Ejemplo. Es un hecho elemental de variable compleja que en cualquier toro $\mathbb{C}/\Lambda$ está bien definida la función elíptica de Weierstrass

$$\wp(z) : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}P^1$$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \neq 0} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) ,$$

donde la suma es sobre todo número $w \in \Lambda \subset \mathbb{C}$ distinto de cero. Ver Alfhors pág. 272. Si se considera la pareja de funciones $\{\wp(z), \wp'(z)\}$, donde la prima significa la derivada, entonces la inmersión asociada

$$\begin{aligned} i : \mathbb{C}/\Lambda \to &\quad \mathbb{C}P^2 \\ z \quad \mapsto &\ [\wp(z), \wp'(z), 1] , \end{aligned}$$

es tal que su imagen puede leerse como una curva algebraica en $\mathbb{C}P^2$. Esto es, como los ceros de la ecuación polinomial de tercer grado:

$$(\wp')^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3) ,$$

en $\mathbb{C}^2 = \{[z_1, z_2, 1]\} \subset \mathbb{C}P^2$, donde e_i son números complejos que dependen de Λ, ver Ahlfors pág. 277.

8. Funciones meromorfas y métricas planas.

Nuestro objetivo es mostar que cada dominio $U \subset \mathbb{C}$ provisto de una función meromorfa $s(z) = u + \sqrt{-1}v : U \to \mathbb{C}P^1$ no idénticamente cero, tiene de manera natural *coordenadas canónicas planas*. Esto significa que en U menos los polos y ceros de $s(z)$, hay funciones de coordenadas $\phi_i : U_i \subset U \to V_i \subset \mathbb{C}$, tal que sus cambios de coordenadas $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ son translaciones euclideanas en $\mathbb{C}$.

Para $z_0 \in U$ con $s(z_0) \neq 0, \infty$ y U_i un disco en U de centro en z_0 que no contiene polos o ceros de s: definimos las funciones de coordenadas locales en U mediante

$$\phi_i : U_i \to \mathbb{C}$$

$$\phi_i(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{s(z)} \in \mathbb{C} ,$$

usando trayectorias en U_i para calcular la integral. En una vecindad U_i la función ϕ_i es un homeomorfismo (como consecuencia del Teorema de la función inversa y que $D\phi_i(z_0) = s(z_0) \neq 0, \infty$). Calculemos las funciones de cambio de coordenadas $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ en $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. La idea es como sigue, consideremos los campos vectoriales reales en $U - \{polos\ de\ s\}$

$$Re(X) \doteq u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad Im(X) \doteq -v\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial y} .$$

Entonces ϕ_i envia:

* trayectorias reales de $Re(X)$ en líneas horizontales de $\mathbb{C}$,

* trayectorias reales de $Im(X)$ en líneas verticales de $\mathbb{C}$.

Para ello basta calcular la integral $\int[dz/s(z)]$ a lo largo de trayectorias reales cuya velocidad es $Re(X)$, mostrando que el resultado son números reales. Análogamente para $Im(X)$ el resultado de la integral son números imaginarios puros.

En consecuencia

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : z \mapsto z + c_{ji} ,$$

donde de hecho la constante puede evaluarse como $c_{ji} = \int_{z_i}^{z_j} [dz/s(z)]$, para z_i, z_j los centros de U_i, U_j respectivamente.

La métrica de Riemann

$$g_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2+v^2} \end{pmatrix} ,$$

hace que $Re(X)$ y $Im(X)$ sean un marco ortonormal, esto es:

$$g_s(Re(X), Re(X)) = 1 = g_s(Im(X), Im(X)) \quad , \quad g_s(Re(X), Im(X)) = 0 .$$

Adicionalmente, se tiene que los flujos reales de esos campos conmutan

$$[Re(X), Im(X)] = [u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \ , \ -v\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial y}] \equiv 0 ,$$

y la curvatura de la métrica de Riemann g_s es cero, en otras palabras g_s es localmente euclideana, ver Spivak vol. II pág. 261. Otra prueba de ello es mostrando que cada función

$$\phi_i(z) : U_i \subset (U - \{ceros\ y\ polos\ de\ s\}, g_s) \to (\mathbb{C}, \delta)$$

es una isometría local, donde δ es la métrica euclideana usual en $\mathbb{C}$.

Resumiendo tenemos:

8.1 Proposición. *Sea $s : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^1$, una función meromorfa,*

$$X(z) = s(z)\frac{\partial}{\partial z}$$

el campo vectorial meromorfo asociado, y

$$\omega(z) = \frac{dz}{s(z)}$$

la forma diferencial meromorfa asociada. Entonces, el campo meromorfo se descompone en un par de campos vectoriales reales C^∞ en $U - \{polos\ de\ s\}$

$$Re(X) = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad Im(X) = -v\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial y} \ ,$$

tales que la métrica de Riemann plana en $U - \{polos\ y\ ceros\ de\ s\}$:

$$g_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2+v^2} \end{pmatrix} \ ,$$

hace geodésicas a las trayectorias reales de $Re(X)$ e $Im(X)$. Las isometrías locales entre (U, g_s) y $\mathbb{C}$ provisto de la métrica euclideana usual, están dadas por $\phi_i(z) = \int_{z_0}^{z} \omega$. □

8.2 Ejemplo. Sea $c = a + \sqrt{-1}b \in \mathbb{C}^*$, y $X(z) = c\frac{\partial}{\partial z}$ el campo vectorial meromorfo en $U = \mathbb{C}$. El espacio $(\mathbb{C}, g_s)$ es isométrico con el plano eulcideano $\mathbb{R}^2$. La isometría es:

$$x + \sqrt{-1}y \mapsto \frac{1}{|c|}(x, y) \ .$$

El campo vectorial real asociado es:

$$Re(c\frac{\partial}{\partial z}) = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} \ ,$$

teniendo como trayectorias líneas rectas de pendiente $arg(c)$.

8.3 Ejemplo. Para $s(z) = z$, sea $\omega = dz/z$ la forma diferencial meromorfa en $U = \mathbb{C}$. El espacio $(\mathbb{C} - \{0\}, g_s)$ es isométrico al cilindro $S^1_{2\pi} \times \mathbb{R}$, donde 2π es la longitud de las geodésicas cerradas (el perímetro del cilindro). El campo vectorial real asociado es:

$$Re(z\frac{\partial}{\partial z}) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \ ,$$

teniendo como trayectorias rayos de rectas por 0 en $\mathbb{C}$. El otro campo asociado es:

$$Im(z\frac{\partial}{\partial z}) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \ ,$$

teniendo como trayectorias círculos con centro en 0, mismas que corresponden a las geodésicas cerradas en el cilindro $S^1_{2\pi} \times \mathbb{R}$.

8.4 Ejemplo. Para $s(z) = 1/z$, con $\omega(z) = dz$ en $U = \mathbb{C}$. El espacio métrico $(\mathbb{C} - \{0\}, g_s)$ es isométrico al obtenido de pegar cuatro copias de: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$. El pegado es entre las fronteras y usa isometrías para formar una superficie topológicamente como un disco (la parte positiva del eje x en una copia se pega con la parte negativa del eje x en otra, y así sucesivamente). El campo vectorial real asociado es:

$$Re(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}) = \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}$$

teniendo como trayectorias hipérbolas, cuyas asíntotas coinciden con los ejes coordenados en $\mathbb{C}$.

9. Interpretación geométrica de la existencia de campos vectoriales holomorfos.

Consideremos $s = \{s_i(z_i)\frac{\partial}{\partial z_i}\}$ un campo vectorial holomorfo en una superficie de Riemann M.

En $U_i \subset M$ el campo vectorial da origen a una ecuación diferencial ordinaria asociada

$$\frac{d\psi}{dt} = s_i(\psi(t)) \ ,$$

donde $s_i(z) : U_i \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa y $\psi(t) : W \subset \mathbb{C} \to U_i$ es también una función holomorfa, llamada la solución de s.

Primera interpretación: *Cada campo vectorial holomorfo s en M, produce en $M - \{$ceros de $s\}$ coordenadas canónicas planas.*

Basta considerar $\phi_i = \int[dz_i/s_i(z_i)]$, como en la Sección 8.

La primera aplicación es:

9.1 Teorema. (Existencia y unicidad de soluciones para campos vectoriales holomorfos). *Dado $z_0 \in U_i \subset M$ un punto fijo (la condición inicial), existe una única función holomorfa $\psi(t) : W \to M$, para W una vecindad abierta de 0 en $\mathbb{C}$, que es solución de la ecuación diferencial asociada y satisface $\psi(0) = z_0$.*

Demostración: Sea $z_0 \in M$. Si z_0 es un cero del campo $s(z_0) = 0$ y trivialmente $\psi : \mathbb{C} \to M$ como $\psi(t) \equiv z_0$ es solución.

Si z_0 no es un cero del campo, suponemos sin perdida de generalidad que z_0 es el origen en $\{z_i\}$ las coordenas locales de U_i, escribiendo el campo como: $s_i(z_i)\frac{\partial}{\partial z_i}$, con $s_i(z_i)$ holomorfa y no nula.

La función $\phi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{C}$ dada por:

$$\phi_i(z_i) = \int_0^{z_i} \frac{dz_i}{s_i(z_i)}$$

es un cambio de coordenadas local pues su derivada en $z_i = 0$, es $1/s_i(z_i) \in \mathbb{C} - \{0\}$.
El campo se transforma entonces bajo ϕ_i, en un campo vectorial holomorfo en V_i:

$$s_i(z_i)\frac{\partial}{\partial z_i} = s_i(z_i)D(\phi_i(z_i))|_{z_i=0}\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{\partial}{\partial w} \ ,$$

donde w son coordendas en V_i. La solución de la ecuación diferencial $\frac{d\psi}{dt} = 1$, asociada a $\frac{\partial}{\partial w}$, en V_i con condición inicial $\phi_i(0)$ es $\varphi(t) = t + \phi_i(0)$. En consecuencia:

$$\psi(t) = \phi_i^{-1} \circ \varphi(t) : W \to M$$

es la solución de la ecuación diferencial asociada a $s_i(z_i)\frac{\partial}{\partial z_i}$. □

9.2 Ejemplo. Consideremos en $M = \mathbb{C}$ los campos vectoriales holomorfos:

$$s(z) = z\frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad s(z) = z^2\frac{\partial}{\partial z} \, .$$

Al escribir sus ecuaciones diferenciales asociadas tenemos

$$\frac{d\psi}{dt} = \psi(t) \quad , \quad \frac{d\psi}{dt} = (\psi(t))^2 \, ,$$

cuyas soluciones son:

$$\psi(t) = z_0 e^t \quad , \quad \psi(t) = \frac{z_0}{1 - z_0 t} \, ,$$

para z_0 punto arbitrario en $\mathbb{C}$. Es interesante observar que en el primer caso las soluciones están definidas para toda condición incial z_0 y todo tiempo complejo t. Mientras que en el segundo caso hay valores del tiempo complejo ($t = 1/z_0$), para los que la solución no está bien definida en $M = \mathbb{C}$.

9.3 Definición. Un campo vectorial holomorfo $s : M \to \mathcal{T}_M$ en una superficie de Riemann M es *completo* si su solución (para toda condición inicial $z_0 \in M$), está bien definida para todo tiempo complejo $t \in W = \mathbb{C}$.

9.4 Lema. *En una superficie de Riemann compacta todo campo holomorfo es completo.*

Demostración: En efecto, para cada $z_0 \in M$, la solución existe para $W \subset \mathbb{C}$ una vecindad de cero. La imagenes de soluciones $\psi(W) \subset M$ donde $\psi(0) = p$ forman una cubierta de M. Usando la compacidad de M es posible considerar una cubierta finita de esas soluciones Dada una solución $\psi : W \to M$ para W una vecindad de cero en $\mathbb{C}$, es posible pegar soluciones en la cubierta finita antes mencionada, para poder extenderla a $W = \mathbb{C}$. □

9.5 Ejemplo. *Una superficie de Riemann sin campos completos.* Sea Δ el disco unitario en $\mathbb{C}$. Toda función holomorfa $s : \Delta \to \mathbb{C}$ define un campo vectorial holomorfo $s(z)\frac{\partial}{\partial z}$. Sin embargo si este campo no es idénticamente nulo, entonces es necesariamente no completo. Pero ello da una contradicción. Supongamos que es completo. Para $z_0 \in \Delta$ un punto donde no se anule el campo, consideramos la solución $\psi(t) : \mathbb{C} \to \Delta$, pero esto proporcionaria una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ no constante y acotada, lo que es una contradicción, con el Teorema de Liouville.

Segunda interpretación: *A cada campo holomorfo completo en M le corresponde una familia de automorfismos holomorfos de M.*

Más precisamente, para un campo holomorfo completo s existe una $\mathbb{C}$–acción holomorfa en M, llamada el flujo complejo de s, definida como:

$$\Psi : \mathbb{C} \times M \to M$$

$$(t, z_0) \mapsto \psi(t)$$

donde $\psi(t) : \mathbb{C} \to M$ es la solución de la ecuación diferencial asociada tal que $\psi(0) = z_0$.

Al dejar fijo el tiempo t_0 en Ψ se tienen funciones $\Psi(t_0, \ ) : M \to M$ que son *automorfismos holomorfos de M*, esto es funciones holomorfas con inversa holomorfa. Además satisface las condiciones de compatibilidad, para todo par de tiempos $t_1,\ t_2$;

$$\Psi(t_1, \ ) \circ \Psi(t_2, \ ) = \Psi(t_1 + t_2, \ ) : M \to M \ ,$$

por lo que dichas transformaciones forman un grupo bajo la composición isomorfo al grupo aditivo $(\mathbb{C}, +)$.

Inversamente dada $\Psi : \mathbb{C} \times M \to M$ una función holomorfa satisfaciendo las anteriores condiciones de compatibilidad. Ella determina un campo vectorial holomorfo completo $s(z)\frac{\partial}{\partial z}$ en M, mediante

$$s(z)\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}|_{(t=0,z)}\right)\frac{\partial}{\partial z} \ .$$

9.6 Ejemplo. *Campos vectoriales en la esfera de Riemann y en toros.*

Sea $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la esfera de Riemann, en la coordenada afín $\mathbb{C}_z$ podemos escribir el campo holomorfo $s(z) = z\frac{\partial}{\partial z}$. Mediante un cálculo explícito de como se ve este campo en el punto al infinito (usando la transformación de cambio de coordenadas $z \mapsto \frac{1}{z} = w$), es fácil mostrar que en ∞ posee un cero de orden 1. Por lo que define una sección holomorfa de $\mathcal{T}_{\mathbb{C}P^1}$, y además nos dice que este haz tiene clase de Chern igual a 2 (pues dicha sección holomorfa posee dos ceros simples). Su flujo puede escribirse en la coordenada afín $\mathbb{C} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}P^1$ como

$$\Psi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$(t, z) \mapsto ze^t \ .$$

Sea $M = \mathbb{C}/\Lambda$ un toro complejo, en U_i con funciones de coordenadas $\{z\}$ podemos escribir el campo holomorfo $s(z) = a\frac{\partial}{\partial z}$ para $a \in \mathbb{C}$. Este campo está bien definido y no posee ceros. Por lo que define una sección holomorfa de $\mathcal{T}_M$, y además nos dice que este haz tiene clase de Chern cero. Su flujo puede escribirse como

$$\Psi : \mathbb{C} \times M \to M$$

$$(t, [z]) \mapsto [z + at] \ ,$$

donde el corchete [ ] indica la clase de equivalencia en $M = \mathbb{C}/\Lambda$. Estos automorfismos son conocidos como translaciones.

Resumiendo podemos establecer que:

9.7 Proposición. *En toda superficie de Riemann M existe una correspondencia uno a uno entre:*

(1) *Campos vectoriales holomorfos completos en M.*

(2) *Subgrupos de dimensión compleja 1 del grupo de automorfismos holomorfos de M.* □

Lo anterior puede redondearse diciendo que el álgebra de Lie de los campos vectoriales holomorfos completos en una superficie de Riemann M es naturalmente isomorfa al álgebra de Lie del grupo de automorfismos holomorfos de M, ver Kobayashi pág. 77.

10. Superfices de Riemann que poseen campos vectoriales holomorfos completos.

Nuestro objetivo es clasificar todas la superficies de Riemann (compactas o no) que poseen campos vectoriales holomorfos completos (no idénticamente cero).

Sea M una superficie de Riemann arbitraria con un campo holomorfo completo no idénticamente cero.

Si $z_0 \in M$ es un punto donde el campo no se anula, existe una función holomorfa no constante $\psi(t) : \mathbb{C} \to M$ con $\psi(0) = z_0$.

Supongamos que ψ es uno a uno. Ello implíca que M contiene una copia de $\mathbb{C}$.

Caso 1. Si además ψ es sobreyectiva, entonces es de hecho biyectiva y $M = \mathbb{C}$. Es fácil ver que necesariamente $s(z) = z\frac{\partial}{\partial z}$.

Caso 2. Si ψ no es sobreyectiva, entonces la inclusión de $\mathbb{C} \subset M$ es estricta. Es bien conocido que la única forma de extender $\mathbb{C}$ a una superficie de Riemann que la contenga propiamente es mediante $M = \mathbb{C}P^1$. Es fácil ver que $s(z) = a\frac{\partial}{\partial z}$.

Supongamos que ψ no es uno a uno, entonces $\psi(\mathbb{C})$ es un cilindro $\mathbb{C}^*$ o un toro $\mathbb{C}/\Lambda$. Esto sigue usando que $\psi : \mathbb{C} \to \psi(\mathbb{C}) \subset M$ define una cubierta topológica, que es isometría local cuando se considera las métricas planas asociadas, en el dominio y la imagen.

Caso 3. Si $\psi(\mathbb{C})$ es un cilindro, hay tres posibilidades para M; es $\mathbb{C}^*$, ó bien $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{C}P^1$, uniendo uno o dos puntos respectivamente a $\psi(\mathbb{C})$ para formar M.

Caso 4. Si $\psi(\mathbb{C})$ es un toro, como M es conexa M es el toro mismo. Como $\mathcal{T}_M$ tiene clase de Chern cero toda sección con ceros debe tener también polos. De donde los únicos campos holomorfos son los constantes $s(z) = a\frac{\partial}{\partial z}$.

Podemos resumir los comentarios anteriores como:

10.1 Teorema. *La lista de superficies de Riemann con campos vectoriales holomorfos completos (no idénticamente cero) es:*

Superficie:	*Campos vectoriales completos:*	*Dimensión del espacio de campos:*	*Automorfismos holomorfos:*	*Estrutura de grupo:*
$\mathbb{C}$	$(\lambda z+\mu)\frac{\partial}{\partial z}$	*2*	$z \mapsto az+b$	$Afin(\mathbb{C})$
$\mathbb{C}^*$	$\lambda z\frac{\partial}{\partial z}$	*1*	$z \mapsto az$	$\mathbb{C}^*$
$\mathbb{C}P^1$	$\lambda(z-\mu)(z-\eta)\frac{\partial}{\partial z}$	*3*	$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$	$PSL(2,\mathbb{C})$
$\mathbb{C}/\Lambda$	$\lambda\frac{\partial}{\partial z}$	*1*	$z \mapsto [z+a]$	$\mathbb{C}/\Lambda$

donde $\lambda, \mu, \eta, a, b, c, d \in \mathbb{C}$, *particularmente* $a \neq 0$ *en los dos primeros renglones y* $ad-bc=1$ *en el tercero.* □

Note que la dimensión del espacio de campos vectoriales holomorfos y completos coincide con la dimensión del correspondiente grupo de automorfismos holomorfos (como grupo de Lie complejo).

El cálculo de los grupos de automorfismos holomorfos es un ejercicio clásico, ver por ejemplo Remmert pág. 310. Dejamos al lector interesado la comprobación de que las soluciones de los campos vectoriales, producen los grupos monoparamétricos, en los automorfismos holomorfos que se indican.

10.2 Corolario. *Si M es una superficie de Riemann compacta de género* g ≥ 2 *entonces:*

(1) *No posee campos holomorfos completos (distintos del campo idénticamente cero).*

(2) *No posee grupos monoparamétricos de automorfismos holomorfos.* □

Más precisamente un resultado clásico de Hurwitz, ver Griffiths et al. pág. 275, establece que para M compacta con género g ≥ 2 el grupo de automorfismos holomorfos de M es finito, de hecho casi siempre es trivial (i.e. formado solamente por la identidad).

11. Interpretación geométrica de la existencia de formas diferenciales holomorfas.

Primera interpretación: *Cada forma diferencial holomorfa s en M, produce en $M - \{ceros\ de\ s\}$ coordenadas canónicas planas.*

Basta considerar $\phi_i = \int s_i(z_i)dz_i$, como en la Sección 8. Aplicando estas ideas de manera más precisa, se tiene:

11.1 Proposición. *Para todo número entero* g ≥ 1 *existe una superficie de Riemann compacta M, de género* g *que posee una forma diferencial holomorfa ω (no idénticamente cero). Dicha forma posee exactamente* $2\mathrm{g}-2$ *ceros, simples, por lo tanto* $c_1(\mathcal{K}_M) = 2\mathrm{g}-2$.

Demostración: Si g $= 1$, la superficie es un toro y $w = adz$, produce el ejemplo.

Si g $= 2$, consideremos dos toros provistos como en el caso anterior con sus coordenadas canónicas planas, $\phi_i = \int dz_i$ como es usual.

Cortamos ambos toros a lo largo de una geodésica de longitud l obteniendo dos superficies con frontera geodésica.

Pegamos ambas copias a lo largo de sus fronteras, mediante isometrías entre ellos. Obteniendo una superficie compacta homeomorfa a la esfera con dos asas.

Dicha superficie posee dos puntos exepcionales que provienen de los extremos de las geodésicas.

Afirmamos que la estructura plana en vecindades de esos puntos es isométrica a una vecindad del origen provista con la estructura plana que proviene de zdz (ver ejemplo en Sección 8).

Por lo anterior es posible describir una forma meromorfa en M usando funciones de coordenadas asociadas a:

* $\phi_i = \int dz_i$ en un punto regular

* $\phi_i = \int z_i dz_i$ los dos puntos exepcionales.

La prueba cuando el género es mayor o igual a tres es idéntica agregando nuevas copias de toros provistos con formas del tipo dz. □

Inversamente:

11.2 Proposición. *Dada $\omega = \{s_i(z_i)dz_i\}$ una forma diferencial holomorfa en una superficie de Riemann M, tiene asociada de manera natural en $M - \{$ceros de $\omega\}$ una familia de funciones coordenadas $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}$ definidas mediante las integrales:*

$$\phi_i(z_i) = \int_{z_0}^{z_i} s_i(z_i)dz_i$$

tal que sus cambios de coordenadas son translaciones:

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : z \mapsto z + c_{ji} .$$

De hecho si los ceros de ω son de orden uno, localmente en una vecindad de ellos ω puede escribirse como zdz.

Demostración: La última afirmación se puede ver suponiendo que cerca de un cero de orden uno cualquier forma diferencial holomorfa puede escribirse como:

$$\omega(z) = (a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ...)dz$$

donde $a_1 \neq 0$. Introduciendo un cambio de coordenadas holomorfo cerca de 0 y aplicando la regla de transformación de formas diferenciales, ver Sección 2, puede mostrarse que es posible eliminar los términos de orden mayor o igual a dos en la serie de ω. □

Segunda interpretación: *La cohomología de superfices de Riemann compactas.*

Consideremos en M una forma diferencial holomorfa ω, este objeto se escribe localmente como $\omega(z_i) = s_i(z_i)dz_i$, para $s_i(z) : U_i \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas. Nuestro punto de partida son dos observaciones:

(1) ω nunca es la diferencial de una función holomorfa en M (toda función holomorfa en M compacta es constante, su diferencial es cero).
(2) ω es d–cerrada ($d\omega$ es una 2–forma holomorfa, lo que implíca necesariamente que $d\omega = 0$).

Por lo que ω debe determinar una clase no nula de la cohomología de M. Ello puede formalizarse mediante la definición del (1,0)–grupo de cohomología de M:

$$H^{1,0}(M) = \frac{\{formas\ \ holomorfas\ \ d-cerradas\ \ en\ \ M\}}{\{diferenciales\ \ de\ \ funciones\ \ f : M \to \mathbb{C}\}}\ .$$

Si se define la conjugación de formas $\overline{f(z)dz}$, es natural extenderla a las clases en $H^{1,0}(M)$, definiendo $H^{0,1}(M)$ como $\overline{H^{1,0}(M)}$. Con lo que podemos enunciar la siguiente generalización del teorema de De Rham.

11.3 Teorema. *Para M una superficie de Riemann compacta se tiene un isomorfismo:*

$$H^1(M,\mathbb{C}) = H^{1,0}(M) \oplus H^{0,1}(M)\ ,$$

donde

$$H^1(M,\mathbb{C}) = H_1(M,\mathbb{C})^* = (H_1(M,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C})^*\ .$$

Esto es, $H^1(M,\mathbb{C})$ es el dual del primer grupo de homología de M con coeficientes complejos (que vagamente dicho son las clases de homología de M ponderadas con coeficientes complejos.) □

Ver Brieskorn et al. pág. 638 ó Griffiths et al.

El interés del anterior resultado es que nos dice que podemos expresar la topología algebraica de M por medio de sus formas diferenciales holomorfas.

12. Superfices de Riemann que poseen formas diferenciales holomorfas.

12.1 Ejemplo. *La esfera de Riemann, no tiene formas diferenciales holomorfas (no idénticamente cero).*

Por contradicción si existiera ω una forma holomorfa no idénticamente cero, entonces

$$f(p) = \int_0^p \omega : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}$$

define una función holomorfa (pues no depende de la trayectoria usada para calcular la integral) y no constante (pues su diferencial seria $\omega \neq 0$). Lo que es imposible.

Considerardo dz como forma diferencial holomorfa en la coordenada afín $\mathbb{C}_z$ en $\mathbb{C}P^1$. La expresión de dz cerca del punto al infinito es $w^{-2}dw$ (usar el cambio de coordenadas usual $z \mapsto \frac{1}{z} = w$). Por lo que $\{dz, w^{-2}dw\}$ definen una sección meromorfa de $\mathcal{K}_{\mathbb{C}P^1}$ con exactamente un polo de orden -2, sigue que $c_1(\mathcal{K}_{\mathbb{C}P^1}) = -2$ y no posee secciones holomorfas (no idénticamente cero).

12.2 Ejemplo. *Formas diferenciales en toros.* Para $M = \mathbb{C}/\Lambda$ un toro complejo, en U_i con coordenadas $\{z\}$ podemos escribir las formas holomorfas como adz para $a \in \mathbb{C}$. Dicha forma no posee ceros ni polos. Por lo que define una sección holomorfa de $\mathcal{K}_{\mathbb{C}/\Lambda}$, y además este haz tiene clase de Chern cero.

12.3 Proposición. *En M una superficie de género $g \geq 1$, las formas holomorfas forman un espacio vectorial complejo de dimensión g.* □

Ver Brieskorn et al. pág. 630.

Finalmente describimos como aplicación de la existencia de formas diferenciales holomorfas la construcción de la variedad Jacobiana.

Dada $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ una base del espacio de formas diferenciales holomorfas de M, donde M tiene género $g \geq 1$. El problema de hallar explícitamente las integrales $\int \omega_i$ es más fácil de atacar cuando se considera el conjunto completo de integrales con lo que se tiene una correspondencia:

$$\begin{array}{rcl} M & \to & \mathbb{C}^g \\ z & \mapsto & \left(\int_{z_0}^{z} \omega_1, ..., \int_{z_0}^{z} \omega_g\right) . \end{array}$$

Dicha función no está bien definida, pues depende de la trayectoria real uniendo z_0 y z en M que se eliga para calcular las integrales. Es posible mostrar que los valores de las integrales a lo largo de curvas cerradas en M;

$$\Lambda(M) = \{\left(\int_\gamma \omega_1, ..., \int_\gamma \omega_g\right) \in \mathbb{C}^g \mid \gamma \in H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}\}$$

forman un subgrupo discreto de $\mathbb{C}^g$. Se define la *variedad Jacobiana* de M como $J(M) = \mathbb{C}^g/\Lambda(M)$. Y se tiene una función holomorfa bien definida mediante las anteriores integrales

$$\mu : M \to J(M) ,$$

llamada la *función de Abel–Jacobi.* Dos problemas centrales de la teoría son:

* Dada M determinar explícitamente su variedad Jacobiana $J(M)$.

* Describa su función de Abel–Jacobi.

12.4 Ejemplo. Es inmediato observar que para un toro $\mathbb{C}/\Lambda$, la variedad Jacobiana asociada resulta ser el mismo toro, y la función de Abel–Jacobi es la identidad.

Para una discusión más amplia de este problema con la integración de funciones algebraicas ver Gómez-Mont, los trabajos relacionados con la Jacobiana en Cornalba el al. y naturalmente Griffiths et al. pág 333.

13. Interpretación geométrica de la existencia de diferenciales cuadráticas holomorfas.

Las secciones del haz $\mathcal{K}_M^{\otimes 2}$ llamado el haz de diferenciales cuadráticas, son fáciles de identificar definiendo dz^2 mediante la regla de transformación (análogamente a lo explicado en la Sección 2):

$$s_j(z_j)dz_j^2 = s_i(\phi_j \circ \phi_i^{-1}(z_i))[D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(z_i)]^{-2}dz_i^2\,,$$

o simplemente:

$$dz_j^2 = [D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(z_i)]^{-2}dz_i^2\ .$$

Ver Strebel pág. 16 para más detalles.

Primera interpretación: *Cada diferencial cuadrática holomorfa s en M, produce en $M - \{ceros\ de\ s\}$ coordenadas canónicas planas.*

Basta considerar $\phi_i = \int \sqrt{s_i(z_i)}dz_i$, como antes.

Más precisamente se tiene el siguiente resultado:

13.1 Proposición. *Sea M una superficie de Riemann compacta. Existe una correspondencia biyectiva entre:*

(1) *Secciones holomorfas η del haz $\mathcal{K}_M^{\otimes 2}$.*

(2) *Métricas Riemannianas planas en $M^0 = M - \{ceros\ de\ \eta\}$, tales que:*

  (i) *Su holonomia $\pi_1(M^0) \to O(2)$ es $\pm Id.$, esto es, el transporte paralelo a lo largo de curvas en M^0 preserva o invierte el sentido de los vectores.*

  (ii) *Los ceros de η son puntos de ángulo cónico $m\pi$, para $m \in \mathbb{N}$.*

(3) *M^0 posee coordenadas canonicas planas. Esto es, funciones coordenadas $\{U_i, \phi_i\}$ de M^0 tal que su cambio de coordenadas es $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : z_i \mapsto \pm z_j + c_{ji}$ para $c_{ji} \in \mathbb{C}$ y con puntos cónicos de ángulo $m\pi$ en los ceros de η.* □

Ver Strebel.

Conviene aclarar que un punto de ángulo cónico $m\pi$, es un punto que posee una vecindad isométrica al vértice de un cono euclideano con el águlo indicado. Por ejemplo, pegando m copias de el medio plano euclideano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$, por sus fronteras mediante isometrías. La parte positiva del eje x en una copia se pega con la parte negativa del eje x en otra, y así sucesivamente. Formando una superficie homeomorfa a un disco topológico.

13.2 Ejemplo. Observemos que si $s = \{s_i(z_i)dz_i\}$ forman una seccion holomorfa de $\mathcal{K}_M$ entonces $\{s_i^2(z_i)dz_i^2\}$ forman una sección holomorfa $s \otimes s$ de $\mathcal{K}_M^{\otimes 2}$. En consecuencia $c_1(\mathcal{K}_M^{\otimes 2})$ es el doble de la clase de Chern del haz canónico. La esfera de Riemann no posee diferenciales cuadráticas holomorfas, pero una superficie M compacta de género $\mathrm{g} \geq 0$ si las posee. Por lo anterior los ejemplos de formas diferenciales holomorfas en la sección 11, producen ejemplos de diferenciales cuadráticas holomorfas.

La relevancia de las diferenciales cuadráticas holomorfas proviene de la siguiente aplicación.

Segunda interpretación: *Las diferenciales cuadráticas holomorfas permiten construir el espacio de estructuras holomorfas en una superficie orientable M_{top} de género* $\mathrm{g} \geq 2$.

Considerando la parte (3) en el anterior resultado, dada M y η es posible definir en M una foliación horizontal (singular): dada por la imagen inversa de las curvas reales horizontales en $\mathbb{C}$ bajo las coordenadas canónicas planas ϕ_i asociadas a η. Dicha foliación puede estirarse en el parámetro horizontal por números reales positivos $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Esto es, los cambios de coordenadas originales $z_i \mapsto \pm z_j + c_{ji}$ son substituidos por otros nuevos de la forma $z_i \mapsto \lambda x_j + \sqrt{-1} y_j + c_{ji}$, con λ fija. Ello cambia la estructura compleja de M. Esto es para distintos valores de λ se obtienen distintas superficies de Riemann. Estos cambios $\lambda\eta$ se conocen como deformaciones de Teichmüller, ver Abikoff pág. 29.

13.3 Teorema. *Sean M_1 y M_2 dos estructuras de superficie de Riemann compactas en M_{top} de género $g \geq 2$. Entonces, existe una diferencial cuadrática holomorfa η en M_1 y un factor de dilatación λ tal que $\lambda\eta$ es precisamente la estructura compleja en M_2.* □

Ver Abikoff pág. 16.

Recordando que el espacio de estructuras de superficies de Riemann en una superficie topológica compacta orientable M_{top} de género $\mathrm{g} \geq 2$, es de dimensión compleja $3\mathrm{g}-3$. Un resultado primeramente formulado por B. Riemann, ver Griffiths et al. pág. 256. Sigue que esa misma debe ser la dimensión esperada para el espacio vectorial de las diferenciales cuadráticas holomorfas.

14. Resumen.

Ordenamos la información para superficies de Riemann compactas en la siguiente tabla (aunque solo hemos dado algunas evidencias, el lector podrá hallar pruebas completas en las referencias):

	M es la esfera, $g = 0$.	M es un toro, $g = 1$.	M es de género g, $g \geq 2$.
$c_1(\mathcal{O}_M)$	0	0	0
$dim_{\mathbb{C}} H^0(M, \mathcal{O}_M)$	1	1	1
$c_1(\mathcal{T}_M)$	2	0	$2 - 2g$
$dim_{\mathbb{C}} H^0(M, \mathcal{T}_M)$	3	1	0
$c_1(\mathcal{K}_M)$	-2	0	$2g - 2$
$dim_{\mathbb{C}} H^0(M, \mathcal{K}_M)$	0	1	g
$c_1(\mathcal{K}_M^{\otimes 2})$	-4	0	$4g - 4$
$dim_{\mathbb{C}} H^0(M, \mathcal{K}_M^{\otimes 2})$	0	1	$3g - 3$

Finalmente, podemos decir que:

Mucha de la información geométrica de una superficie de Riemann puede leerse en las secciones holomorfas (o meromorfas) de sus haces lineales.

Bibliografía

1. W. Abikoff, *The Real Analytic Theory of Teichmüller Space*, Springer Lecture Notes **820** (1980).
2. L. V. Ahlfors, *Complex Analysis (Third Edition)*, Mc Graw Hill (1979).
3. E. Brieskorn, H. Knörrer, *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser (1986).
4. M. Cornalba, X. Gómez–Mont, A. Verjovsky Eds., *Proceedings of School on Riemann Surfaces ICTP 1987*. World Scientific (1989).
5. H. Farkas, I. Kra, *Riemann Surfaces (Second Edition)*, Springer–Verlag (1992).
6. X. Gómez–Mont, *Integration of algebraic functions and the Riemann–Kempf singularity theorem*, En, Algebraic Geometry, S. Sertöz Ed. Lecture notes in pure and applied mathematics **193**. Marcel Dekker (1997) 89–134.
7. Ph. Griffiths, J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley–Interscience (1978).
8. R. C. Gunning, *Lectures on Vector Bundles over Riemann Surfaces*, Princeton University Press (1967).
9. S. Kobayashi: *Transformations Groups in Differential Geometry*, Springer–Verlag (1972).
10. J. Le Potier, *Lectures on Vector Bundles*, Cambridge (1997).
11. R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society (1995).
12. M. S. Narasimhan, *Vector bundles on compact Riemann surfaces*, Complex Analysis and its Applications, ICTP Trieste, IAEA, vol. III (1976) 63–88.
13. M. Porter, *Superficies de Riemann hilo dorado en la tela de las matemáticas*, Aportaciones Mat. Comunicaciones, Soc. Mat. Mexicana, **13** (1993) 163–192.
14. M. Porter, *Superficies de Riemann*, III Coloquio del Departamento de Matemáticas del CINVESTAV (1983).
15. R. Remmert, *Theory of Complex Functions*, Springer–Verlag (1989).
16. M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, 5 vols. Publish or Perish (1970).
17. K. Strebel, *Quadratic Differentials*, Springer–Verlag (1984).