

## GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

- UNA INTRODUCCIÓN USANDO CÁLCULO Y VARIABLE COMPLEJA -

JESÚS MUCIÑO-RAYMUNDO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNAM, UNIDAD MORELIA  
NICOLÁS ROMERO 150, COL. CENTRO  
MORELIA 58000, MICHOACÁN  
MEXICO

### 0. Introducción.

La geometría hiperbólica nació hace más de 165 años. N. Lovachevski, K. F. Gauss, J. Bolyai entre otros, la descubrieron buscando aclarar la existencia de geometrías planas diferentes de la euclidea.

Actualmente el interés por el estudio de la geometría hiperbólica está motivado por sus numerosas aplicaciones al análisis complejo, la geometría y topología de variedades de dimensión dos y tres, las ecuaciones diferenciales, los sistemas dinámicos etc. Áreas con multitud de problemas de investigación en los que se trabaja actualmente y para los cuales la geometría hiperbólica es una herramienta esencial. Es sorprendente considerar que aún hay en la misma geometría hiperbólica muchas preguntas de investigación por aclarar, por lo que podemos decir que forma una parte viva de la matemática contemporánea.

El objetivo de estas notas es presentar los rudimentos de la geometría hiperbólica con un mínimo de definiciones. En las Secciones 1 a 6 suponemos que el lector conoce cálculo vectorial en el plano  $\mathbf{R}^2$  y un primer curso de variable compleja. Las Secciones 7 a 9 y los apéndices, están escritos de manera informal tratando ofrecer un panorama al lector.

El autor agradece a Omegar Calvo y Renato Iturriaga su invitación a participar en la Escuela de Geometría y Sistemas Dinámicos.

Contenido:

1. Rectas y transformaciones hiperbólicas.
2. Producto punto y distancia hiperbólica.
3. Modelo del medio plano hiperbólico.
4. Área hiperbólica de triángulos.
5. Curvatura del plano hiperbólico.
6. Existencia de  $n$ -ágonos con ángulos rectos.
7. Estructuras hiperbólicas en superficies.
8. Calculando cubiertas universales de superficies mediante el plano hiperbólico.
9. Algunos problemas abiertos en geometría hiperbólica.

Apéndice 1. Comparando las geometrías euclidea e hiperbólica.

Apéndice 2. Comparando dos modelos de la geometría hiperbólica.

Apéndice 3. Breve cronología de la geometría hiperbólica.

Referencias.

### 1. Rectas y transformaciones hiperbólicas.

Los elementos básicos del plano euclideo son:

i) El espacio  $\mathbf{R}^2$ .

ii) Una colección de curvas en él; las líneas rectas en  $\mathbf{R}^2$ .

Usando (i) y (ii) podemos "hacer geometría", construyendo figuras con segmentos de rectas y estudiando sus propiedades. Al avanzar en su estudio se hace evidente un tercer elemento:

iii) El grupo de transformaciones de  $\mathbf{R}^2$  que preservan la distancia euclidea.

Nuestro punto de partida es la siguiente pregunta:

*¿ Existe algún espacio de dimensión dos con una colección de curvas que hagan el papel de rectas, tal que por cada recta y un punto exterior a ella exista más de una recta paralela ?*

No discutiremos la interpretación de la pregunta anterior, procederemos simplemente proponiendo un espacio y un conjunto de curvas en él. A lo largo del trabajo identificamos los números complejos  $\mathbf{C}$  con  $\mathbf{R}^2$ , mediante  $z = x + iy$  (donde  $i = \sqrt{-1}$ ), provistos de la geometría euclidea con la norma usual  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**1.1 Definición.** El *plano hiperbólico* es el disco

$$\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}.$$

Su frontera es el círculo  $\partial\Delta = \{z \mid |z| = 1\}$ . Sus *rectas hiperbólicas* son: arcos de círculos euclideos en  $\mathbf{C}$  ortogonales a la frontera de  $\Delta$ , ó bien segmentos de líneas rectas en  $\mathbf{C}$  ortogonales a la frontera de  $\Delta$ .

En  $\Delta$  tenemos "suficientes" rectas hiperbólicas (ver figura 1):

### 1.2 Observaciones.

1.- Por cualquier par de puntos distintos en  $\Delta$  existe una única recta hiperbólica por ellos.

2.- Dos rectas hiperbólicas distintas se cortan en a lo más un punto en  $\Delta$ .

3.- Dada una recta hiperbólica cualquiera y un punto fuera de ella en  $\Delta$  existe una infinidad de rectas hiperbólicas que pasan por el punto y no cortan a la recta dada en  $\Delta$ .

Las pruebas completas de estas afirmaciones son laboriosas, de momento no las necesitaremos.

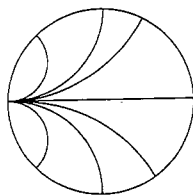


Fig. 1. Rectas hiperbólicas en  $\Delta$ .

Quisieramos dar a  $\Delta$  una forma de medir distancias entre puntos, la distancia heredada de  $\mathbb{C}$  (o  $\mathbb{R}^2$ ) no es satisfactoria, pues con ella las rectas hiperbólicas tienen longitud finita. Seguiremos una idea de F. Klein:

*Primer paso:* Recordemos que Klein define que “hacer geometría” en un espacio  $\mathcal{E}$ , como estudiar las propiedades de  $\mathcal{E}$  que son invariantes bajo un grupo fijo de transformaciones.

*Segundo paso:* Vamos a hallar un grupo de transformaciones de  $\Delta$ , a partir de la información que ya tenemos: sus rectas hiperbólicas.

*Tercer paso:* Si tenemos suerte podremos construir una distancia “hiperbólica” en  $\Delta$  invariante bajo la acción de ese grupo de transformaciones.

Resumiendo, tenemos un esquema:

$$\begin{array}{ccccc} \text{un espacio} & & \text{grupo generado} & & \text{una métrica} \\ y & \implies & \text{por "reflexiones"} & \implies & \text{en el} \\ \text{sus rectas} & & \text{en esas rectas} & & \text{espacio} \end{array}$$

Este procedimiento es natural, recordemos cómo se lleva a cabo lo anterior en el plano euclidiano:

**1.3 Lema.** Una transformación del plano euclidiano preserva distancia entre puntos si y sólo si puede obtenerse a partir de un número finito de reflexiones en líneas rectas de  $\mathbb{R}^2$ .

*Demostración.* Definimos la reflexión en el eje  $x$  como  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ , para cualquier otra recta la definición es análoga. Toda transformación del plano que preserva distancias es una composición finita de translaciones, reflexiones en rectas ó rotaciones. Basta observar que: la composición de dos reflexiones en dos rectas paralelas es una translación y la composición de reflexiones en dos rectas que se cortan es una rotación.

□

Para generar el grupo de transformaciones que buscamos necesitamos primeramente que envíen  $\Delta$  sobre sí mismo. Siguiendo la idea del caso euclidiano vamos a usar como generadores “reflexiones” o “inversiones” en rectas hiperbólicas.

Primeramente, consideremos la siguiente idea. Dada una recta hiperbólica  $l \subset \Delta$ . Imaginemos de momento que “ $l$  es como un espejo”. Con esto queremos decir que cada vez que colocamos una figura en una de las dos mitades en que  $l$  divide a  $\Delta$ , entonces podemos mediante  $l$  reflejar la figura obteniendo su imagen en la otra mitad de  $\Delta$ , ver figura 2.

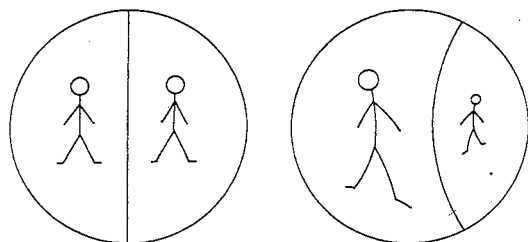


Fig. 2. Dos espejos hiperbólicos, reflejando una figura.

Para la definición formal, dado un círculo euclideo  $C \subset \mathbb{C}$  con centro en  $c$  y radio  $\rho$  la *inversión* en él es una transformación

$$T_C : \mathbb{C} - \{c\} \rightarrow \mathbb{C} - \{c\}$$

$$z \mapsto w,$$

donde  $w \in \mathbb{C} - \{c\}$  es colineal con  $z$  y  $c$ , satisfaciendo para la longitud euclidea (con signo) de los segmentos que determinan la relación:  $\overline{cz} \cdot \overline{cw} = \rho^2$ . Ver figura 3.

**1.4 Lema.** *Propiedades de inversiones en círculos  $C \subset \mathbb{C}$ :*

- 1.- La inversión en cualquier círculo preserva ángulos euclideos entre curvas.
- 2.- La inversión envía rectas y círculos euclideos en rectas y/o círculos euclideos.
- 3.- La inversión en círculos ortogonales a la frontera de  $\Delta$  envía  $\Delta$  sobre sí mismo.
- 4.- La composición de un número par de inversiones preserva orientación en  $\mathbb{C}$ , la composición de un número impar la invierte.

*Demostración.* Es elemental, ver [6] o [11]. □

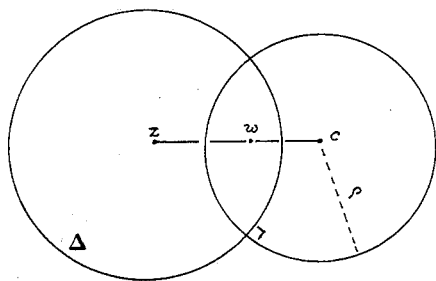


Fig. 3. Inversión en un círculo ortogonal a  $\partial\Delta$ .

**1.5 Definición.** El grupo de transformaciones hiperbólicas  $Iso(\Delta)$ , es el generado por todas las inversiones en un número par de rectas hiperbólicas.

Note que para rectas hiperbólicas por  $0 \in \Delta$  sus inversiones coinciden con reflexiones euclideas. Por simplicidad se han considerado solo un número par.  $Iso(\Delta)$  es un grupo cuya operación es la composición de funciones.

**1.6 Lema. 1.** *Dados dos puntos distintos cualesquiera  $a, b$  en  $\Delta$  existe un elemento de  $Iso(\Delta)$  tal que envía  $a$  en  $b$ .*

**2.** *El subgrupo de  $Iso(\Delta)$  formado por todas las transformaciones que fijan un punto arbitrario  $a \in \Delta$  es isomorfo como grupo abstracto al grupo de rotaciones euclidianas con centro en  $0$  que denotamos  $S^1 = \{R(z) = e^{i\theta}z \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$ .*

La afirmación (1) dice que no hay puntos preferidos en  $\Delta$ , es decir  $\Delta$  es homogéneo. Por (2) no hay direcciones preferidas en  $\Delta$ , es decir  $\Delta$  es isotrópico.

*Demostración.* Para (1), todo punto  $a \in \Delta$  puede ser llevado al origen  $0 \in \Delta$ , mediante la inversión en un círculo adecuado con centro en la línea euclídeana por  $0$  y  $a$ . Finalmente mediante otra inversión se lleva  $0$  a  $b$ , ver figura 4.

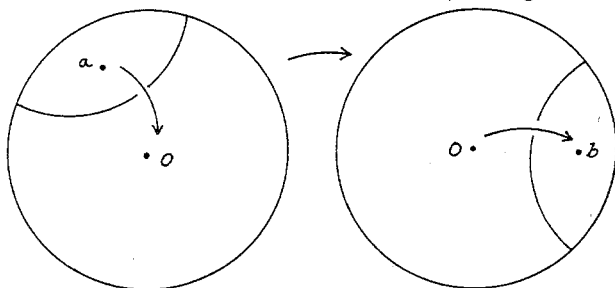


Fig. 4. Llevando  $a$  en  $b$  mediante inversiones adecuadas.

Para (2), en el caso donde el punto fijo sea  $a = 0$ , la composición de todas las posibles reflexiones en un número par de rectas hiperbólicas por el origen es el grupo  $\{R(z) = e^{i\theta}z \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$  de todas las rotaciones con centro en  $0$ . Para  $a \neq 0$ , sea  $T(z) \in Iso(\Delta)$  tal que  $T(a) = 0$ , como en (1). Entonces toda transformación que fija  $a$  puede escribirse como

$$T^{-1} \circ R \circ T : \Delta \rightarrow \Delta$$

para  $R(z) = e^{i\theta}z$  una rotación. □

Vamos ahora a identificar los elementos de  $Iso(\Delta)$  explícitamente, denotamos por  $\bar{a}$  el conjugado complejo de  $a$ .

**1.7 Lema. Expresión analítica del grupo de transformaciones hiperbólicas.**

$$Iso(\Delta) = \left\{ T(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \mid \theta \in [0, 2\pi) , a \in \Delta \right\} .$$

*Demostración.* Existe una demostración obvia pero muy laboriosa, calculando explícitamente la expresión analítica para la composición de dos inversiones en rectas hiperbólicas. Una segunda demostración usando variable compleja es como sigue. Toda transformación hiperbólica preserva ángulos y como es composición de un número par de inversiones, preserva la orientación, entonces deberá ser una función holomorfa. Usando el Lema de Schwartz es fácil ver que toda función holomorfa que envía  $\Delta$  sobre sí mismo es una transformación de Möbius como se afirma, ver [6] pág. 136, [10]. □

¿ Cuantos elementos tiene  $Iso(\Delta)$  ?

**1.8 Observación.** Existe una correspondencia uno a uno entre elementos del grupo  $Iso(\Delta)$  y puntos en el espacio producto  $\Delta \times S^1$ , dada como:

$$\begin{aligned} \Delta \times S^1 &\leftrightarrow Iso(\Delta) \\ (a, \theta) &\leftrightarrow T(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}. \end{aligned}$$

Naturalmente,  $\theta$  puede interpretarse como un parámetro de rotación, y  $a$  como un parámetro de translación ya que:

$$T(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \text{ es tal que } T(a) = 0.$$

## 2. Producto punto y distancia hiperbólica.

Nuestro objetivo en esta sección es usar el grupo de transformaciones hiperbólicas para definir una distancia en  $\Delta$ . Haremos un poco más, construyendo un producto punto para vectores basados en puntos de  $\Delta$  (lo que se conocí técnicamente como una *métrica de Riemann*). La ventaja de ello es que (mediante técnicas usuales de cálculo en  $\mathbf{R}^2$ ) tendremos los conceptos de:

- \* ángulos hiperbólicos,
- \* longitud hiperbólica de curvas y noción de geodésicas (curvas que minimizan distancia),
- \* distancia hiperbólica,
- \* áreas hiperbólicas,
- \* curvatura del espacio  $\Delta$ .

El *plano tangente* a  $\Delta$  en un punto  $z \in \Delta$  se define como:

$$T_z\Delta \doteq \{(z, v) \in \Delta \times \mathbf{R}^2 \mid v \text{ es un vector basado en } z\}.$$

El cual es un espacio vectorial real de dimensión dos, bajo las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar real  $\lambda$ :

$$(z, v) + (z, u) \doteq (z, v + u), \quad \lambda(z, v) \doteq (z, \lambda v).$$

El *producto punto hiperbólico* en  $z \in \Delta$  se expresará mediante la función:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{hip} : T_z\Delta \times T_z\Delta &\rightarrow \mathbf{R} \\ (v_1, v_2) \times (u_1, u_2) &\mapsto \frac{4\langle (v_1, v_2), (u_1, u_2) \rangle}{(1-|z|^2)^2} = \frac{4(v_1u_1 + v_2u_2)}{(1-|z|^2)^2}. \end{aligned}$$

Es decir, el producto punto euclidean de los vectores  $(v_1, v_2)$  y  $(u_1, u_2)$  en  $T_z\Delta$ , se multiplica por el factor  $4/(1-|z|^2)^2 = 4/(1-x^2-y^2)^2$ . Como este factor es positivo en  $\Delta$ , el producto punto hiperbólico es bilineal y no degenerado, en cada  $T_z\Delta$ . Usando el lenguaje del cálculo se escribe en forma abreviada como:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{hip} \doteq \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2} \doteq \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}.$$

**2.1 Proposición.** Construcción del producto punto a partir de  $Iso(\Delta)$ . Consideremos  $v, u \in T_a\Delta$ , para  $a \in \Delta$  fijo. Dada  $T \in Iso(\Delta)$  con  $T(a) = 0$ , la imagen de

estos vectores en  $T_0\Delta$  bajo la diferencial de la función  $T$  (donde  $DT_a : T_a\Delta \rightarrow T_0\Delta$ ), satisface que:

$$\langle v, u \rangle_{hip} = 4\langle DT_a(v), DT_a(u) \rangle .$$

El factor 4 no es esencial, se introduce para simplificar el cálculo de la curvatura, ver Sección 5. En palabras: el producto punto hiperbólico de  $v, u$  en el plano  $T_a\Delta$  se calcula enviándolos a vectores tangentes en el origen, mediante la diferencial de cualquier transformación  $T \in Iso(\Delta)$  que lleve  $a$  en 0, y finalmente calculando su producto punto euclideo en  $T_0\Delta$  (multiplicado por 4). Ver figura 5.

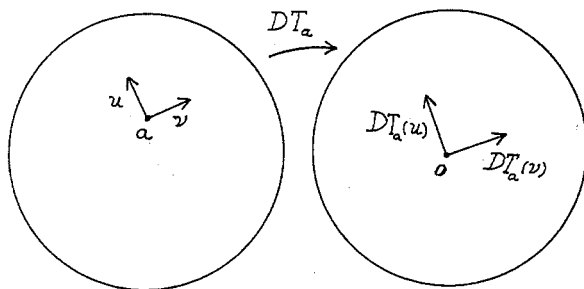


Fig. 5. El producto punto hiperbólico de dos vectores.

*Demostración.* Para mostrar que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{hip}$  está bien definido hay que exhibir que el lado derecho de la anterior igualdad es independiente de la elección de  $T \in Iso(\Delta)$  en el conjunto de funciones con  $T(a) = 0$ . Estas funciones pueden escribirse como

$$\{ T(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \mid \theta \in [0, 2\pi), a \in \Delta \text{ fijo} \} .$$

Como “ $e^{i\theta}$ ” corresponde a una rotación (que preserva el producto punto euclideo), basta calcular para  $T(z) = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$ , cuya diferencial evaluada en  $a$  es

$$DT_a = \frac{d}{dz} \left( \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right) \Big|_{z=a} = \frac{1 - \bar{a}a}{(1 - \bar{a}z)^2} \Big|_{z=a} = \frac{1}{1 - |a|^2} \in \mathbf{R} ,$$

substituyendo

$$\langle v, w \rangle_{hip} = 4\langle DT_a(v), DT_a(w) \rangle = 4\left\langle \left( \frac{1}{1 - |a|^2} \right) v, \left( \frac{1}{1 - |a|^2} \right) w \right\rangle = \frac{4\langle v, w \rangle}{(1 - |a|^2)^2} .$$

□

Por lo anterior  $Iso(\Delta)$  son las isometrías de  $\Delta$  respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{hip}$ , esto es:

$$\langle v, w \rangle_{hip} = \langle DT(v), DT(w) \rangle_{hip} ,$$

para todos  $v, w$  y  $T$ . Lo dejamos como ejercicio al lector.

Repetimos ahora algunas definiciones en  $\mathbf{R}^2$ , con este nuevo producto punto. La *norma hiperbólica* de un vector tangente  $(v_1, v_2) \in T_z\Delta$  es (ver figura 6):

$$|(v_1, v_2)|_{hip} \doteq \sqrt{\langle (v_1, v_2), (v_1, v_2) \rangle_{hip}} = \frac{2\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{1 - |z|^2} = \frac{2|(v_1, v_2)|}{1 - x^2 - y^2}.$$

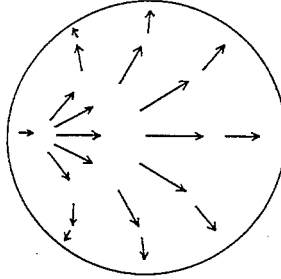


Fig. 6. Vectores tangentes en  $\Delta$ , que tienen la misma norma hiperbólica. Dados dos vectores  $v, u \in T_z \Delta$ , el ángulo hiperbólico que forman es:

$$\text{ángulo}_{hip}(v, u) \doteq \cos^{-1} \left( \frac{\langle v, u \rangle_{hip}}{|v|_{hip} \cdot |u|_{hip}} \right).$$

**2.2 Observación.** El ángulo entre vectores es igual en las geometrías hiperbólica y euclídea. Basta observar que:

$$\begin{aligned} \text{ángulo}_{hip}(v, u) &\doteq \cos^{-1} \left( \frac{\langle v, u \rangle_{hip}}{|v|_{hip} \cdot |u|_{hip}} \right) = \\ &= \cos^{-1} \left( \frac{\langle v, u \rangle}{|v| \cdot |u|} \right) \doteq \text{ángulo}_{euc}(v, u). \end{aligned}$$

Sea  $\gamma(t) = (x(t), y(t)) : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \Delta$  una curva diferenciable por pedazos, su longitud hiperbólica es:

$$\text{longitud}_{hip}(\gamma) \doteq \int_a^b |\gamma(t)'|_{hip} dt = \int_a^b \frac{2\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{1 - x(t)^2 - y(t)^2} dt.$$

La distancia hiperbólica  $d_{hip}$  entre dos puntos  $z, w \in \Delta$  es por definición el ínfimo de las longitudes hiperbólicas de entre todas las curvas diferenciables por pedazos que los unen. Hallaremos una fórmula explícita.

**2.3 Lema. 1.** Para  $x_0$  en la parte positiva del eje  $x$  en  $\Delta$

$$d_{hip}(0, x_0) = \log \left( \frac{1 + x_0}{1 - x_0} \right).$$

2. La curvas de longitud hiperbólica más corta entre dos puntos en  $\Delta$  son segmentos de rectas hiperbólicas.

3. Las rectas hiperbólicas tienen longitud hiperbólica infinita.

*Demostración.* Para (1), consideremos  $\gamma(t) = (x(t), y(t)) : [a, b] \rightarrow \Delta$  cualquier curva diferenciable por pedazos que une 0 con  $x_0$ . Entonces



$$\begin{aligned}
 \text{longitud}_{hip}(\gamma) &\doteq \int_a^b |\gamma(t)'|_{hip} dt \\
 &= \int_a^b \frac{2\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{1 - x(t)^2 - y(t)^2} dt \geq \int_a^b \frac{2\sqrt{(x'(t))^2}}{1 - x(t)^2 - y(t)^2} dt \\
 &\geq \int_a^b \frac{2\sqrt{(x'(t))^2}}{1 - x(t)^2} dt \geq \int_a^b \frac{2x'(t)}{1 - x(t)^2} dt = \int_0^{x_0} \frac{2ds}{1 - s^2} \\
 &= [\log\left(\frac{1+s}{1-s}\right)]_0^{x_0} = \log\left(\frac{1+x_0}{1-x_0}\right).
 \end{aligned}$$

La igualdad en el cálculo anterior se cumple si y sólo si  $x'(t) > 0$  y  $y(t) \equiv 0$ . La curva de menor distancia hiperbólica que une 0 con  $x_0$  es el segmento de recta hiperbólica entre ellos.

Para (2), dados  $z, w$  dos puntos en  $\Delta$ , mediante una transformación  $T \in Iso(\Delta)$  trasladamos:  $z$  a 0 y  $w$  a  $x_0$  en la parte positiva del eje  $x$  en  $\Delta$ , recordando que  $T$  lleva líneas hiperbólicas en líneas hiperbólicas.

Para (3) basta observar que la función  $\log((1+x_0)/(1-x_0))$  tiende a infinito cuando  $x_0$  tiende a uno. □

**2.4 Corolario.** La distancia hiperbólica entre 0 y  $z \in \Delta$  es

$$d_{hip}(0, z) = \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right).$$

*Demostración.* Dado  $z \in \Delta$ , basta aplicar una rotación  $R(z) = e^{i\theta}z$  para llevarlo a la parte positiva del eje  $x$ . □

**2.5 Proposición.** La función  $d_{hip} : \Delta \times \Delta \rightarrow \mathbf{R}$  es una distancia en el sentido de análisis.

*Demostración.* Debemos mostrar que para  $z_1, z_2, z_3 \in \Delta$  se cumple:

1.  $d_{hip}(z_1, z_2) \geq 0$ .
2.  $d_{hip}(z_1, z_2) = 0$  si y sólo si  $z_1 = z_2$ .
3.  $d_{hip}(z_1, z_2) = d_{hip}(z_2, z_1)$ .
4.  $d_{hip}(z_1, z_2) + d_{hip}(z_2, z_3) \geq d_{hip}(z_1, z_3)$ .

*Demostración.* Para (4) usando  $Iso(\Delta)$  podemos suponer que  $z_1 = 0$  y  $z_3$  esta en la parte positiva del eje  $x$  en  $\Delta$ . El resultado sigue de la desigualdad probada para la longitud hiperbólica de cualquier curva uniendo 0 con  $x_0$  en 22.3. El resto (1-3) es sencillo. □

**2.6 Proposición.** *Dados dos puntos  $z, w \in \Delta$  la distancia hiperbólica entre ellos es:*

$$d_{hip}(z, w) = \log \left( \frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \right).$$

*Demostración.* Dados  $z_0$  y  $w_0$  dos puntos en  $\Delta$  fijos, sea

$$T(z) = \frac{z - w_0}{1 - \bar{w}_0 z} \in Iso(\Delta).$$

Como  $d_{hip}(z_0, w_0) = d_{hip}(T(z_0), T(w_0))$  y  $T(w_0) = 0$ , aplicando 2.3 el resultado sigue.  $\square$

Una *geodésica* en un espacio métrico es una curva que realiza la distancia mínima para parejas de puntos en ella (suficientemente cercanos). Por 2.3.2, en  $\Delta$  las rectas hiperbólicas y las geodésicas coinciden.

### 3. Modelo del medio plano hiperbólico.

Una vez construido el plano hiperbólico mediante  $\Delta$ , conviene aclarar que existen otros modelos de él, construiremos aquí otro. El interés de ello es que a veces un mismo cálculo puede ser más sencillo en un modelo que en el otro.

Dado el medio plano  $\mathbf{H}^2 = \{z \mid Im(z) = y > 0\}$ , sea

$$f : \Delta \rightarrow \mathbf{H}^2$$

$$f(z) = \frac{z + 1}{iz - i},$$

es una función uno a uno pues su inversa es

$$f^{-1} : \mathbf{H}^2 \rightarrow \Delta$$

$$f^{-1}(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

Es fácil comprobar que:  $f(0) = i$ ,  $f(1) = \infty$ ,  $f(-1) = 0$  y  $f$  envía la frontera de  $\Delta$  en la frontera del medio plano  $\partial\mathbf{H}^2 = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ , pues para  $e^{i\theta} \in \partial\Delta$ :

$$f(e^{i\theta}) = -\cotangente(\theta/2) \in \mathbf{R}.$$

Como  $f$  es  $C^\infty$  con inversa  $f^{-1}$  también  $C^\infty$ , decimos que  $f$  es un cambio de coordenadas. Cualquier propiedad de  $\Delta$  puede transplantarse a  $\mathbf{H}^2$ , mediante  $f$ . Explícitamente,  $f$  puede describirse como  $f = P \circ R \circ P^{-1}$  donde:

i)  $P^{-1} : \Delta \rightarrow S^2$  es la inversa de una proyección estereográfica.

ii)  $R : S^2 \rightarrow S^2$  es una rotación adecuada en la esfera.

iii)  $P : S^2 \rightarrow \mathbf{H}^2$  es una proyección estereográfica.

Para  $S^2 \subset \mathbf{R}^3$  una esfera, ver figura 7.

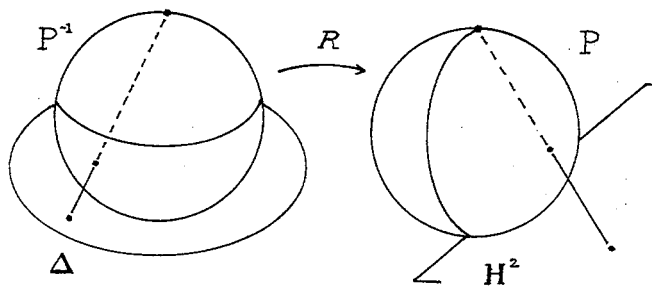


Fig. 7. Geometría de  $f$ .

**3.1 Lema.** La función  $f : \Delta \rightarrow \mathbf{H}^2$ :

1. Envía rectas hiperbólicas de  $\Delta$  en; líneas rectas (euclidianas) o círculos (euclidianos) en  $\mathbf{H}^2$  ortogonales a su frontera  $\partial(\mathbf{H}^2)$ .
2. Envía el producto punto hiperbólico en  $\Delta$  en el producto punto:

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

en  $\mathbf{H}^2$ .

3. Envía el grupo de isometrías hiperbólicas  $Iso(\Delta)$  en las transformaciones

$$Iso(\mathbf{H}^2) = \left\{ T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc = 1 \right\},$$

en  $\mathbf{H}^2$ .

*Demostración.* Para (1), usar la expresión  $T = P \circ R \circ P^{-1}$ .

En (2), para todos  $v, u \in T_z \Delta$  en  $z \in \Delta$  arbitrario hay que mostrar que su producto punto hiperbólico es igual al de  $Df_z(v), Df_z(u) \in T_f(z)\mathbf{H}^2$  con el producto punto dado en el enunciado. Recuerde que la diferencial de  $f$  evaluada en  $z$  es tal que  $Df_z : T_z \Delta \rightarrow T_f(z)\mathbf{H}^2$ . Calculando

$$\langle v, u \rangle_{hip} = \frac{4\langle v, u \rangle}{(1 - |z|^2)^2} = \frac{\langle Df_z(v), Df_z(u) \rangle}{Im(f(z))^2},$$

y la afirmación sigue.

Para (3), toda transformación  $T$  en  $Iso(\Delta)$  da origen a una  $\tilde{T}$  en  $Iso(\mathbf{H}^2)$  mediante la fórmula  $\tilde{T} = f \circ T \circ f^{-1} : \mathbf{H}^2 \rightarrow \mathbf{H}^2$ . □

Por lo anterior, en  $\mathbf{H}^2$  están bien definidos los conceptos de: rectas hiperbólicas (rectas y círculos como en (1)), producto punto hiperbólico (fórmula en (2)) e isometrías hiperbólicas, por (3).

En lo que sigue usaremos ambos modelos del plano hiperbólico  $\Delta$  y  $\mathbf{H}^2$ , intercambiándolos libremente cuando sea necesario.

#### 4. Área hiperbólica de triángulos.

Para el producto punto euclideo en  $\mathbf{R}^2$  el elemento de área en un punto  $(x, y)$  se define como  $dx dy$ , que es el área en el plano tangente  $T_{(x,y)}\mathbf{R}^2$  del cuadrilátero de lados  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ . Para determinar el *elemento de área hiperbólica* debemos calcular, el área del cuadrilátero de lados  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  en el plano  $T_{x+iy}\Delta$ . Como ambos vectores tangentes son ortogonales, su área hiperbólica es el producto de la norma hiperbólica de sus lados:

$$\text{área}_{hip}[\text{cuad. de lados } (1,0), (0,1) \text{ en } T_{x+iy}\Delta] \cdot dx dy = \left( \frac{2}{1-x^2-y^2} \right)^2 \cdot dx dy.$$

Sea una región  $A \subset \Delta$  su *área hiperbólica* es

$$\text{área}_{hip}(A) \doteq \int \int_A \frac{4 dx dy}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

Análogamente puede calcularse el elemento de área en  $\mathbf{H}^2$ , como  $dx dy / y^2$ . Por el teorema del cambio de variable para integrales dobles, el área de la región asociada  $f(A)$  en  $\mathbf{H}^2$  satisface:

$$\text{área}_{hip}(A) = \int \int_A \frac{4 dx dy}{(1-x^2-y^2)^2} = \int \int_{f(A)} \frac{dx dy}{y^2} = \text{área}_{hip}(f(A)).$$

Un *triángulo hiperbólico* en  $\mathbf{H}^2$  está determinado por tres puntos y los segmentos de rectas hiperbólicos que los unen.

**4.1 Teorema.** *Sea  $\Delta$  un triángulo hiperbólico en  $\mathbf{H}^2$ , con ángulos interiores  $\alpha, \beta, \gamma$ , su área hiperbólica es:*

$$\text{área}_{hip}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

*Demostración.* Debe calcularse

$$\text{área}_{hip}(\Delta) = \int_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2}.$$

Usando el teorema de Green para integrales dobles;

$$\int_{\Delta} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \int_{\partial \Delta} u dx + v dy,$$

y haciendo  $u = 1/y$  y  $v = 0$ , se tiene  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$ , con lo que:

$$\int_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2} = \int_{\partial \Delta} \frac{dx}{y}.$$

Sea  $l$  uno de los lados en  $\partial \Delta$  como en la figura 8, usando coordenadas polares  $\{(\theta, \rho)\}$ , se tiene:

$$\int_l \frac{dx}{y} = \int_{\psi}^{\phi} \frac{d(\rho \cos \theta)}{\rho \sin \theta} = - \int_{\psi}^{\phi} d\theta = \psi - \phi.$$

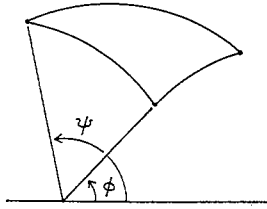


Fig. 8. Calculando el área hiperbólica de un triángulo.

Repetiendo el cálculo para los otros dos lados de  $\Delta$  se tiene

$$\text{área}(\Delta) = \sum_{i=1}^3 (\psi_i - \phi_i) .$$

Esta cantidad multiplicada por  $-1$  (proveniente de la orientación en los lados del triángulo) puede interpretarse como el cambio de la dirección tangente al recorrer los lados del triángulo.

El cambio de la dirección tangente en cada vértice del triángulo es  $\pi - \alpha$ ,  $\pi - \beta$  y  $\pi - \gamma$ , respectivamente.

El cambio de la dirección tangente al recorrer el triángulo completo (lados y vértices incluidos) es  $2\pi$ .

Comparando estas cantidades se tiene:

$$2\pi = [3\pi - (\alpha + \beta + \gamma)] - \sum_{i=1}^3 (\psi_i - \phi_i) ,$$

despejando el resultado sigue.

□

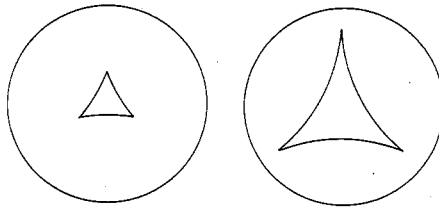


Fig. 9. Al aumentar el área los ángulos internos disminuyen.

Los triángulos hiperbólicos de área máxima tendrán ángulos interiores idénticamente cero y sus vértices en  $\partial\Delta$ , ver figura 9. A un triángulo hiperbólico con vértices en  $\partial\Delta$  le llamaremos *triángulo ideal*.

**4.2 Corolario.**  $\pi$  es el valor máximo para el área de triángulos hiperbólicos.

1. Todos los triángulos ideales son equivalentes bajo  $\text{Iso}(\mathbf{H}^2)$ .
2. El área de cualquier triángulo ideal es  $\pi$ .

*Demostración.* Para (1) basta mostrar que dados tres puntos arbitrarios diferentes entre sí,  $x_1, x_2, x_3 \in \partial\mathbf{H}^2$  existe  $T \in Iso(\mathbf{H}^2)$  tal que  $T(x_1) = 0$ ,  $T(x_2) = 1$ ,  $T(x_3) = \infty$  (lo que queda como ejercicio). Para (2), usando (1) podemos suponer que el triángulo ideal  $\Delta$  tiene vértices  $\{1, -1, \infty\}$ , calculando:

$$area_{hip}(\Delta) = \int \int_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [-arccos(x)]_{-1}^1 = \pi.$$

□

### 5. Curvatura del plano hiperbólico.

Dada  $S$  una superficie provista de los conceptos de; longitud de curvas y área de regiones. Su curvatura puede describirse como sigue. Para  $p \in S$  consideremos dos cantidades:

- 1.-  $C(r) \in \mathbf{R}$ , la longitud del círculo en  $S$  de radio  $r$  con centro en  $p$  (medida con la longitud de curvas en  $S$ ).
- 2.-  $A(r) \in \mathbf{R}$ , el área de la bola en  $S$  de radio  $r$  con centro en  $p$  (medido con el área de regiones en  $S$ ).

La *curvatura gaussiana* de  $S$  en  $p$  puede calcularse como el número:

$$K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{2\pi r - C(r)}{\pi r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} 12 \cdot \frac{\pi r^2 - A(r)}{\pi r^4}.$$

El lector que puede tomar cualquiera de los límites como definición o bien ver la deducción de estas fórmulas así como la prueba de la segunda igualdad en [12] vol. 2 pág. 130-131, o [8] pág. 292. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para  $r$  pequeño:

- 1.-  $S$  es *positivamente curvada* en  $p$ , i.e.  $K(p) \geq 0$ .
- 2.- La longitud de los círculos de radio  $r$  en  $S$  con centro en  $p$  es menor que  $2\pi r$  la longitud de los círculos euclidianos de radio  $r$ .
- 3.- El área de las bolas de radio  $r$  en  $S$  con centro en  $p$  es menor que  $\pi r^2$  el área de las bolas euclidianas de radio  $r$ .

Análogamente son equivalentes:

- 1.-  $S$  es *negativamente curvada* en  $p$ , i.e.  $K(p) \leq 0$ .
- 2.- La longitud de los círculos de radio  $r$  en  $S$  con centro en  $p$  es mayor que  $2\pi r$  la longitud de los círculos euclidianos de radio  $r$ .
- 3.- El área de las bolas de radio  $r$  en  $S$  con centro en  $p$  es mayor que  $\pi r^2$  el área de las bolas euclidianas de radio  $r$ .

Usando cualquiera de las anteriores fórmulas, es fácil mostrar que la curvatura de un plano euclidiano es idénticamente cero y la curvatura de una esfera de radio uno (en  $\mathbf{R}^3$ ) con la métrica inducida es idénticamente uno.

**5.1 Lema.** Para cualquier  $a \in \Delta$ , la longitud del círculo con centro en  $a \in \Delta$  y radio hiperbólico  $r \geq 0$  es:

$$C(r) = 2\pi \operatorname{senh}(r) .$$

El área de la bola con centro en  $a$  y radio hiperbólico  $r \geq 0$  es:

$$A(r) = 2\pi[\operatorname{cosh}(r) - 1] .$$

*Demostración.* Usando  $\operatorname{Iso}(\Delta)$  podemos suponer que  $a = 0$ . Calculamos la longitud hiperbólica del círculo euclideo  $\{|z| = \rho\}$  para  $r = \log((1 + \rho)/(1 - \rho))$ , donde  $r$  está en unidades hiperbólicas. Por 2.4, el círculo euclideo de radio  $\rho$  coincide con el círculo hiperbólico de radio  $r$ . Mediante coordenadas polares  $\{(\theta, \rho)\}$  se parametriza el círculo como  $\gamma(\theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\theta)) : [0, 2\pi] \rightarrow \Delta$ , calculando

$$\begin{aligned} C(r) &= \int_0^{2\pi} |\gamma'(\theta)|_{\text{hip}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2\rho d\theta}{1 - \rho^2} = \frac{2\rho}{1 - \rho^2} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{4\pi\rho}{1 - \rho^2} \\ &= 2\pi \left( \frac{e^r - e^{-r}}{2} \right) = 2\pi \operatorname{senh}(r) , \end{aligned}$$

ya que  $\rho = ((e^r - 1)/(1 + e^r))$ . Para el área se tiene

$$A(r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{(1 - \rho^2)^2} = \frac{\pi\rho^2}{1 - \rho^2} = 2\pi \left( \frac{e^r + e^{-r}}{2} - 1 \right) = 2\pi[\operatorname{cosh}(r) - 1] .$$

□

**5.2 Teorema.** La curvatura gaussiana del plano hiperbólico es  $-1$  en todos sus puntos.

*Demostración.* Usando  $\operatorname{Iso}(\Delta)$  basta calcular para  $0 \in \Delta$ :

$$\begin{aligned} K(p) &= \lim_{r \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{2\pi r - C(r)}{\pi r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{2\pi r - 2\pi \operatorname{senh}(r)}{\pi r^3} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} 3 \cdot \left[ -\frac{2}{3!} - \frac{2r^2}{5!} - \dots \right] = -1 \end{aligned}$$

ya que  $\operatorname{senh}(r) = [r + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \dots]$ . El cálculo usando el área es análogo:

$$\begin{aligned} K(p) &= \lim_{r \rightarrow 0} 12 \cdot \frac{\pi r^2 - A(r)}{\pi r^4} = \lim_{r \rightarrow 0} 12 \cdot \frac{\pi r^2 - 2\pi[\operatorname{cosh}(r) - 1]}{\pi r^4} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} 12 \cdot \left[ -\frac{2}{4!} - \frac{2r^2}{6!} - \dots \right] = -1 \end{aligned}$$

ya que  $\operatorname{cosh}(r) = [1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \dots]$ .

□

Para el lector más experimentado en geometría diferencial; si la superficie  $S \subset \mathbf{R}^2$  posee un producto punto de la forma  $\lambda(x, y)[dx^2 + dy^2]$ , entonces:

$$K(x, y) = -\frac{1}{\lambda(x, y)} \Delta \log(\lambda(x, y)),$$

donde  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $\lambda(x, y) : S \rightarrow \mathbf{R}^+$  es una función  $C^2$  y  $\Delta$  es el Laplaciano usual en  $\mathbf{R}^2$ , ver [8] pág. 237. En  $\mathbf{H}^2$  el modelo del medio plano  $\lambda(x, y) = 1/y^2$ , y se tiene:

$$K(x, y) = -\frac{1}{1/y^2} \Delta \log\left(\frac{1}{y^2}\right) = -1.$$

Es posible visualizar pequeñas regiones del plano hiperbólico como superficies en  $\mathbf{R}^3$ . Considerese un niño que jala un carrito caminando a lo largo de eje  $y$ , como en la figura 10. La curva que describe el carrito se llama *tractriz*. Al rotar la tractriz en el eje  $y$ , la superficie de revolución que se obtiene se conoce como *pseudoesfera*. Dicha superficie con la métrica inducida por  $\mathbf{R}^3$  es de curvatura  $-1$  y pequeñas regiones de ella son isométricas a pequeñas regiones de  $\Delta$ , ver [12] vol. 3 pág. 238.

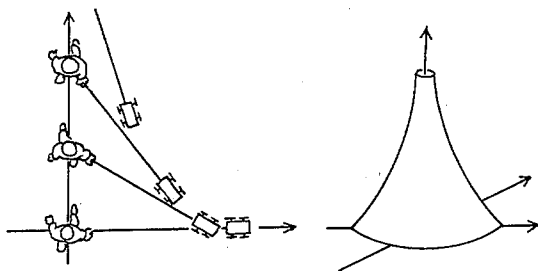


Fig. 10. La tractriz y la pseudoesfera.

## 6. Existencia de $n$ -ángulos con ángulos rectos.

**6.1 Proposición.** Para todo  $n \geq 5$ , existe un  $n$ -ángulo hiperbólico regular con ángulos rectos.

*Demostración.* Consideremos en  $\Delta$  un círculo  $S^1(\rho)$  de radio euclidiano  $0 < \rho \leq 1$  con centro en 0 y  $n$  semirectas por 0 igualmente espaciadas en  $\Delta$ . La intersección del círculo con las semirectas, determina  $n$  puntos en  $\Delta$ . Sea  $P(\rho)$  el único polígono hiperbólico regular con esos  $n$  puntos como vértices. Como el polígono  $P(\rho)$  es regular sea  $\alpha(\rho)$  el ángulo interior que forman cualquiera par de lados, ver figura 11.

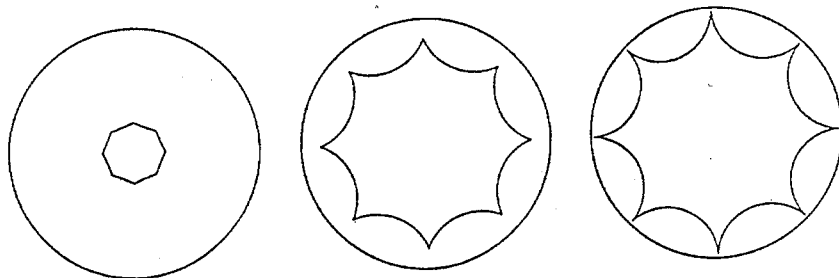


Fig. 11. Polígonos regulares en  $\Delta$ .



Si  $\rho$  tiende a 1, los ángulos hiperbólicos  $\alpha(\rho)$  tienden a 0.

Si  $\rho$  tiende a 0, los ángulos hiperbólicos  $\alpha(\rho)$  tienden a  $\frac{(n-2)\pi}{n}$ , y como  $0 < \rho$  no alcanzan dicho valor.

Note que  $\frac{(n-2)\pi}{n} > \pi/2$  cuando  $n \geq 5$ .

Por continuidad existe un radio  $0 < \rho < 1$  tal que  $P(n)$  tiene ángulos rectos, i.e.  $\alpha(\rho) = \pi/2$ . Como la función  $\rho \mapsto \alpha(\rho)$  es monótona (lo que queda como ejercicio), es posible mostrar que el polígono regular  $P(n)$  es único (salvo isometrías de  $\Delta$ ).  $\square$

De hecho existe infinidad de polígonos hiperbólicos no regulares con  $n \geq 5$  lados y ángulos rectos.

**6.2 Lema.** *No existen rectángulos en el plano hiperbólico.*

*Demostración.* Por contradicción supongamos que existe un rectángulo digamos  $R$ . Ponemos sobre el eje  $x$  en  $\Delta$  copias de  $R$  adyacentes entre sí, de tal forma que los lados en las copias de  $R$  llenan la recta hiperbólica dada por el eje  $x$ . Formaríamos con ello un par de rectas hiperbólicas a distancia constante en  $\Delta$  lo que es imposible, ver figura 12. Basta mostrar que toda recta hiperbólica que no interseca a el eje  $x$  en  $\Delta$  no está a una distancia constante de él (lo que queda como ejercicio).  $\square$

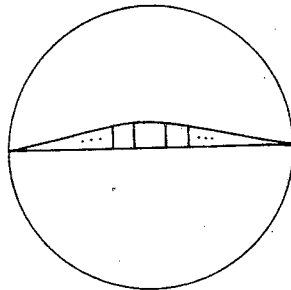


Fig. 12. Un par de "paralelas" a partir de copias de un rectángulo.

**7. Estructuras hiperbólicas en superficies.**

Nuestro objetivo es mostrar que es posible construir superficies que posean una geometría hiperbólica. Una superficie topológica, es un espacio topológico Hausdorff que es localmente homeomorfo a  $\mathbf{R}^2$ .

**7.1 Definición.** Sea  $M$  una superficie topológica, una *estructura hiperbólica* en  $M$  es una colección de parejas  $\{(U_j, \phi_j)\}$  tal que:

- i)  $U_j \subset M$  son abiertos en  $M$ , formando una cubierta de  $M$ .
- ii)  $\phi_j : U_j \subset M \rightarrow \phi_j(U_j) \subset \Delta$  son funciones continuas con inversa continua.
- iii) Cada vez que  $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ , la función  $\phi_j \circ \phi_k^{-1}$  es la restricción de una isometría en  $Iso(\Delta)$ .

A una pareja  $(M, (U_j, \phi_j))$  le llamaremos simplemente una *superficie hiperbólica*.

La importancia de la existencia de una estructura hiperbólica viene del siguiente hecho.

**7.2 Lema.** *En una superficie hiperbólica están bien definidos los siguientes conceptos:*

1. *Ángulos hiperbólicos entre dos curvas.*
2. *Longitud hiperbólica de curvas.*
3. *Rectas hiperbólicas (geodésicas).*
4. *Área hiperbólica.*
5. *Curvatura.*

*Demostración.* Por ejemplo para (3), sea  $\gamma \subset M$  una curva. Decimos que  $\gamma$  es recta hiperbólica en  $M$ , si cada vez que tomamos un abierto  $U_j \subset M$  con  $\gamma \cap U_j \neq \emptyset$ , entonces  $\phi_j(\gamma)$  es un segmento de recta hiperbólica en  $\Delta$ . Afirmamos que este último hecho no depende de la  $U_j$  elegida. Si se elige otro  $U_k$  cubriendo  $\gamma$ , el segmento  $\gamma \cap U_k \cap U_j$  es tal que su imagen bajo  $\phi_k$  es un segmento de recta hiperbólica. Ya que por la condición (iii) en la definición,  $\phi_j \circ \phi_k^{-1}$  es la restricción de una isometría en  $\text{Iso}(\Delta)$  y lleva rectas hiperbólicas en rectas hiperbólicas.  $\square$

Las estructuras hiperbólicas pueden construirse a partir de pegar polígonos hiperbólicos para formar superficies.

**7.3 Lema. Ensambladura para lados.** *Sean  $P$  y  $Q$  dos polígonos hiperbólicos en  $\Delta$ , provistos de lados  $l_1 \subset P$ ,  $l_2 \subset Q$  de igual longitud hiperbólica. Si identificamos los lados mediante una isometría  $T : l_1 \rightarrow l_2$ , el espacio resultante  $P \cup Q / \sim$ , es tal que cada punto que proviene de el interior de los segmentos que se están identificando, posee una vecindad isométrica a una vecindad en  $\Delta$ .*

*Demostración.* Consideramos la métrica hiperbólica restringida a  $P$  y  $Q$ . Con respecto a esa métrica sabemos que la identificación  $T$  es isometría.

$P \cup Q / \sim$  es un espacio de clases de equivalencia, donde  $p$  y  $q$  en  $P \cup Q$  son equivalentes si y solo si  $T(p) = q$ . Note que  $P \cup Q$  se considera como unión disjunta.

$P \cup Q / \sim$  es un espacio métrico con la métrica inducida por  $d_{hip}$  en  $\Delta$ .

Finalmente dado  $p$  en el interior del segmento  $l_1$  se considera una  $\epsilon$ -vecindad de él en  $P$  y una  $\epsilon$ -vecindad de  $T(p)$  en  $Q$ . La unión de ambas vecindades forma la vecindad deseada alrededor de  $p$  (o  $T(p)$ ) en  $P \cup Q / \sim$ . Ver figura 13.  $\square$

**7.4 Lema. Ensambladura para vértices.** *Sean  $P_1, \dots, P_m$  polígonos hiperbólicos en  $\Delta$ , con al menos un vértice marcado en cada polígono. Sean  $\{v_1, \dots, v_k\}$  los vértices marcados con ángulos internos  $\{\alpha_j\}$ . Sean  $l_j, l'_j$  los lados adyacentes a los vértices marcados en  $P_j$ . Si identificamos los vértices marcados a un solo punto y sus lados adyacentes mediante isometrías  $T_j : l'_j \mapsto l_{j+1}$ , (en particular  $l'_m$  se identifica con  $l_1$ ), para formar un disco topológico, ver figura 13. El espacio resultante, es tal que el punto que proviene de la identificación de los vértices, posee una vecindad isométrica a una vecindad en  $\Delta$  si y sólo si  $\sum \alpha_j = 2\pi$ .*

*Demostración.* Es similar a la de 7.3, ver figura 13. □

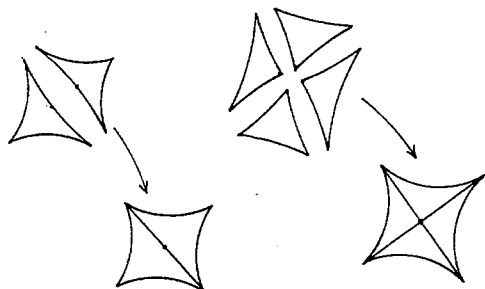


Fig. 13. Ensambladura para lados y vértices.

**7.5 Lema.** Una superficie  $M = D / \sim$ , construida a partir de un polígono hiperbólico  $D \subset \Delta$ , identificando sus lados y tal que las identificaciones satisfacen los Lemas de ensambladura, posee una estructura hiperbólica.

*Demostración.* La colección de funciones  $(U_j, \phi_j)$  se construye como sigue:

Primer paso: considerese  $U_0$  como el interior del polígono y sea  $\phi_0 : U_0 \rightarrow \Delta$  la restricción de la inclusión de  $D$  en  $\Delta$ .

Segundo paso: para cada punto en el interior de un lado de  $D$  se considera  $U_j$  como una pequeña bola en el espacio de identificación  $D / \sim$  y que no contenga vértices.

Tercer paso: para cada punto que es vértice de  $D$  se considera  $U_j$  como una pequeña bola en el espacio de identificación  $D / \sim$  y que no contenga otros vértices que los que se identifican con el original.

De esta manera se cubre a todo  $M \equiv D / \sim$  mediante  $\{U_j\}$ .

Cuarto paso: es calcular los cambios de coordenadas. Por ejemplo supongamos que  $U_j \cap U_k \neq \emptyset$  y que ambas son como en el segundo paso, usando el Lema de ensambladura para lados y la siguiente figura sigue que el correspondiente cambio de coordenadas es la restricción de una isometría. Ver figura 14.

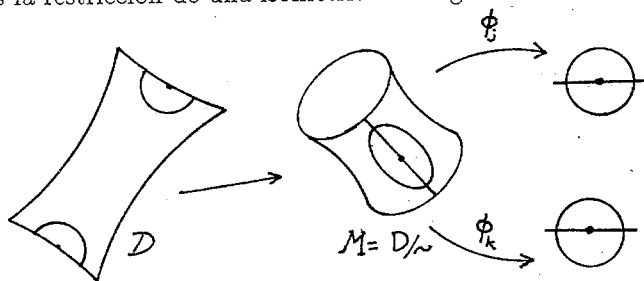


Fig. 14. Cálculo del cambio de coordenadas usando el Lema de ensambladura

El hecho esencial que hace posible describir el cambio de coordenadas es que: por el Lema de ensambladura para lados, todo punto en  $M$  que proviene de la identificación de puntos interiores en los lados del polígono, posee una vecindad localmente isométrica a una vecindad en  $\Delta$ .

Análogamente, por el Lema de ensambladura para vértices, todo punto en  $M$  que proviene de la identificación de los vértices del polígono, posee una vecindad localmente isométrica a una vecindad en  $\Delta$ .

Cualquier otro caso para  $U_j \cap U_k$  es análogo y se dejan los detalles al lector.  $\square$

**7.6 Teorema. Existencia de estructuras hiperbólicas en superficies compactas.** *Toda superficie  $M_g$  orientable compacta de género  $g \geq 2$  admite una estructura hiperbólica.*

*Demostración.* Por simplicidad fijamos  $g = 2$ , el caso  $g \geq 3$  es análogo. Sea  $P(\rho)$  un polígono regular como en 6.1, con  $4g = 8$  lados. Es posible mostrar mediante el mismo argumento de continuidad en 6.1, que existe una  $0 < \rho < 1$  tal que los ángulos internos del polígono son  $2\pi/4g = \pi/4$ . Numeramos los lados del polígono consecutivamente como  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_4, b_4$ . Pegamos los lados del polígono dos a dos cíclicamente:

El lado  $a_j$  con el lado  $a_{j+1}$  (en particular  $a_4$  con  $a_1$ ).

El lado  $b_j$  con el lado  $b_{j+1}$  (en particular  $b_4$  con  $b_1$ ).

Ello usando isometrías que preserven la orientación indicada en los lados, ver figura 15.

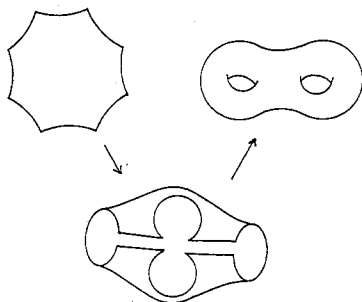


Fig. 15. Construyendo la superficie  $M_2$  a partir de un octágono.

Por ser el polígono regular se cumplen las hipótesis del Lema de ensambladura para lados.

Por tener el polígono ángulos internos  $\pi/4$ , al identificar los vértices su suma es  $2\pi$  y se cumplen las hipótesis del Lema de ensambladura para vértices.

De 7.5 el resultado sigue.  $\square$

## 8. Calculando cubiertas universales de superficies mediante el plano hiperbólico.

La existencia de estructuras hiperbólicas en superficies está estrechamente relacionada con su topología, por ejemplo con su cubierta universal y su grupo fundamental. Con el fin de hacer más comprensible la relación entre geometría y topología, empezamos por repasar el caso del toro, que utiliza geometría euclídeana.

**8.1 Lema.** *La cubierta universal del toro  $T^2$  es  $\mathbf{R}^2$  y su grupo fundamental puede escribirse usando generadores y relaciones como:*

$$\pi_1(T^2) = \{ A, B \mid ABA^{-1}B^{-1} = Id \} = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} ,$$

donde  $Id$  es el elemento identidad en el grupo.

*Demostración.* Consideremos el rectángulo  $D_0 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \subset \mathbf{R}^2$ . Si identificamos su frontera mediante las isometrías de  $\mathbf{R}^2$  dadas por:

$$A : (x, y) \mapsto (x + 1, y) , \quad B : (x, y) \mapsto (x, y + 1) ,$$

obtenemos el toro  $T^2 = D_0 / \sim$ . Más aún, si movemos  $D_0$  en  $\mathbf{R}^2$  bajo  $A$ , estamos pegando a  $D_0$  una nueva copia del rectángulo original, en el lado derecho. Moviendo  $D_0$  bajo  $B$ , pegamos, una nueva copia de  $D_0$  en el lado superior del rectángulo original. Si continuamos el proceso de copiar el rectángulo original bajo la acción de transformaciones que sean composiciones finitas de  $A$  y  $B$  (y/o sus inversos), podemos notar lo siguiente:

- i) El plano  $\mathbf{R}^2$  queda enlosado por copias isométricas del rectángulo original  $D_0$ .
- ii) Todo punto en  $\mathbf{R}^2$  esta cubierto por al menos una copia del rectángulo original  $D_0$ .
- iii) Dos copias del rectángulo distintas entre sí se intersectan en: un lado común o en un vértice común.
- iv) Alrededor de cada vértice hay exactamente 4 copias del rectángulo.
- v) Se cumple la relación  $ABA^{-1}B^{-1} = Id$  (el producto denota la composición de funciones). Esto es las transformaciones  $A$  y  $B$  generan un grupo conmutativo, pues la anterior relación es equivalente con  $AB = BA$ .
- vi) Hay tantas copias del rectángulo como palabras formadas con las letras  $A$  y  $B$ , módulo la relación  $ABA^{-1}B^{-1} = Id$ .

Definimos una relación de equivalencia  $\sim$  en  $\mathbf{R}^2$ . Dos puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  en  $\mathbf{R}^2$  están en la misma clase de equivalencia si y sólo si existe una transformación  $T$  construida como palabra en  $A$  y  $B$  (i.e. composición finita de  $A$ ,  $B$  y/o sus inversos) tal que lleva  $(x_1, y_1)$  en  $(x_2, y_2)$ . Se tiene una función:

$$\Pi : \mathbf{R}^2 \rightarrow T^2$$

$$(x, y) \mapsto [(x, y)]$$

(donde el corchete  $[ ]$  significa la clase de equivalencia bajo  $\sim$ ), satisfaciendo que:

- i)  $\Pi$  es continua y sobreyectiva.
- ii)  $\Pi$  es un homeomorfismo local.

Como  $\mathbf{R}^2$  es simplemente conexo, se sigue que es la cubierta universal de  $T^2$ .

Note que, hay tantas palabras en el grupo fundamental como copias del rectángulo original en el enlosado, ver figura 16. □

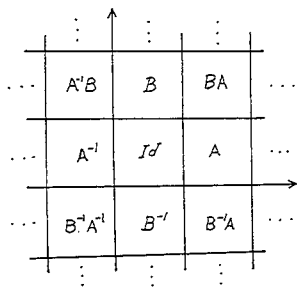


Fig. 16. Piezas del enlosado membretadas como elementos del grupo fundamental. Ahora pasamos al caso hiperbólico.

**8.2 Proposición.** Sea  $M_g$  una superficie topológica orientable compacta de género  $g \geq 2$ , su cubierta universal es  $\Delta$ .

*Demostración.* Por simplicidad explicamos solamente el caso  $g = 2$ , los casos  $g \geq 3$  son análogos. Sea  $M_2$  provista de la estructura hiperbólica construida a partir de un octágono regular  $D_0$  como en 7.6. Consideremos ese octágono como fijo y con centro en 0 en  $\Delta$ .

La primera idea de la construcción es sencilla: mediante copias de  $D_0$  bajo elementos adecuados de  $Iso(\Delta)$  obtenemos una colección de octágonos  $\{D_k\}$  tal que:

- i) La unión de ellos llena  $\Delta$ , i.e.  $\cup_k D_k = \Delta$ .
- ii) Dos octágonos de la colección se intersectan en: un lado común o un vértice común

De hecho para la mayoría de las parejas de octágonos en la colección  $\{D_k\}$  la intersección es vacía. Una colección con las anteriores características se llama un *enlosado* de  $\Delta$ , por octágonos isométricos entre sí. Vamos a generar el enlosado.

Observación:

Sean  $z_1, z_2, w_1, w_2$  cuatro puntos en  $\Delta$ , tal que  $\gamma = \overline{z_1 z_2}$  y  $\beta = \overline{w_1 w_2}$  son segmentos de rectas hiperbólicas con la misma longitud en  $\Delta$ , existe una única transformación  $T \in Iso(\Delta)$  tal que  $T(\gamma) = \beta$  y  $T(z_1) = w_1$ . Para ver esto basta llevar el vértice  $z_1$  a 0 mediante  $Iso(\Delta)$ , aplicar una rotación adecuada con centro en 0 y finalmente llevar 0 a  $w_1$ .

Construcción fundamental:

Mediante un único elemento  $A_1 \in Iso(\Delta)$  podemos identificar el lado  $a_1$  del octágono original  $D_0$  con su lado  $a_2$ , como muestra la figura 17. Esto es a cada lado del octágono original se le puede pegar una nueva copia isométrica del octágono. Por ejemplo, si repetimos el proceso para cada uno de los lados que se han identificado en 7.6, obtenemos 8 nuevos octágonos. Por cada lado hay una transformación  $A_1, B_1, \dots, A_4 \in Iso(\Delta)$  construida mediante la observación.

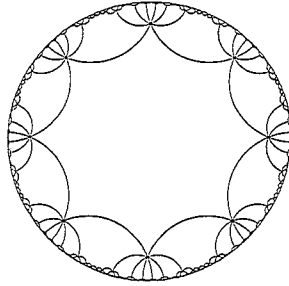


Fig. 17. Un enlosado de  $\Delta$  a partir de un octágono regular.

La idea es repetir el proceso con los lados de estos primeros nueve octágonos y así sucesivamente, con cualquier lado en la frontera de la colección de octágonos que se va obteniendo (lo que puede imaginarse pensando en los lados del octágono como espejos).

Cada vez que se agrega un nuevo octágono se elige de hecho una nueva transformación que es composición de las originales  $A_1, B_1, \dots, A_4$ .

Observemos que para cada lado en los octágonos se agrega justo otro lado en otro nuevo octágono, por el Lema de ensambladura para lados el enlosado en los puntos interiores de los lados cubre localmente  $\Delta$ .

Mientras que en cada vértice ha sido necesario colocar 8 vértices de nuevas copias del octágono original, por el Lema de ensambladura para vértices en esos puntos también se ha cubierto localmente  $\Delta$ .

Cualquier punto  $w$  en  $\Delta$  está cubierto por octágonos del enlosado, basta considerar el segmento de recta hiperbólica entre  $0$  y  $w$  y cubrirlo por octágonos usando la construcción fundamental.

Si se considera la función

$$\begin{aligned} \Pi : \Delta &\rightarrow M \\ z &\mapsto [z] \end{aligned}$$

tal que a cada punto  $w$  en  $\Delta$  lo lleva al octágono original  $D_0$  mediante las composiciones necesarias de  $A_1, B_1, \dots, A_4$  y luego lo proyecta a  $M$  de acuerdo a 7.6. Es posible mostrar que esta es una función de cubierta, i.e. satisface:

- i)  $\Pi$  es continua y sobreyectiva.
- ii)  $\Pi$  es un homeomorfismo local.

Como  $\Delta$  es simplemente conexo, se sigue que  $\Pi : \Delta \rightarrow M$  es la cubierta universal de  $M$ . □

**8.3 Corolario.** *El grupo fundamental de una superficie  $M_g$  orientable compacta de género  $g \geq 2$ , puede escribirse usando generadores y relaciones como:*

$$\pi_1(M_g) = \{A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_{2g}, B_{2g} | A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \cdots A_{2g} B_{2g} A_{2g}^{-1} B_{2g}^{-1} = Id\}.$$

*Demostración.* Por simplicidad suponemos  $g = 2$ . Hay que observar que las transformaciones  $A_1, B_1, \dots, A_4$  generan las transformaciones de cubierta, para la cubierta universal. Por un resultado de topología, dichas transformaciones de cubierta están en correspondencia uno a uno con los elementos del grupo fundamental. La relación  $A_1 B_1 \cdots A_{2g}^{-1} B_{2g}^{-1} = Id$  se obtiene a partir de calcular la composición de las transformaciones como en la relación y observar que llevan  $D_0$  en  $D_0$  como la identidad.  $\square$

En resumen para una superficie hiperbólica  $M$  tenemos un esquema como:

un polígono hiperbólico obtenido cortando $M$ a lo largo de geodésicas	$\Rightarrow$	un enlosado de $\Delta$ por copias del polígono	$\Rightarrow$	el grupo fundamental de $M$
--	---------------	---	---------------	-----------------------------------

Para una prueba y la discusión general del anterior diagrama ver [17], [18] o [33].

Como consecuencia de la existencia de enlosados en  $\Delta$  por un número infinito de polígonos de la misma área hiperbólica, se tiene que el área hiperbólica de  $\Delta$  es infinita.

Finalmente construimos dos ejemplos hiperbólicos.

#### 8.4 Ejemplo La cubierta universal de la esfera menos tres puntos.

Consideremos un cuadrilátero de triángulos ideales como en la figura 18. Si identificamos los lados como se indica, el espacio resultante es homeomorfo a la esfera menos tres puntos  $S^2 - \{3 \text{ puntos}\}$ . El enlosado que se obtiene también aparece en la figura. Es fácil observar que el grupo fundamental está dado por tres generadores con una relación:

$$\pi_1(S^2 - \{3 \text{ puntos}\}) = \{ A, B, C \mid ABC = Id \}.$$

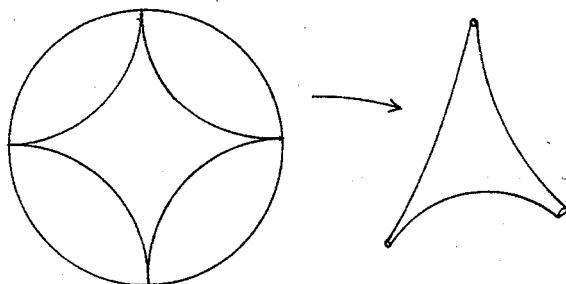


Fig. 18. La esfera menos tres puntos.

Curiosamente el mismo enlosado de  $\Delta$  puede dar origen a otra superficie hiperbólica si se cambian las reglas de pegado:

#### 8.5 Ejemplo La cubierta universal del toro menos un punto.



Consideremos un cuadrilátero (formado por dos triángulos ideales) como en la figura 19. Identificando sus lados como se indica obtenemos una superficie homeomorfa al toro menos un punto  $T^2 - \{1 \text{ punto}\}$ . Es fácil observar que el grupo fundamental está dado por tres generadores con una relación:

$$\pi_1(T^2 - \{1 \text{ punto}\}) = \{ A, B, C \mid ABA^{-1}B^{-1} = C \} .$$

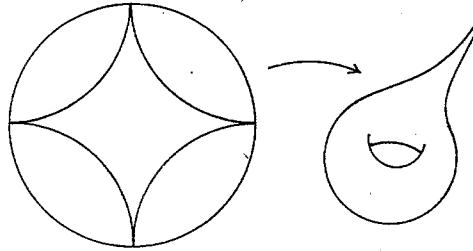


Fig. 19. El toro menos un punto.

Estos trucos pueden generalizarse para casi toda superficie:

**8.6 Teorema. Abundancia de superficies hiperbólicas.** *Con cuatro posibles excepciones, toda superficie topológica, con base abierta numerable, admite una estructura hiperbólica. Las excepciones son,  $M$  homeomorfa a: la esfera, el plano proyectivo real, el toro y la botella de Klein.*

*Demostración.* Ver por ejemplo [17], [18], [33]. □

### 9. Algunos problemas abiertos en geometría hiperbólica.

Es posible considerar el espacio hiperbólico de dimensión tres como:

$$\mathbf{H}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 > 0\} ,$$

provisto del producto punto hiperbólico

$$\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2}$$

Análogamente a lo que hemos desarrollado, tenemos un grupo de isometrías y las nociones de; ángulos, rectas, planos hiperbólicos ... etc. Es un problema abierto responder completamente la siguiente pregunta:

*¿ Qué variedades topológicas de dimensión tres admiten estructura hiperbólica ?*

Actualmente se conocen familias grandes de variedades topológicas de dimensión tres que admiten (o no admiten) estructura hiperbólica modelada en  $\mathbf{H}^3$ . El problema es caracterizar completamente aquellas que sí poseen una estructura hiperbólica. Ello deberá ser la generalización del Teorema 8.6 a dimensión tres. El interés de esta pregunta es que si se conoce la existencia de una estructura hiperbólica puede obtenerse

información de su topología y viceversa. Por ejemplo si una variedad de dimensión tres compacta admite estructura hiperbólica esta es esencialmente única. Para más detalles ver [13], [17], [18], [33], [35].

Siguiendo el esquema de la Sección 8 puede verse que la anterior pregunta está relacionada con la siguiente:

*¿ Cuantos enlosados de  $\mathbf{H}^3$ , por poliedros hiperbólicos isométricos entre sí, existen ?*

Es fácil observar que no todo enlosado produce una variedad de dimensión tres hiperbólica. Naturalmente en  $\mathbf{H}^n$  para  $n \geq 4$  (definido de manera análoga), los dos anteriores problemas son también abiertos y se incrementa su dificultad al crecer  $n$ .

Muchas de nuestras ideas sobre el espacio físico utilizan el espacio euclideo  $\mathbf{R}^3$  como modelo. Otro problema abierto natural es el siguiente:

*¿ Qué geometría aproxima mejor el universo físico: la euclidea o la hiperbólica ?*

El problema es decidir cuál es el mejor modelo geométrico para la estructura global del universo físico. En el mismo sentido en que podemos decir que una esfera  $S^2 \subset \mathbf{R}^3$  aproxima la geometría de la tierra (mejor que  $\mathbf{H}^3$  o  $\mathbf{R}^3$ ). Entre los candidatos para modelos métricos del universo físico están: el espacio euclideo  $\mathbf{R}^2$ , el espacio hiperbólico  $\mathbf{H}^3$ , la esfera de dimensión tres  $S^3 \subset \mathbf{R}^4$  o incluso alguna variedad con una estructura modelada en ellos. Probablemente deban considerarse otras geometrías. N. Lobachevsky y K. F. Gauss, intentaron aclarar esta cuestión sin éxito [4]. Construyendo triángulos de grandes dimensiones y tratando de determinar si la suma de sus ángulos internos era menor que  $\pi$  (lo que diría que el Teorema 4.1 se cumple en la naturaleza). El margen de error en sus mediciones no fué suficientemente pequeño para garantizar la certeza de la respuesta. Actualmente podemos decir que si en efecto el universo físico puede modelarse en una tres variedad hiperbólica, el tamaño de tal objeto es tan grande, con respecto a nuestra pequeña vecindad del universo observable, que no ha sido posible probar que posee una geometría hiperbólica.

Apéndice 1. Comparando las geometrías euclídeana e hiperbólica.

	<i>Geometrías</i>	
	Euclídeana	Hiperbólica
Espacio.	$\mathbf{R}^2$ ( $\cong \mathbf{C} = \{z = x + iy\}$ )	$\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid  z  < 1\}$
Rectas.	Lineas rectas usuales en $\mathbf{R}^2$ .	Arcos de círculo y segmentos de rectas ortogonales a la frontera de $\Delta$ .
Paralela a una recta por un punto exterior.	Existe y es única.	Existe una infinidad.
Isometrías.	Composición de un número finito de reflexiones en rectas.	Composición de un número finito de inversiones en arcos de círculos y/o reflexiones en segmentos de rectas como antes.
Isometrías que preservan la orientación.	$\{T(z) = e^{i\theta}z + a \mid \theta \in [0, 2\pi), a \in \mathbf{C}\}$	$\{T(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \mid \theta \in [0, 2\pi), a \in \Delta\}$
Homogeneidad.	Es homogéneo, para todo $a, b \in \mathbf{C}$ existe una isometría $T$ con $T(a) = b$ .	Es homogéneo, para todo $a, b \in \Delta$ existe una isometría $T$ con $T(a) = b$ .
Isotropía.	Es isotrópico, para todo $a \in \mathbf{C}$ las isometrías $T$ con $T(a) = a$ son tantas como rotaciones $\{R(z) = e^{i\theta}z \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$ .	Es isotrópico, para todo $a \in \Delta$ las isometrías $T$ con $T(a) = a$ son tantas como rotaciones $\{R(z) = e^{i\theta}z \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$ .
Distancia.	$d(z, w) =  z - w $	$d_{hip}(z, w) = \log\left(\frac{ 1-z\bar{w}  +  z-w }{ 1-z\bar{w}  -  z-w }\right)$
Topología inducida por la distancia.	La usual en $\mathbf{R}^2$ .	La usual en $\mathbf{R}^2$ .
Producto punto.	$dx^2 + dy^2$	$\frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$
Geodésicas.	Lineas rectas usuales en $\mathbf{R}^2$ .	Arcos de círculos y segmentos de rectas ortogonales a la frontera de $\Delta$ .
Longitud de las geodésicas.	Infinita.	Infinita.
Forma de medir ángulos.	La usual como en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{C}$ .	La usual como en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{C}$ .

Suma de los ángulos de triángulos.	$\pi$	Menor ó igual a $\pi$ .
Existencia de rectángulos.	Si existen.	No existen.
Existencia de $n$ -ágonos con ángulos rectos, $n \geq 5$ .	No existen.	Si existen.
Elemento de área.	$dx dy$	$\frac{4dx dy}{(1-x^2-y^2)^2}$
Área de triángulos.	No acotada.	Acotada, menor o igual a $\pi$ .
Longitud de una circunferencia de radio $r$ .	$2\pi$	$2\pi \operatorname{senh}(r)$ ( $r$ en unidades hiperbólicas. )
Área de un disco de radio $r$ .	$\pi r^2$	$2\pi[\cosh(r) - 1]$ ( $r$ en unidades hiperbólicas. )
Área total.	Infinita.	Infinita.
Curvatura.	Cero.	Constante negativa $-1$ .
Superficies que pueden modelarse en esta geometría.	El plano, el cilindro, la banda de Möbius, el toro, la botella de Klein.	Con 4 excepciones: el toro, la botella de Klein, la esfera y el plano proyectivo; toda superficie puede modelarse.

Apéndice 2. Comparando dos modelos de la geometría hiperbólica.

	Modelos	
	El disco $\Delta$	El medio plano $\mathbf{H}^2$
Espacio.	$\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid  z  < 1\}$	$\mathbf{H}^2 = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$
Rectas.	Arcos de círculos y segmentos de rectas ortogonales a la frontera del disco.	Arcos de círculo y segmentos de rectas ortogonales a la frontera del medio plano.
Paralela a una recta por un punto exterior.	Existe una infinidad.	Existe una infinidad.
Isometrías.	Composición de un número finito de inversiones en arcos de círculos y/o reflexiones en segmentos de rectas como antes.	Composición de un número finito de inversiones en arcos de círculos y/o reflexiones en segmentos de rectas como antes.
Isometrías que preservan la orientación.	$\{T(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \mid \theta \in [0, 2\pi), a \in \Delta\}$	$\{T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc = 1\}$
Distancia.	$d_{hip}(z, w) = \log\left(\frac{ 1-z\bar{w}  +  z-w }{ 1-z\bar{w}  -  z-w }\right)$	$d_{hip}(z, w) = \text{arccosh}\left(1 + \frac{ w-z ^2}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)}\right)$
Topología inducida por la distancia.	La usual en $\mathbf{R}^2$ .	La usual en $\mathbf{R}^2$ .
Producto punto.	$\frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$	$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$
Geodésicas.	Arcos de círculos y segmentos de rectas ortogonales a la frontera del disco.	Arcos de círculos y segmentos de rectas ortogonales a la frontera del medio plano.
Longitud de las geodésicas.	Infinita.	Infinita.
Forma de medir ángulos.	La usual como en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{C}$ .	La usual como en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{C}$ .
Suma de los ángulos de triángulos.	Menor ó igual a $\pi$ .	Menor ó igual a $\pi$ .
Elemento de área.	$\frac{4dxdy}{(1 - x^2 - y^2)^2}$	$\frac{dxdy}{y^2}$
Área total.	Infinita.	Infinita.
Curvatura.	Constante negativa $-1$ .	Constante negativa $-1$ .

### Apéndice 3. Breve cronología de la geometría hiperbólica.

300 a. C., Euclides, introduce en sus "Elementos" el 5° postulado: la existencia de una única paralela por un punto exterior a una recta.

1667–1733, G. Saccheri, introduce para probar el 5° postulado la idea de suponerlo falso y buscar una contradicción en el resto de la geometría euclideana. [2] pág. 22.

1829, N. Lovachevski, publica su construcción de la geometría hiperbólica. [2], [3], [4].

1832, J. Bolyai, publica su construcción de la geometría hiperbólica. [2], [4].

1777–1855, K. F. Gauss, trabaja en los fundamentos de geometría hiperbólica, sin embargo no publica sus resultados.

1826–1866, B. Riemann, calcula en  $6^g - 6$  el número de parámetros reales que describen todas las superficies de Riemann compactas de género  $g \geq 2$ . Como consecuencia del teorema de uniformización, este número coincide con el número de parámetros reales del espacio de estructuras hiperbólicas en una superficie compacta orientable de género  $g \geq 2$ . [9] p. 255–256, [19].

1854, B. Riemann, extiende la geometría diferencial de superficies (variedades de dimensión dos) en  $\mathbf{R}^3$  a variedades de dimensión  $n$ , para  $n \geq 3$ . [12] vol. 2.

1868, E. Beltrami, clarifica las ideas de Riemann en geometría diferencial estableciendo que: el espacio hiperbólico de dimensión  $n$  puede identificarse como una  $n$  variedad riemanniana simplemente conexa, geodésicamente completa, de curvatura seccional  $-1$ . [5] pág. 41, [12] vol. 4.

1871, F. Klein, introduce su modelo proyectivo para el plano hiperbólico. [4].

1872, F. Klein, en el llamado programa de Erlangen, introduce la idea de clasificar las geometrías en términos de sus grupos de transformaciones.

1882, H. Poincaré, construye enlosados del plano hiperbólico, por polígonos hiperbólicos isométricos entre sí, como herramienta en problemas de análisis. Para ello usa el modelo del medio plano. [5] pág. 123.

1891, W. Killing, relaciona el problema de clasificar las variedades de dimensión  $n$  con curvatura seccional constante con el problema de hallar grupos discretos y libres de isometrías en la esfera, el espacio euclideano o el espacio hiperbólico, de dimensión  $n$ . [4].

1901, D. Hilbert, muestra que el plano hiperbólico no es isométrico a alguna superficie  $C^\infty$  en  $\mathbf{R}^3$ . [8] pág. 446.

1907, H. Poincaré y P. Koebe, prueban el teorema de uniformización. Toda superficie de Riemann tiene como cubierta universal: a la esfera de Riemann, el plano complejo o el disco hiperbólico. [1], [18].

1937, E. Hopf, muestra que el flujo geodésico de una superficie hiperbólica compacta es ergódico. [20], [24], [26].

1970, S. Kobayashi, usando encajes del disco hiperbólico en variedades complejas, construye métricas en variedades complejas, descubriendo una nueva noción de "hiperbolicidad" para variedades complejas. [28], [29].

1970, G. Mostow, prueba el teorema de rigidez: si dos variedades hiperbólicas compactas de dimensión  $n$  (para  $n \geq 3$ ), tienen grupos fundamentales isomorfos entonces son isométricas entre sí. [13], [17], [31].

1976, W. Thurston, aplica la geometría hiperbólica al problema de clasificar los difeomorfismos de superficies. [21], [36].

1977, W. Thurston, aplica la geometría hiperbólica en la búsqueda de estructuras geométricas naturales en variedades de dimensión tres. [17], [18], [33], [35].

1987, M. Gromov, descubre el concepto de grupo hiperbólico y lo aplica a la construcción de ejemplos y contraejemplos en variedades hiperbólicas. [22], [23], [25].

### Referencias.

(Aunque no todos los títulos están citados en el texto, se incluyen aquí como una guía.)

### Historia:

- [1] W. Abikoff: *The uniformization theorem*. American Mathematical Monthly 88 (1981) 574–592.
- [2] D. Gans: *An Introduction to Non-Euclidean Geometry*. Academic Press (1973).
- [3] V. F. Kagan: *Lobachevski*. Mir (1986).
- [4] J. Milnor: *Hyperbolic geometry: The first 150 years*. Bull. Amer. Math. Soc. vol. 6 núm. 1 (1982) 9–24.
- [5] J. Stillwell: *Sources of Hyperbolic Geometry*. American Mathematical Society (1996).

### Textos:

- [6] L. V. Ahlfors: *Complex analysis*. Third Edition McGraw-Hill (1979).
- [7] A. F. Beardon: *The Geometry of Discrete Groups*. Springer Verlag (1983).
- [8] M. P. Do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall (1976).
- [9] Ph. Griffiths, J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley (1978).
- [10] S. G. Krantz: *Complex Analysis: The Geometric Viewpoint*. The Mathematical Association of America (1990).
- [11] H. Schwerdtfeger: *Geometry of Complex Numbers*. Dover (1979).
- [12] M. Spivak: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. 5 vols. Publish or Perish (1970).

### Textos de geometría hiperbólica:

- [13] R. Benedetti, C. Petronio: *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Springer Verlag (1992).
- [14] W. Frenkel: *Elementary Geometry in Hyperbolic Space*. Walter de Gruyter (1989).
- [15] B. Iversen: *Hyperbolic Geometry*. Cambridge University Press (1992).
- [16] E. Rees: *Notes on Geometry*. Springer Verlag (1988).
- [17] W. Thurston: *Three-Dimensional Geometry and Topology*. vol. 1 Edited by S. Levy. Princeton University Press (1977).

- [18] A. Verjovsky: *Introducción a la Geometría y Variedades Hiperbólicas*. Sexta Escuela Latinoamericana de Matemáticas. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (1982).

**Artículos panorámicos e investigación contemporánea:**

- [19] W. Abikoff: *The Real Analytic Theory of Teichmüller space*. SLN núm. 820, Springer Verlag (1980).
- [20] T. Bedford, M. Keane, C. Series (Eds): *Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces*. Oxford University Press (1991).
- [21] A. J. Casson, S. A. Bleiler: *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston*. Cambridge University Press (1988).
- [22] E. Ghys, P. de la Harpe (editores): *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Birkhäuser (1990).
- [23] E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky (editores): *Group Theory from a Geometrical Viewpoint*. World Scientific (1991).
- [24] X. Gómez-Mont: *Flujo geodésico*. En estas memorias.
- [25] M. Gromov: *Hyperbolic groups*. En: *Essays in Group Theory*, S. M. Gerstein (editor), Springer Verlag (1987) 75-263.
- [26] E. Hopf: *Ergodic theory and the geodesic flow on surfaces of constant negative curvature*. Bull. of the American Math. Society 77 (1971) 863-877.
- [27] R. Kellerhals: *Shape and size through hyperbolic eyes*. The Mathematical Intelligencer 17 (1995) 21-30.
- [28] S. Kobayashi: *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*. Marcel Dekker (1970).
- [29] S. Lang: *Introduction to Complex Hyperbolic Spaces*. Springer Verlag (1987).
- [30] R. Meyerhoff: *Geometric invariants for 3-manifolds*. The Mathematical Intelligencer 14 (1992) 37-53.
- [31] G. D. Mostow: *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces*. Princeton University Press (1973).
- [32] R. C. Penner: *Combinatorics of Train Tracks*. Princeton University Press (1992).
- [33] P. Scott: *The geometries of 3-manifolds*. Bulletin London Mathematical Society 15 (1983), 401-487.
- [34] D. P. Sullivan: *Notes on conformal and hyperbolic geometry*. Notes by M. Baker and J. Seade. IHES 1982.
- [35] W. Thurston: *The geometry and topology of 3-manifolds* Notas, Princeton University (1977).
- [36] W. Thurston. *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*. Bulletin of the A. M. S. vol. 12 no. 2 (1988) 417-431.
- [37] A. Wawrzyńczyk: *Tres visiones del disco unitario*. Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 20 (1997) 189-206.