APORTACIONES MATEMÁTICAS
Serie Comunicaciones **20** (1997) 135–156

Integración, geometría euclidiana y campos vectoriales meromorfos

Jesús Muciño–Raymundo*
Instituto de Matemáticas UNAM, Unidad Morelia
Nicolás Romero 150, Col. Centro Morelia
58000 Michoacán, Mich.
México
correo electrónico: muciray@servidor.unam.mx

Resumen. Usando integración de funciones holomorfas se presenta una construcción elemental de diferenciales cuadráticas orientables en el plano complejo. La generalización a superficies de Riemann muestra que en toda superficie de Riemann existe una correspondencia uno a uno entre: campos vectoriales meromorfos, formas diferenciales meromorfas, diferenciales cuadráticas orientables y ciertos poliedros planos. Utilizando dichos poliedros se muestran dos resultados. Dada cualquier colección finita de números complejos no nulos cuya suma sea cero y un número entero $g \geq 0$; existe una superficie de Riemann compacta de género g con una forma diferencial meromorfa con exactamente esa colección de números como residuos. En el segundo resultado se aplican las ideas anteriores para clasificar las separatrices lisas de campos vectoriales holomorfos completos en variedades complejas. Se muestra que dichas separatrices son necesariamente copias del plano complejo o esferas de Riemann. En consecuencia; no existen campos holomorfos completos con singularidades de orden mayor o igual a tres con separatrices lisas. Ello está relacionado con resultados recientes de J. C. Rebelo [14].

1. Introducción.

El objetivo de este trabajo es introducir herramientas geométricas elementales (como son los poliedros planos bidimensionales) en el estudio de los sistemas dinámicos que provienen de campos vectoriales holomorfos o meromorfos. Como resultado de estas ideas se muestran dos aplicaciones.

El uso de estos poliedros planos está estrechamente relacionado con el hecho de que

1991 Mathematics Subject Classification: 34A20 .

* Apoyado por DGAPA-UNAM.

es posible establecer una correspondencia entre: el sistema dinámico complejo con ciertos sistemas dinámicos reales subyacentes. Dicho de forma más explícita, a un campo vectorial meromorfo se le asocian de manera natural dos campos vectoriales reales linealmente independenties y que conmutan, (con ciertas características en sus puntos singulares).

Para dar una idea de lo anterior, recordemos que las trayectorias integrales complejas de un campo vectorial meromorfo X en una variedad compleja (M, J), son superficies de Riemann. Llamemos $\mathcal{L}$ a una de esas trayectorias integrales complejas. Nuestro objetivo es considerar la restricción de la $(\mathbb{C}, +)$–acción, dada por el flujo complejo del campo X, en la superficie de Riemann $\mathcal{L}$. Es decir la $(\mathbb{C}, +)$–acción en $\mathcal{L}$ es tal que tiene como generador infinitesimal al campo meromorfo. Si identificamos la $(\mathbb{C}, +)$–acción como una $(\mathbb{R}^2, +)$–acción (usando la identificación usual $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$), obtenemos dos campos vectoriales reales en $\mathcal{L}$, que son los generadores infinitesimales de la $(\mathbb{R}^2, +)$–acción. Dicho de manera sencilla esos campos reales son la "parte real" y la "parte imaginaria" del campo vectorial meromorfo X. Si consideramos la métrica de Riemann que tiene a estos dos campos reales como marco ortonormal, obtenemos una métrica de Riemann plana en $\mathcal{L}$. De hecho en muchos casos esa métrica de Riemann es singular.

En otras palabras cada $\mathcal{L}$ puede interpretarse como un poliedro plano bidimensional, a partir de la información asociada al campo vectorial meromorfo X.

En mayor generalidad (aunque dicho de manera informal), sobre una superficie de Riemann $\mathcal{L}$ existe una correspondencia uno a uno entre:

* campos vectoriales meromorfos en $\mathcal{L}$,

* formas diferenciales meromorfas en $\mathcal{L}$,

* diferenciales cuadráticas meromorfas orientables en $\mathcal{L}$,

* ciertos poliedros planos, homeomorfos a $\mathcal{L}$ salvo cierto conjunto discreto de puntos, con singularidades adecuadas y provistos de un campo de geodésicas,

* ciertas parejas de campos vectoriales reales que conmutan en $\mathcal{L}$, con singularidades adecuadas.

Para una formulación más rigurosa ver Proposición 3.3.

En este trabajo se muestra como esta correspondencia puede usarse para explorar la existencia de campos y formas meromorfos con propiedades prescritas en variedades complejas. La virtud de tal correspondencia es que los poliedros planos son objetos fáciles de construir.

Como resultado de estas ideas se muestran dos aplicaciones de estas técnicas elementales.

El siguiente resultado puede considerarse como el inverso a el Teorema clásico del residuo para formas diferenciales meromorfas en superficies de Riemann compactas, comparar con [6] pág. 52.

4.2 Teorema. *Sea M una 2–variedad C^∞, compacta, orientable de género g. Dada una colección de números complejos no nulos $\{r_1, ..., r_i\}$, donde $i \geq 2$. Existe una estructura compleja J en M, y una forma diferencial meromorfa θ en la superficie de Riemann (M, J) con polos de multiplicidad uno cuyos residuos son $\{r_i\}$ si y sólo si se cumple $\sum r_i = 0$.*

Otra aplicación de la anterior correspondencia, para el estudio de campos vectoriales holomorfos en variedades complejas de dimensión mayor o igual a dos es como sigue. De entre todas las trayectorias integrales complejas $\{\mathcal{L}\}$ de un campo vectorial holomorfo X, aquellas que (como curvas analíticas complejas) contienen a un conjunto discreto no vacío de ceros de X, se llaman *separatrices*.

El estudio de separatrices para campos vectoriales fue propuesto por C. Briot y J. Bouquet en 1854. En 1982, C. Camacho y P. Sad mostraron en [5] que todo germen de campo holomorfo en una vecindad de $\mathbb{C}^2$ con un cero aislado en $0 \in \mathbb{C}^2$, posee al menos una separatriz. Más recientemente X. Gómez-Mont e I. Luengo han hallado germenes de campos holomorfos en $\mathbb{C}^3$ sin separtriz, ver [8]. J. Olivares–Vázquez ha construido ejemplos sin separatriz en $\mathbb{C}^{3n}$, ver también [13]. Nuestro interés es el estudio del comportamiento global de separatrices en campos holomorfos completos (esto es suponiendo que el flujo del campo vectorial está bien definido para todo tiempo complejo). El siguiente resultado sigue y en cierto aspecto amplia el trabajo de J. C. Rebelo [14].

5.2 Teorema. *Sea (M, J) una variedad compleja, X un campo vectorial, no idénticamente nulo, holomorfo, completo sobre M y $p \in M$ un cero de X, admitiendo una separatriz lisa $\mathcal{L}$ por p.*

1. *Entonces la separatriz $\mathcal{L} \subset M$ es biholomorfa a $\mathbb{C}$ o $\mathbb{C}P^1$.*
2. *Si el campo vectorial restringido $X|_{\mathcal{L}}$ tiene un cero de multiplicidad uno, entonces es salvo cambio de coordenadas $\lambda z \frac{\partial}{\partial z}$, para $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.*
3. *Si el campo vectorial restringido $X|_{\mathcal{L}}$ tiene un cero de multiplicidad dos, entonces es salvo cambio de coordendas $z^2 \frac{\partial}{\partial z}$. Además la separatriz es biholomorfa a $\mathbb{C}P^1$ y esta holomorfamente encajada en (M, J).*
4. *Un cero p de orden al menos tres para X es imposible.*

El interés en estudiar campos holomorfos completos en variedades complejas (M, J), es que su flujo está descrito por un gupo mono–paramétrico de automorfismos complejos de la variedad. En otras palabras dichos campos forman el "algebra de Lie" del grupo de automorfismos complejos de M. Cuando M es compacta lo anterior es rigurosamente cierto, ver [9] pág. 77. Si M no es compacta la situación es más complicada, su grupo de automorfismos puede ser un grupo de Lie real o incluso (dicho de manera informal) un grupo de "dimensión infinita", ver [9] cap. III.

Con el fin facilitar la lectura de este trabajo a lectores no especializados en la teoría de diferenciales cuadráticas, en la Sección 2 se presenta una construcción elemental de difererenciales cuadráticas orientables y algunos ejemplos sencillos. Utilizando para ello solamente análisis complejo en $\mathbb{C}$ y geometría diferencial elemental. En el resto del trabajo se asume familiaridad con la geometría de variedades complejas. Las Secciones 4 y 5 contienen la prueba de los dos anteriores resultados.

El autor agradece a Raúl Quiroga Barranco su invitación a participar en el XXIX Congreso Nacional de la SMM. También desea agradecer a Carlos Valero Valdéz y Jorge Luis Lopéz Lopéz por sus comentarios.

2. Integración de funciones meromorfas y geometría euclidiana.

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función meromorfa, donde Ω es abierto y conexo. Estamos interesados en estudiar la integral indefinida

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)dw : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} ,$$

donde $z_0 \in \Omega$ es un punto fijo. Describimos ahora localmente las imagenes inversas de $\mathbb{R}$ e $\sqrt{-1}\mathbb{R}$ bajo F.

2.1 Lema. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función meromorfa con $f(z_0) \neq 0, \infty$. Entonces existen dos trayectorias diferenciables $\alpha(t), \beta(s) : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \to \Omega$, con $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$, únicamente determinadas por las siguientes propiedades:*

$$F(\alpha(t)) = \int_{z_0}^{\alpha(t)} f(w)dw = t \in \mathbb{R} ,$$

$$F(\beta(s)) = \int_{z_0}^{\beta(s)} f(w)dw = \sqrt{-1}s \in \sqrt{-1}\mathbb{R} .$$

Demostración: En coordenadas $z = x + \sqrt{-1}y$, supongamos como es usual que

$$f(x + \sqrt{-1}y) = u(x, y) + \sqrt{-1}v(x, y) .$$

Definimos dos campos vectoriales reales C^∞ en $\Omega - \{\textit{ceros y polos de } f\}$:

$$\frac{1}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{u}{u^2+v^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{v}{u^2+v^2}\frac{\partial}{\partial y} ,$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{v}{u^2+v^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{u^2+v^2}\frac{\partial}{\partial y} .$$

Aquí la notación $\frac{\partial}{\partial z}$ es solo formal, en la Sección 3 se explicará más en detalle. Como $f(z_0) \neq 0, \infty$, por el Teorema de existencia y unicidad de soluciones para campos vectoriales C^∞, existen dos trayectorias diferenciables integrales de esos campos que pasan por z_0, la denotemos como $\alpha(t)$ y $\beta(s)$ respectivamente. Se tiene entonces que:

$$F(\alpha(t)) = \int_{z_0}^{\alpha(t)} f(w)dw =$$

$$\int_0^t \left(u\frac{u}{u^2+v^2} - v\frac{-v}{u^2+v^2} + \sqrt{-1}\left(v\frac{-u}{u^2+v^2} + u\frac{v}{u^2+v^2}\right)\right) dt = \int_0^t dt = t\ .$$

El cálculo para $\beta(s)$ es análogo. □

Nuestro segundo objetivo es obtener a partir de dicha familia de trayectorias una geometría euclidiana.

2.2 Corolario. *Si $f(z_0) \neq 0, \infty$, hay una vecindad abierta de z_0 en Ω tal que las trayectorias integrales de*

$$\frac{1}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z} \quad y \quad \frac{\sqrt{-1}}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}$$

son enviadas bajo F (que es un difeomorfismo local en z_0) a las lineas horizontales y verticales en $\mathbb{C}$ cerca de 0, respectivamente.

Para examinar en más detalle $F(z)$ consideremos la siguiente construcción:

Partiendo de $z_0 \in \Omega$ translademonos un tiempo $t \geq 0$ usando de la trayectoria α, definiendo $z_1 = \alpha(t)$. Suponiendo que $f(z_1) \neq 0, \infty$ es posible considerar de nuevo dos trayectorias α y β como en el Lema por z_1. Translademonos ahora un tiempo $s \geq 0$, siguiendo la trayectoria β por z_1, llamemos $z_2 = \beta(s)$. Suponiendo que $f(z_2) \neq 0, \infty$ repetimos la construcción usando la correspondiente trayectoria α, pero considerando el tiempo negativo $-t$, así definimos $z_3 = \alpha(-t)$. Finalmente, si $f(z_3) \neq 0, \infty$, definimos $z_4 = \beta(-s)$, para la correspondiente β por z_3.

¿ Hemos regresado al punto de partida, i.e. $z_0 = z_4$?

Para poder garantizar que en efecto la trayectoria se ha cerrado, basta suponer que los tiempos t y s son suficientemente pequeños.

2.3 Lema. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ función meromorfa con $f(z_0) \neq 0, \infty$. Entonces, existen dos números reales positivos ϵ, δ, para los cuales:*

1. *Toda trayectoria construida como antes en Ω' para tiempos $0 \leq t \leq \epsilon$, $0 \leq s \leq \delta$ como antes se cierra, i.e. $z_0 = z_4$.*
2. *Los campos vectoriales:*

$$\frac{1}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z} \quad y \quad \frac{\sqrt{-1}}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

conmutan.

Demostración: Como F es localmente una función holomorfa y $F'(0) = f(z_0) \neq 0, \infty$, por el teorema de la función inversa es uno a uno en una vecindad de z_0. Por otra parte

$$F(z_4) = t + \sqrt{-1}s - t - \sqrt{-1}s = 0 = F(z_0)\ ,$$

lo que implíca 1. Es bien sabido que 1 y 2 son equivalentes, pues esa es la interpretación usual cuando se anula el conmutador de campos vectoriales reales, ver [15] vol. I pág. 221. Una prueba directa de 2 es calculando el conmutador,

$$[\frac{1}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\sqrt{-1}}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}] \, .$$

Es fácil agrupar el resultado de tal forma que dependa de la ecuaciones de Cauchy–Riemann para $1/f(z)$. □

Dados ϵ , δ números como antes, denotamos por $\mathcal{R} \subset \Omega$ a cualquier conjunto cerrado delimitado por dos segmentos de trajectorias integrales de $\frac{1}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}$ y dos segmentos de trajectorias integrales de $\frac{\sqrt{-1}}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}$, como antes. A este tipo de conjuntos los llamaremos *rectángulos.* Este nombre se justifica por el siguiente:

2.4 Lema. *En cada rectángulo* $\mathcal{R}$ *existe una métrica* d_f, *tal que* $(\mathcal{R}, d_f)$ *es isométrico al rectángulo* $[0,\epsilon] \times [0,\delta] \subset \mathbb{R}^2$ *provisto con la métrica euclidiana usual.*

Demostración: Si $|\ |$ denota la norma usual de números complejos, definimos la nueva métrica d_f en $\mathcal{R}$ como:

$$d_f(z,z') = |\int_\gamma f(w)dw| = \sqrt{t^2+s^2} \ ,$$

para γ cualquier trayectoria diferenciable por pedazos contenida en $\mathcal{R}$ que une z con z'. Donde:

t es el tiempo necesario en trayectorias del campo vectorial $\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial z}$,

s es el tiempo necesario en trayectorias del campo vectorial $\frac{\sqrt{-1}}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}$,

para transladarse de z a z'.

La isometría queda definida de manera elemental como:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R} \subset \Omega \rightarrow & & [0,\epsilon] \times [0,\delta] \subset \mathbb{R}^2 \\ z & \mapsto & \left(Re(\int_{z_0}^{z} f(w)dw), Im(\int_{z_0}^{z} f(w)dw)\right) \end{array} ,$$

donde Re, Im denotan las partes real e imaginaria en cualquier número complejo, y z_0 es la "esquina" de $\mathcal{R}$ como al principio de la sección. □

Cada rectángulo $(\mathcal{R}, d_f)$ posee de manera natural los siguientes atributos.

* Alto y ancho (dados por ϵ y δ respectivamente).

* Dos familias de trayectorias:

las *trayectorias horizontales* (trayectorias integrales del campo $\frac{1}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}$),

las *trayectorias verticales* (trayectorias integrales del campo $\frac{\sqrt{-1}}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}$).

Nuestro objetivo ahora es hacer a $\Omega - \{polos\ y\ ceros\ de\ f\}$ espacio métrico.

Sea γ una trayectoria en $\Omega - \{polos\ y\ ceros\ de\ f\}$ diferenciable por pedazos. Como es usual usando la métrica local en 2.4 definimos la *d_f–longitud de una trayectoria* $\gamma : [0, T] \to \Omega - \{polos\ y\ ceros\ de\ f\}$, que sea diferenciable por pedazos; considerando una partición de γ en trozos contenidos en rectángulos, midiendo la longitud de cada trozo usando la métrica del rectángulo correspondiente (como en 2.4), y finalmente sumando las longitudes de los trozos para obtener la d_f-longitud de γ.

2.5 Corolario. *Para $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función meromorfa, existe en $\Omega - \{polos\ y\ ceros\ de\ f\}$ una distancia definida como:*

$$d_f(z, z') = \inf_{\gamma}\{d_f - longuitud\ de\ \gamma\} ,$$

donde el infimo se considera sobre todas las trayectorias en $\Omega - \{polos\ y\ ceros\ de\ f\}$ diferenciables por pedazos que unen z con z'.

Demostración: Por ejemplo para mostrar que $d_f(z, z') = 0$ si y sólo si $z = z'$ se consideran dos casos. Cuando ambos puntos están contenidos en un mismo rectángulo el resultado es ovio. Cuando no estan contenidos en un mismo réctangulo es fácil ver que la distancia entre ambos puntos es positiva, pues la d_f–longuitud de cualquier trayectoria (con punto inicial z), que sale de un rectángulo que contiene a z en su interior es estrictamente positiva. El resto de la prueba se deja al lector interesado. □

Es también útil describir la métrica d_f usando g_f una métrica de Riemann C^∞ en $\Omega - \{polos\ y\ ceros\ de\ f\}$, tal que con respecto al marco $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ tiene como matriz:

$$g_f = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 \end{pmatrix} .$$

Para ella resulta que los campos $\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\sqrt{-1}}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}$ son unitarios y ortogonales entre sí.

2.6 Corolario. *La curvatura de g_f es idénticamente cero. Las trayectorias integrales de los campos vectoriales reales rotados*

$$e^{\sqrt{-1}\phi} \frac{1}{f(x)} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{u^2 + v^2} \left[(ucos\phi - vsen\phi) \frac{\partial}{\partial x} + (-usen\phi - vcos\phi) \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

para todo $0 \leq \phi \leq 2\pi$, son geodésicas de velocidad unitaria para g_f. En particular las trayectorias horizontales y verticales son geodésicas de velocidad unitaria.

Demostración: Como los campos forman un marco ortonormal y conmutan un resultado bien conocido, ver [15] vol. II pág. 261, establece que la curvatura de esta métrica de Riemann es cero. El mostrar que son geodésicas es un cálculo directo usando la conexión Riemanniana asociada. Sin embargo una prueba elemental utiliza que las imagenes de las trayectorias de

$$e^{\sqrt{-1}\phi}\frac{1}{f(x)}\frac{\partial}{\partial z}$$

bajo F son lineas rectas de velocidad unitaria en $\mathbb{R}^2$, ver la prueba de 2.4, de esta observación el resultado sigue. □

En todo lo que sigue utilizaremos sin distinción la métrica d_f ó la métrica de Riemann g_f en $\Omega - \{polos\ y\ ceros\ de\ f\}$.

Dada f una función meromorfa nuestro interés es describir más explícitamente la métrica d_f en $\Omega - \{polos\ y\ ceros\ de\ f\}$. Basta observar que cada vez que dos rectángulos en $\Omega - \{polos\ y\ ceros\ de f\}$ son adyacentes (esto es su intersección esta dada por un trozo de trayectoria horizontal o vertical), entonces podemos decir que ambos están pegados entre sí por una isometría. Por lo que es posible interpretar esos rectángulos como caras de un poliedro. Es posible escribir

$$\Omega - \{polos\ y\ ceros\ de\ f\} = \cup_\iota \mathcal{R}_\iota\ ,$$

como una colección de rectángulos $\{\mathcal{R}_\iota\}$ pegados entre sí por isometrías entre sus lados. Donde si dos de ellos se intersectan lo hacen en un trozo de trayectoria. Esto es lo que llamamos un *poliedro*. Ver [11] para mayores detalles en este tipo de construción desde un punto de vista elemental.

Resumiendo en $\Omega \subset \mathbb{C}$ se ha establecido una correspondencia uno a uno entre:

* Campos vectoriales meromorfos:

$$\frac{1}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}\ .$$

* Formas diferenciales meromorfas:

$$f(z)dz\ .$$

* Parejas de campos vectoriales reales que conmutan:

$$\frac{u}{u^2+v^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{v}{u^2+v^2}\frac{\partial}{\partial y}\ ,\quad \frac{v}{u^2+v^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{u^2+v^2}\frac{\partial}{\partial y}\ .$$

* Poliedros planos $\Omega - \{ceros\ y\ polos\ de\ f\}$ con métrica

$$g_f = \begin{pmatrix} u^2+v^2 & 0 \\ 0 & u^2+v^2 \end{pmatrix}\ ,$$

provistos de un campo vectorial geodésico unitario

$$\frac{u}{u^2+v^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{v}{u^2+v^2}\frac{\partial}{\partial y}\ .$$

A continuación vamos a construir en algunos ejemplos explícitos de la correspondencia. Daremos ejemplos de formas diferenciales meromorfas, describiendo a partir de ellas su poliedro asociado y su campo geodésico.

2.7 Ejemplo. Para $c = a + \sqrt{-1}b \in \mathbb{C} - \{0\}$, sea la forma diferencial $f(z)dz = (a + \sqrt{-1}b)dz$ en $\Omega = \mathbb{C}$. El espacio métrico $(\mathbb{C}, d_f)$ es isométrico a $\mathbb{R}^2$. El campo vectorial geodésico asociado es

$$\frac{a}{a^2+b^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{b}{a^2+b^2}\frac{\partial}{\partial y}$$

cuyas trayectorias son rectas con pendiente igual a $-arg(c)$.

2.8 Ejemplo. Sea $f(z)dz = zdz$ en $\Omega = \mathbb{C}$. El espacio métrico $(\mathbb{C}, d_f)$ es el que resulta de unir cuatro copias del medio plano euclideano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ mediante isometrías, para formar un disco topológico, ver [11] para más detalles. El campo vectorial geodésico asociado es

$$\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}$$

en $\mathbb{C}$. Es fácil ver que las trayectorias de este campo forman hipérbolas cuyas asintotas son los ejes coordenados x, y en $\mathbb{C}$.

2.9 Ejemplo. Sea $f(z)dz = dz/z$ en $\Omega = \mathbb{C}$. El espacio métrico $(\mathbb{C} - \{0\}, d_f)$ es isométrico al cilindro $S^1_{2\pi} \times \mathbb{R}$, donde el subíndice 2π es la longitud del círculo. El campo vectorial geodésico asociado es

$$-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

en $\mathbb{C}$. Es fácil ver que las trayectorias del campo son círculos con centro en el origen en $\mathbb{C}$, mismas que pueden intrepretarse como geodésicas cerradas en el cilindro $S^1_{2\pi} \times \mathbb{R}$.

Nuestro primer ejemplo no trivial es:

2.10 Ejemplo. Sea

$$f(z)dz = \frac{dz}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}$$

en $\Omega = \mathbb{C}$ y donde los a_i son números complejos distintos entre sí. Afirmamos que el espacio métrico $(\mathbb{C} - \{a_1, a_2, a_3\}, d_f)$ puede construirse como sigue. Existe T un triángulo eculidiano (que de hecho depende de los números a_i, ver Lema 4.1), tal que si identificamos los tres vértices del triángulo, obtenemos una superficie homeomorfa a una esfera menos tres discos abiertos. Podemos pegar ahora a la frontera de cada disco un cilindro infinito de la forma $S^1 \times [0, \infty)$. Obteniendo una superficie homeomorfa a la esfera de Riemann menos 3 puntos, provista de la estructura poliedrica que viene de la métrica plana en el triángulo y los cilindros. Los tres puntos correspondientes a las puntas del cilindro provienen de los puntos $\{a_1, a_2, a_3\}$ en $\mathbb{C}$. El punto en el que se han identificado los vértices correspondera al punto al infinito para $\mathbb{C}$.

Los anteriores ejemplos poseen solo polos y ceros de orden uno. Para el caso de una singularidad esencial en el campo meromorfo la complejidad del poliedro respectivo se incrementa notablemente.

2.11 Ejemplo. Sea $f(z)dz = dz/e^z$ en $\mathbb{C}$. El espacio métrico $(\mathbb{C}, d_f)$ en este caso viene de pegar una infinidad de copias del medio plano euclideano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$, el segmento positivo del eje x en cada copia, con el negativo del eje x en la otra copia, mediante isometrías. Las trayectorias horizontales son las trayectorias del campo vectorial

$$e^x cosy \frac{\partial}{\partial x} + e^x seny \frac{\partial}{\partial y}$$

en $\mathbb{C}$.

3. Correspondencia entre: formas diferenciales meromorfas, campos vectoriales meromorfos y poliedros.

Sea M una 2–variedad C^∞ orientable y paracompacta. Si TM denota el haz tangente C^∞ de M, una estructura compleja en M es un endomorfismo C^∞, $J : TM \to TM$ tal que $J^2 = -1$. Una superficie de Riemann es una pareja (M, J). Sobre cada superficie de Riemann (M, J) tenemos los siguientes haces de linea holomorfos: $T'M$ el haz tangente holomorfo y T^*M el haz canónico, también llamado haz cotangente holomorfo. Los campos vectoriales meromorfos en (M, J) son las secciones meromorfas de $T'M$, localmente se escriben como $h(z)\frac{\partial}{\partial z}$, para $\{z\}$ una coordenada holomorfa en (M, J) y $h(z)$, una función meromorfa. Recordemos que si $\{z\}$ y $\{w\}$ son dos coordenadas locales en (M, J) con función de transcisión $w = T(z)$. Para

$$\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{y} \quad \frac{1}{g(w)} \frac{\partial}{\partial w}$$

dos campos vectoriales meromorfos con respecto a esas cartas coordenadas, ambos campos son expresiones locales del mismo campo vectorial en (M, J) cuando

$$\frac{1}{g(w)} = \frac{1}{f(z)} T'(z) \; .$$

Conviene aclarar que en todo el trabajo se utiliza el hecho de que en una superficie de Riemann (M, J) es posible identificar los campos vectoriales meromorfos con ciertos campos vectoriales reales C^∞ como sigue. Sea X un campo vectorial meromorfo, entonces existe un único G campo vectorial real C^∞ (bien definido fuera de los polos de X), determinado por la correspondencia:

$$\begin{array}{rcl} G & \to & X = \frac{1}{2}(G - \sqrt{-1}JG) \\ G = X + \overline{X} & \leftarrow & X \; . \end{array}$$

donde $\overline{X}$ es el campo conjugado. Lo anterior en coordenadas locales $z = x + \sqrt{-1}y$ puede escribirse como:

$$G(x,y) = u(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + v(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \quad \leftrightarrow \quad X(z) = \left(u(x,y) + \sqrt{-1}v(x,y)\right)\frac{\partial}{\partial z} ,$$

donde u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann. Al referirnos a las trayectorias de un campo meromorfo X siempre entenderemos que estamos hablando de las trayectorias reales del campo real asociado G.

Las formas diferenciales meromorfas en (M, J) son las secciones meromorfas de T^*M y localmente se escriben como $f(z)dz$.

Recordemos que si $\{z\}$ y $\{w\}$ son dos coordenadas locales en (M, J) con función de transcisión $z = T^{-1}(w)$. Dos formas diferenciales meromorfas $f(z)dz$ y $g(w)dw$ con respecto a esas coordenadas locales, son expresiones locales de la misma forma meromorfa en (M, J) cuando

$$g(w) = f(T^{-1}(w))[T^{-1}]'(w) .$$

La correspondencia local entre campos y formas:

$$f(z)dz \leftrightarrow \frac{1}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}$$

en la prueba del Lema 2.1, se generaliza a superficies de Riemann, basta considerar las funciones de transición en (M, J) y transformar ambas representaciones locales a una nueva carta. Esto es

$$\frac{1}{g(w)} = \frac{1}{f(z)}T'(z) ,$$

es equivalente con

$$g(w) = f(z)[T'(z)]^{-1} ,$$

mismo que por el Teorema de la función inversa es equivalente a

$$g(w) = f(T^{-1}(w))[T^{-1}]'(w) .$$

Conviene reflexionar que la anterior correspondeencia entre campos vectoriales y uno formas diferenciales es posible gracias a: la estructura de campo en $\mathbb{C}$ y a la sencilla forma del Teorema de la función inversa. Dicha correspondencia también existe en uno variedades reales C^∞.

Una consecuencia importante de lo anterior es que para $\theta = \{f(z)dz\}$ una forma meromorfa en (M, J), es posible introducir una estructura poliedrica d_θ en $M^0 = M - \{\textit{polos y ceros de } \theta\}$, mediante las ideas de la Sección 2. Con los siguientes atributos:

* (M^0, d_θ) es un espacio métrico localmente euclideano.

* M^0 posee una foliación real no singular que esta dada por las trayectorias reales en M^0 del campo vectorial $X = \{\frac{1}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}\}$.

* Las anteriores trayectorias son geodésicas de velocidad unitaria con respecto a la métrica d_θ.

Con el fin de establecer la correspondencia que nos interesa necesitamos:

primero; describir el concepto de diferencial cuadrática orientable,

segundo; describir el comportamiento de las métricas d_θ y las foliaciones por trayectorias de $\{\frac{1}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}\}$, en una vecindad de polos y ceros de θ.

Recordemos que las secciones meromorfas del haz de linea holomorfo $T^*M \otimes T^*M$, se conocen como diferenciales cuadráticas meromorfas y localmente pueden escribirse como $k(z)dz^2$, ver [16] p. 16 para mayores detalles en esta descripción.

Recordemos que si $\{z\}$ y $\{w\}$ son dos coordenadas locales en (M, J) con función de transcisión $z = T^{-1}(w)$. Dos diferenciales cuadráticas meromorfas $f(z)dz^2$ y $g(w)dw^2$ con respecto a esas coordenadas locales , entonces ambos objetos son expresiones locales de la misma diferencial cuadrática meromorfa en (M, J) cuando

$$g(w) = f(T^{-1}(w))([T^{-1}]'(w))^2 \ .$$

Dada $\theta = \{f(z)dz\}$ una sección meromorfa de T^*M podemos definir una sección $\theta \otimes \theta$ de $T^*M \otimes T^*M$, mediante la regla local:

$$f(z)dz \to f(z)dz \otimes f(z)dz = f(z)^2dz^2 \ .$$

La prueba de que está bien definida es análoga al caso de formas y campos, usando las funciones de transición de (M, J) y aplicando la ley de transformación de dz^2. A las diferenciales cuadráticas meromorfas que tienen como "raíz cuadrada" a una forma diferencial meromorfa (globalmente definida en (M, J)) se les conoce como *orientables.* Es un ejercicio mostrar que una diferencial cuadrática meromorfa es orientable si y sólo si sus trayectorias horizontales son orientables (ver la definición de trayectorias horizontales para diferenciales cuadráticas arbitrarias en [16] pág. 16).

Si consideramos el poliedro asociado a $\theta = \{f(z)dz\}$ (o equivalentemente a $X = \{\frac{1}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}\}$), dicho poliedro define el mismo espacio métrico que el proveniente de la métrica plana asociada a la diferencial cuadrática $\{f(z)^2dz^2\}$. Basta recordar que para calcular la métrica de la diferencial cuadrática clásicamente se usa la primera igualdad en:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \sqrt{f(w)^2}dw = \int_{z_0}^{z} f(w)dw \ ,$$

ver [16] pág. 20. En el caso de una diferencial cuadrática que posee una raíz cuadrada, reduce como en la segunda igualdad dando la construcción considerada en la Sección 2. Como las trayectorias reales del campo $\frac{1}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}$ tienen una orientación global entonces las trayectorias horizontales de $f(z)^2dz^2$ también, y obtenemos una diferencial cuadrática meromorfa orientable.

Utilizamos ahora la teoría de diferenciales cuadráticas meromorfas para describir: las métricas y la topología de las trayectorias horizontales cerca de los polos y ceros. Nos será útil para las siguientes secciones tener los enunciados en términos de campos vectoriales.

3.1 Proposición. *Sea $h(z)\frac{\partial}{\partial z}$ un campo vectorial meromorfo en una vecindad abierta de $0 \in \mathbb{C}$.*

1. *Si $h(z)\frac{\partial}{\partial z}$ tiene un cero de orden uno, existe un cambio holomorfo local de coordenadas tal que lo hace equivalente con $\lambda z\frac{\partial}{\partial z}$, donde $\lambda = h'(0)$.*
2. *Si $h(z)\frac{\partial}{\partial z}$ tiene un cero de orden $s \geq 2$, existe un cambio holomorfo local de coordenadas tal que lo hace equivalente con $(\lambda z + z^s)\frac{\partial}{\partial z}$, donde $\lambda = h'(0)$.*
3. *Si $h(z)\frac{\partial}{\partial z}$ tiene un polo de orden $-k \leq -1$ existe un cambio holomorfo local de coordenadas tal que lo hace equivalente con $z^{-k}\frac{\partial}{\partial z}$.*

Demostración: La idea de la prueba es muy natural. Se propone un cambio holomorfo de coordenadas local de la forma $w = a_1 z + a_2 z^2 + ...$ y se aplica al campo vectorial (también expresado en series de potencias). Estudiando como se simplifica la serie de potencias del campo, para un cambio holomorfo adecuado.

El lector puede consultar las siguientes referencias. Los casos 1 y 2 se discuten en [2]. Los casos $1-3$ sigen transformando el campo en una diferencial cuadrática meromorfa $dz^2/h(z)^2$ y aplicando el cambio de coordendas se obtiene una clasificación de trayectorias de diferenciales cuadráticas, ver [16] pág. 29–31. □

Para describir la geometría y topología de polos y ceros necesitamos las siguientes definiciones. Considere en la esfera de Riemann $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, el medio plano $\mathcal{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) \geq 0\} \cup \{\infty\}$ provisto de la métrica euclidiana usual en $\mathbb{C}$. Decimos que dicha métrica es singular en ∞. Consideremos la foliación real (singular en ∞) definida por las trayectorias del campo vectorial $\frac{\partial}{\partial x}$ en $\mathcal{H}^2$. Un *sector hiperbólico plano* es una vecindad abierta de $0 \in \mathcal{H}^2$ (que no contenga a ∞). Dicho sector es un espacio métrico localmente euclideano con frontera y posee una foliacion (no singular) por geodésicas. Un *sector eliptico plano* es una vecindad abierta en $\mathcal{H}^2$ de ∞ (que no contenga a 0). Dicho sector es un espacio métrico localmente euclideano con frontera y posee una foliación singular por geodésicas.

3.2 Corolario. *Sea $h(z)\frac{\partial}{\partial z}$ un campo vectorial meromorfo en una vecindad abierta $V \subset \mathbb{C}$ de 0.*

1. *Si $h(z)\frac{\partial}{\partial z}$ tiene un cero de orden uno, la métrica asociada en $V - \{0\}$ es isométrica a la punta de un cilindro infinito $S^1_T \times (0,\infty)$. La topología de las trayectorias reales cerca de 0 asume uno de los siguientes modelos: centro, pozo o fuente.*
2. *Si $h(z)\frac{\partial}{\partial z}$ tiene un cero de orden $s \geq 2$, la métrica asociada en V es isométrica a la que se obtiene de pegar mediante isometrías $2s-2$ sectores elípticos planos de los que se han removido dos sectores horociclicos (ver la prueba).*
3. *Si $h(z)\frac{\partial}{\partial z}$ tiene un polo de orden $-k \leq -1$, la métrica asociada en V es isométrica a la que se obtiene de pegar mediante isometrías $4k+2$ sectores hiperbólicos planos.*

En cada caso el campo vectorial tiene índice de Poincaré–Hopf igual al orden de $h(z)$ en 0.

Demostración: Los casos 1 y 3 siguen de la teoría desarrollada en [16]. Basta explicar el caso 2. Si el cero es de orden $s \geq 2$ por 3.1 tiene dos invariantes métricos: uno es el orden $s \geq 2$ y el otro el valor del residuo $\lambda \in \mathbb{C}$.

En efecto es fácil observar que λ es el residuo en $0 \in \mathbb{C}$ de la forma diferencial meromorfa asociada al campo vectorial $(\lambda z + z^s)\frac{\partial}{\partial z}$.

Si $\lambda = 0$ basta pegar los $2s-2$ sectores elípticos planos para formar un disco topológico. Observese que en ese caso el valor del tiempo complejo necesario para dar una vuelta alrededor del punto singular es cero (la forma diferencial asociada al campo tiene residuo cero).

Si $\lambda = a + \sqrt{-1}b \neq 0$ y $s = 2$, en el modelo local anterior ($\lambda = 0$), se marcan dos bandas disjuntas de trayectorias horizontales y trayectorias verticales, de anchura a y b respectivamente, que se prolongen hasta la singularidad (el cero del campo). Las bandas pueden tomarse disjuntas pues hay al menos dos sectores elípticos. Removiendo esas bandas se obtienen cuatro geodésicas como frontera. Se pegan esas geodésicas mediante isometrías, las trayectorias horizontales entre sí, y las verticales entre sí. Con lo que se obtiene un modelo local donde el tiempo complejo necesario para rodear la singularidad es λ (esto es, la forma diferencial asociada tiene residuo exactamente λ).

El caso $\lambda = a + \sqrt{-1}b \neq 0$ y $s \geq 3$ es análogo. □

Podemos resumir todo lo anterior en la siguiente:

3.3 Proposición. *Sea M una 2-variedad C^∞, orientable y paracompacta. Existe una correspondencia uno a uno entre:*

1. *Parejas J, X; donde J es una estructura compleja y X es un campo vectorial meromorfo en (M, J).*
2. *Parejas J, ω; donde J es una estructura compleja y ω es una forma diferencial meromorfa en (M, J).*
3. *Parejas J, $\omega \otimes \omega$; donde J es una estructura compleja y $\omega \otimes \omega$ es una diferencial cuadrática meromorfa orientable en (M, J).*
4. *Poliedros homeomorfos a $M - \{$ceros del campo $X\}$ con singularidades como en 3.2, provistos de un campo vectorial real cuyas trayectorias son geodésicas de velocidad unitaria en $M - \{$polos y ceros del campo$\}$.*
5. *Parejas de campos vectoriales reales (C^∞ en M, exepto en el conjunto discreto que proviene de los polos del campo meromorfo X) tales que: son linealmente independientes, conmutan y con singularidades como las descritas en 3.2.*

Demostración: Por ejemplo para deducir 1 de 5. Si G_1 y G_2 son dos campos vectoriales reales, como en 5, se define la estructura compleja J con respecto al marco formado por estos campos como:

$$J(G_1) = G_2 \ , \ J(G_2) = -G_1 \ ,$$

esto es válido fuera de las singularidades del campo G_1. Usando que G_1 y G_2 conmutan es posible mostrar que J es una estructura compleja, tal que G_1 es define un campo holomorfo (como al principio de la Sección 2). Después se usan los modelos locales en las singularidades de G_1 y G_2 para reconocer que la estructura compleja posee ponchaduras conformes en los puntos singulares de los campos. De ahí sigue que la estructura conforme extiende a toda la superficie M. Para mayores detalles ver [12]. □

Finalmente observemos que dos campos vectoriales meromorfos que difieren por un escalar complejo $X = \lambda Y$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ son tales que: sus poliedros correspondientes son homoteticos por un factor real $|\lambda|$, y las correspondientes trayectorias reales son geodésicas que difieren por un ángulo igual al $arg(\lambda)$.

Una descripción de la dinámica (real) de los campos reales que aparecen en el inciso 5 de la anterior Proposición, se da en [12].

Es interesante la siguiente interpretación dinámica de la correspondencia entre campos y formas. Sea $X = \{h(z)\frac{\partial}{\partial z}\}$ un campo vectorial meromorfo en la superficie de Riemann (M, J). El tiempo complejo necesario para viajar mediante el flujo de X entre dos puntos $z_1, z_2 \in M$ puede calcularse como

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{h(z)} \in \mathbb{C} .$$

Como consecuencia de nuestro estudio es fácil de observar este tiempo complejo se descompone en una pareja de tiempos:

el tiempo real (el necesario viajando a lo largo de trayectorias reales de $X + \overline{X}$),

y el tiempo imaginario (el tiempo real necesario viajando a lo largo de trayectorias reales de $\sqrt{-1}(X + \overline{X})$).

Finalmente en el caso de superficies de Riemann compactas el número de polos y ceros esta relacionado como sigue:

3.4 Lema. *Sea (M, J) una superficie de Riemann compacta de género g. Para todo campo vectorial meromorfo X se tiene*

$$ceros(X) + polos(X) = 2 - 2g = c_1(T'M) ,$$

donde los ceros y polos se cuentan con multiplicidad (se consideran las multiplicidades de polos como negativas). El resultado análogo para formas diferenciales θ es

$$ceros(\theta) + polos(\theta) = 2g - 2 = c_1(T^*M) .$$

Donde c_1 representa la clase de Chern, ver [7] pág. 139.

Demostración: El número $2 - 2g$ en la primera igualdad es fácil de obtener como la suma de los índices de Poincaré–Hopf del campo vectorial real asociado a X. □

Como consecuencia de este Lema para superficies de Riemann compactas: tenemos que solamente la esfera de Riemann y los toros admiten campos holomorfos. Mientras que para las superficies de Riemann de género $g \geq 2$ todo campo meromorfo posee al menos un polo. Inversamente, es bien conocido que las superfices de género $g \geq 1$ admiten formas diferenciales holomorfas, mientras que en la esfera de Riemann toda forma diferencial meromorfa posee al menos un polo.

4. Formas diferenciales meromorfas con residuos prescritos.

Nuestro objetivo en esta sección es describir como mediante construcciones elementales con poliedros es posible mostrar la existencia de objetos meromorfos con alguna propiedad prescrita.

El teorema del residuo afirma que dada una forma diferencial meromorfa en una superficie de Riemann compacta la suma de sus residuos es cero. Estamos interesados en hallar algún tipo de resultado inverso. Como primer paso en necesario interpretar el residuo en términos métricos para el poliedro asociado a la forma diferencial, en una vecindad del polo en cuestión:

4.1 Lema. *Sea θ una forma diferencial meromorfa en una superficie de Riemann (M, J), y $p \in M$ un polo simple para θ, con residuo $r \neq 0$. Entonces:*

1. *En una vecindad de p la métrica asociada a θ es isométrica a la punta de un cilindro $S^1_T \times (0, \infty)$, donde $T = |r|$ es la longitud del factor S^1_T.*
2. *El ángulo orientado que forman las geodésicas cerradas en el cilindro con las trayectorias el campo vectorial meromorfo asociado a θ es igual a $arg(r) - \pi/2$.*

Demostración: Basta estudiar el modelo local elemental $\theta = rdz/z$. Mismo que se transforma en el campo vectorial holomorfo $(z/r)\frac{\partial}{\partial z}$. En estas coordenadas las trayectorias cerradas del cilindro correspondiente estan dadas como las trayectorias del campo $\sqrt{-1}z\frac{\partial}{\partial z}$. Las trayectorias de $(z/r)\frac{\partial}{\partial z}$ forman un ángulo con las trayectorias de $\sqrt{-1}z\frac{\partial}{\partial z}$ igual a $arg(r) - \pi/2$. □

4.2 Teorema. *Sea M una 2–variedad C^∞, compacta, orientable de género g. Dada una colección de números complejos no nulos $\{r_1, ..., r_i\}$, donde $i \geq 2$. Existe una estructura compleja J en M y una forma diferencial meromorfa θ en la superficie de Riemann (M, J) con polos de multiplicidad uno cuyos residuos son $\{r_i\}$ si y sólo si se cumple $\sum r_i = 0$.*

Demostración: Suponemos el Teorema del residuo y probamos el inverso. La idea de la prueba consiste en hallar un poliedro adecuado que corresponda (como el la Proposición 3.3), a una forma diferencial con esas características, eligiendo en cada poliedro un campo vectorial adecuado cuyas trayectorias sean geodésicas de velocidad unitaria en el poliedro.

La primera parte de la prueba muestra el resultado para formas diferenciales meromorfas en la esfera de Riemann, se consideran dos casos.

Primer caso $i = 2$. La forma diferencial necesaria se escribe explícitamente como $(r_1/z)dz$ en una carta afín de $\mathbb{C}P^1$. En este caso $T = |r_1| = |r_2|$, su poliedro es un cilindro $S^1_T \times \mathbb{R}$. Donde $z = 0, \infty \in \mathbb{C}P^1$, corresponden las puntas del cilindro. El campo vectorial geodésico

$$e^{arg(r_1)\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x} ,$$

donde $x \in S^1_T$, tiene como trayectorias geodésicas en el cilindro y es el requerido, de acuerdo a la correspondencia 3.3.

Segundo caso $i \geq 3$. Consideremos que se han ordenado los números en la colección de tal manera que sus argumentos cumplen:

$$arg(r_1) \leq arg(r_2) \leq ... \leq arg(r_i) .$$

Entonces existe un único polígono convexo en $\mathbb{C}$ con i vértices

$$r_1, \ (r_1 + r_2), \ (r_1 + r_2 + r_3), ..., \ (r_1 + r_2 + ... + r_i) = 0 .$$

El caso de un polígono que se degenera a un trozo de linea recta o más generalmente a una poligonal es admitido. Identificando los vértices del polígono a un solo punto, obtenemos una superficie homeomorfa a una esfera menos i discos abiertos. Finalmente se pega en la frontera del i-esimo disco un cilindro con frontera isométrico a $S^1_{|r_i|} \times [0, \infty)$. El poliedro obtenido representa una forma diferencial meromorfa en la esfera de Riemann con i polos simples de residuos $\{r_i\}$ y un cero de multiplicidad $i - 2$.

El campo vectorial $\frac{\partial}{\partial x}$ en el polígono inicial, se extiende al poliedro construido, describiendo las geodésicas requeridas.

El caso donde el polígono se degenera a una poligonal queda como ejercicio al lector interesado.

La segunda parte de la prueba considera cuando el género g de la superficie es mayor o igual a uno.

Se considera el poliedro correspondiente a esos residuos como en los casos anteriores en la esfera de Riemann. Se toman g copias de un toro plano digamos $\mathbb{C}/\Lambda$, donde Λ es una retícula de rango dos. Es posible realizar la suma conexa del poliedro en la esfera y estas copias del toro. Basta cortar a lo largo de geodésicas y pegar los lados mediante el patron usual de suma conexa de superficies, en este caso los pegados deben realizarse usando isometrías entre los lados que se desea pegar. Es fácil observar que el campo vectorial geodésico original (en la esfera de Riemann) extiende a cada uno de los toros que se han agregado mediante el proceso de suma conexa, ver [11] para mayores detalles. El resultado es el poliedro buscado: con g asas, con i puntas cilindricas que dan origen a los residuos dados y provisto de un campo vectorial geodésico. □

El inverso del teorema del residuo es de hecho parte del folklore de la teoría de superficies de Riemann, ver por ejemplo [6] pág. 52. Sin embargo la virtud de estas técnicas reside en que la construcción es completamente elemental, usando geometría de poliedros. Mientras que la demostración usual utiliza teoría del potencial. Sin embargo al usar poliedros resulta difícil controlar la estructura compleja J que resulta. Por ejemplo un problema por resolver es mostrar que mediante las anteriores técnicas es posible obtener el resultado para toda estructura compleja J en el espacio de Teichmüller de superficies de género g. De hecho una de las aplicaciones más relevantes de las diferenciales cuadráticas holomorfas es que permiten deformar la estructura compleja de (M, J). Al cambiar el tamaño del poliedro en sus trayectorias horizontales la estructura compleja cambia, que es lo que se conoce como deformaciones de Teichmüller ver [1] pág. 16.

5. Dinámica de separatrices en campos vectoriales holomorfos completos.

Sea (M, J) una variedad compleja, donde M es la variedad diferenciable subyacente y J es una estructura compleja integrable. Para X un campo vectorial holomorfo en (M, J), siguiendo el trabajo de J. C. Rebelo [14], estamos interesados es estudiar el comportamiento de las separatrices de X, bajo la hipótesis de que X es completo.

Recordemos que un campo vectorial holomorfo X se dice *completo* si existe un flujo complejo

$$\Phi : \mathbb{C} \times M \to M \ ,$$

i.e. una $(\mathbb{C}, +)$–acción holomorfa, bien definido para todo tiempo complejo $t \in \mathbb{C}$, que proviene del campo X.

Es bien conocido que un campo vectorial holomorfo en una variedad compacta es siempre completo. Usando por ejemplo que el flujo real es completo (por ser la variedad compacta y el Teorema de existencia y uncidad de soluciones para campos vectoriales C^{∞}) y obteniendo el flujo complejo mediante los flujos reales como en las Secciones 2 y 3.

Observemos sin embargo que los campos meromorfos en superficies de Riemann no son completos. Basta mirar al campo local $\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}$ en la vecindad del polo $0 \in \mathbb{C}$. Tiene como trayectorias a los ejes coordenados x, y en $\mathbb{C}$, y no es completo en ellas, esto es como $(\mathbb{R}, +)$–acción, de donde tampoco existe una $(\mathbb{C}, +)$–acción completa. La completez falla en exactamente las trayectorias reales que son separatrices de los sectores hiperbólicos de un polo, esto sucede para polos de cualquier orden.

Una consecuencia de lo anterior es que los campos vectoriales completos pueden clasificarse en superficies de Riemann:

5.1 Lema. *Todo campo vectorial X no idénticamente nulo, holomorfo y completo en una superficie de Riemann (M, J) es, salvo cambio holomorfo de coordendas, equivalente a alguno de los siguientes:*

1. $\lambda z \frac{\partial}{\partial z}$ *en* $\mathbb{C}P^1$.

2. $z^2\frac{\partial}{\partial z}$ *en* $\mathbb{C}P^1$.

3. $\frac{\partial}{\partial z}$ *en* $\mathbb{C}$

4. $\lambda z\frac{\partial}{\partial z}$ *en* $\mathbb{C}$.

5. $\lambda z\frac{\partial}{\partial z}$ *en* $\mathbb{C}-\{0\}$.

6. $\lambda\frac{\partial}{\partial z}$ *en* $\mathbb{C}/\Lambda$.

Donde $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *y* Λ *es una retícula de rango 2.*

Demostración: Nuestra primera observación es que si (M,J) es una superficie de Riemann, cuya cubierta universal es Δ el disco de Poincaré, entonces no posee un campo holomorfo completo. Por contradicción, supongamos que X es un campo holomorfo completo y no idénticamente cero en (M,J) cubierta por Δ. Usando el flujo existe una función holomorfa no constante $\Phi(t,p_0):\mathbb{C}\to(M,J)$, para $p_0\in M$ un punto donde X no se anula. Esta función puede levantarse por continuación analítica a Δ, obteniendo una función holomorfa no constante $\widetilde{\Phi}(t,p_0):\mathbb{C}\to\Delta$, lo que es imposible por el clásico Teorema de Liouville. De aqui sigue que (M,J) como en el Lema debe estar cubierta por el plano complejo o por la esfera de Riemann.

Si M es compacta solo la esfera y los toros admiten campos holomorfos. Por simple inspección es fácil deducir las posiblidades 1, 2 y 6, dejamos los detalles al lector interesado.

Si M es no compacta, como el flujo es completo la variedad $M-\{ceros\ de\ X\}$ debe estar cubierta por $\mathbb{C}$, donde el flujo

$$\Phi(t,p_0):\mathbb{C}\to M-\{ceros\ de\ X\}$$

es la función de cubierta. La métrica plana en $M-\{ceros\ de\ f\}$ inducida por esta cubierta coincide con la construida en la Secciones 2 y 3, siendo geodésicamente completa.

Lo que muestra que $M-\{ceros\ de\ X\}$ debe ser conformemente como $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}/\Lambda$, para Λ una retícula de rango 1. En ambos casos la frontera ideal de $M-\{ceros\ de\ X\}$ determina ponchaduras conformes que corresponden a los ceros de X en (M,J). Es fácil ver que se pueden compactificar agregando puntos y que el campo vectorial extiende holomorfamente sobre esos puntos. El campo compatificado es holomorfo, lo que muestra los casos 3, 4 y 5. □

En dimensión superior es también posible hallar variedades complejas compactas que posean campos vectoriales holomorfos.

Un ejemplo básico es el espacio proyectivo $\mathbb{C}P^n$ donde los campos lineales en $\mathbb{C}^{n+1}$ dan origen a campos vectoriales holomorfos completos, ver [4], [7] pág. 409, y el Ejemplo 5.4. Se conoce bastante de la clasificación de superficies complejas compactas con campos vectoriales holomorfos [3], y también existe una clasificación birracional de variedades complejas proyectivas que poseen campos vectoriales holomorfos [10].

La construcción de campos vectoriales holomorfos y completos con singularidades en variedades abiertas es delicada. Pues como se menciono en la introducción una variedad compleja que poseea un campo vectorial holomorfo completo (no idénticamente nulo), posee grupos mono–paramétricos de automorfismos holomorfos

$$\Phi(t, \ ) : M \to M \ ,$$

dados por el flujo a tiempo constante, ver más adelante algunos ejemplos.

El siguiente teorema describe la dinámica global de separatrices lisas de campos holomorfos completos.

Recordemos que dado X un campo vectorial holomorfo (no idénticamente nulo), en una variedad compleja M y $p \in M$ un cero del campo, el *orden* del cero p es el menor grado de los monomios que aparecen en el desarrollo en series de potencias de las entradas del campo X alrededor de p. Este número es uno de los invariantes más sencillos que pueden asociarse los ceros de campos vectoriales holomorfos.

5.2 Teorema. *Sea (M, J) una variedad compleja, X un campo vectorial, no indénticamente nulo, holomorfo, completo sobre M y $p \in M$ un cero de X, admitiendo una separatriz lisa $\mathcal{L}$ por p.*

1. *Entonces la separatriz $\mathcal{L} \subset M$ es biholomorfa a $\mathbb{C}$ o $\mathbb{C}P^1$.*

2. *Si el campo vectorial restringido $X|_{\mathcal{L}}$ tiene un cero de multiplicidad uno, entonces es salvo cambio de coordenadas $\lambda z \frac{\partial}{\partial z}$, para $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.*

3. *Si el campo vectorial restringido $X|_{\mathcal{L}}$ tiene un cero de multiplicidad dos, entonces es salvo cambio de coordendas $z^2 \frac{\partial}{\partial z}$. Además la separatriz es biholomorfa a $\mathbb{C}P^1$ y esta holomorfamente encajada en (M, J).*

4. *Un cero p de orden al menos tres para X es imposible.*

Demostración: Basta observar que al restringir el campo X a una trayectoria compleja $\mathcal{L}$ que es separatriz, el orden de un cero en el campo restringido es mayor o igual que el orden del campo en M.

Para ello sea X el campo vectorial. Mediante el uso de cambios apropiados de coordenadas holomorfos, es posible (sin perdida de generalidad) suponer que; X es tal que hay una carta coordenada holomorfa de (M, J), donde p corresponde al 0 en $\mathbb{C}^n$ y que la separtriz $\mathcal{L}$ es el primer eje coordenado en $\mathbb{C}^n$. Al considerar la expresión local del campo se tiene que

$$X(z_1, ..., z_n) = X_1(z_1, ..., z_n) \frac{\partial}{\partial z_1} + ... + X_n(z_1, ..., z_n) \frac{\partial}{\partial z_n} \ ,$$

para $X_j : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas. Al restringir el campo a la separatriz $\mathcal{L}$ tenemos:

$$X|_{\mathcal{L}}(z_1) = X_1(z_1, 0, ..., 0) \frac{\partial}{\partial z_1} \ .$$

Este campo no puede ser idénticamente nulo pues por la definición de separatriz $\mathcal{L}$ contiene un conjunto discreto de ceros del campo X. Tampoco puede ser un campo constante pues por hipótesis el campo X posee un cero en $\mathcal{L}$. Entonces $X_1(z_1, 0, ..., 0)$ tiene al menos un monomio de la forma az_1^i, para i un entero positivo y $a \in \mathbb{C} - \{0\}$. De donde, el orden de $X|_{\mathcal{L}}(z_1)$, que es igual exponente más bajo de los monomios z_1^i en $X_1(z_1, 0, ..., 0)$, es mayor o igual al orden original de $X(z_1, ..., z_n)$.

Aplicando el Lema 5.1 para describir X en $\mathcal{L}$, el resultado sigue. $\square$

5.3 Ejemplo. Consideremos en $\mathbb{C}^2$ el campo polinomial

$$X(z, w) = z^n \frac{\partial}{\partial z} + w^m \frac{\partial}{\partial w},$$

para n, m números enteros positivos. Este campo tiene un cero en $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ cuyo orden es el mínimo de n y m. Los ejes $\{z = 0\}$ y $\{w = 0\}$ son separatrices lisas. Aplicando el Teorema 5.2, sigue que X es completo si y sólo si $n = m = 1$.

5.4 Ejemplo. Sea $A = (a_{ij})$ una función lineal en $\mathbb{C}^{n+1}$, supongamos que es diagonalizable con $n+1$ valores propios distintos entre sí. Ella nos provee de un campo vectorial holomorfo en $\mathbb{C}^{n+1}$, dado por

$$X(z_1, ..., z_{n+1}) = (\sum_i a_{i1} z_i) \frac{\partial}{\partial z_1} + ... + (\sum_i a_{in+1} z_i) \frac{\partial}{\partial z_{n+1}}.$$

Es fácil mostrar que dicho campo es completo, y posee como único cero de orden uno al origen. Tiene adicionalmente, $n+1$ separatrices lisas, provenientes de los espacios propios de A. Bajo la proyección usual $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ determina un campo vectorial holomorfo completo no idénticamente nulo en el espacio proyectivo. Salvo un cambio proyectivo de coordenadas los ceros del campo pueden suponerse en los puntos de la forma $[(0, ..., 1, ..., 0)]$, hay $n+1$ de ellos y todos son ceros de orden uno. Las rectas proyectivas $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^n$ que provienen de los 2–planos "$z_i z_j$" en $\mathbb{C}^{n+1}$ son separatrices del campo. El campo vectorial restringido a cada una de ellas posee exactamente dos ceros de multiplicidad uno, como en el caso 1 del Lema 5.1.

5.5 Ejemplo. Consideremos en $\mathbb{C}^n$ para $n \geq 2$, el campo entero

$$X(z_1, ..., z_n) = (f(z_2, ..., z_n) z_1 + g(z_2, ..., z_n)) \frac{\partial}{\partial z_1}$$

para f, $g : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ funciones enteras. Los ceros del campo estan dados por la hipersuperficie de ecuación $\{f(z_2, ..., z_n) z_1 + g(z_2, ..., z_n) = 0\}$. Todas las curvas dadas por ecuaciones $\{z_2 = c_2, \ ..., \ z_n = c_n\}$ que intersectan a la hipersuperficie son separatrices lisas. Aplicando el Lema 5.1 sigue que X es completo.

5.6 Ejemplo. Consideremos (M, J) cualquier variedad compleja y $\mathcal{L}$ una superficie de Riemann como en el Lema 5.1. El producto $M \times \mathcal{L}$ posee un campo holomorfo completo.

El considerar el caso de separatrices singulares o de flujos que provienen de campos vectoriales meromorfos con estas técnicas, es un trabajo a realizar.

Finalmente observemos que la construcción y caracterización de campos holomorfos completos no idénticamente cero, da origen a problemas intersantes aún sobre variedades "sencillas". Por ejemplo, considere en $\mathbb{C}^n$ para $n \geq 2$, un campo vectorial lineal X como en el ejemplo 5.4. Sea $\Psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un automorfismo holomorfo, entonces claramente $\Psi_* X$ es un campo completo holomorfo con un cero aislado de orden uno. Es cierto el inverso, esto es:

¿Dado Y un campo vectorial en $\mathbb{C}^n$ holomorfo completo no idénticamente cero, con un único cero de orden uno, existe X campo lineal y Ψ automorfismo holomorfo de $\mathbb{C}^n$ tal que $Y = \Psi_* X$?

También es interesante hallar ejemplos de campos vectoriales holomorfos completos en $\mathbb{C}^n$ con un número arbitrario de ceros de orden uno.

Bibliografía

1. W. Abikoff, *The Real Analytic Theory of Teichmüller Space*, Springer Lecture Notes in Mathematics 820. Springer–Verlag (1980).
2. L. Brickman, E. S. Thomas, *Conformal equivalence of analytic flows*, Journal of Differential Equations **25** (1977) 310–324.
3. J. Carrell, A. Howard, C. Kosniowski, *Holomorphic vector fields on complex surfaces*, Math. Ann. **204** (1973) 303–309.
4. C. Camacho, N. Kuiper, J. Palis, *The topology of holomorphic flows with singularity*, Pub. Math. IHES 48 (1978) 5–38.
5. C. Camacho, P. Sad, *Invariant varieties through singularieties of holomorphic vector fields*, Annals of Math. **115** (1982) 579–595.
6. H. M. Farkas, I. Kra, *Riemann Surfaces, Second Ed.*, Springer–Verlag (1992).
7. P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Interscience (1978).
8. X. Gómez–Mont, I. Luengo, *Germs of holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^3$ without separatrix*, Inv. Math **109** (1990).
9. S. Kobayashi, *Transformation gruops in Differential Geometry*, Springer–Verlag (1972).
10. D. Lieberman, *Holomorphic vector fields on projective varieties*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **30** (1997) 273–276.
11. J. Muciño–Raymundo, *Geometría y dinámica de poliedros*, Aportaciones Mat.: Comunicaciones, Soc. Mat. Mexicana **16** (1995) 403–435.
12. J. Muciño–Raymundo, *Complex structures adapted to smooth vector fields*, (1996).
13. J. Olivares–Vázquez, *On vector fields in $\mathbb{C}^3$ without sepatarix*. Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid. vol. 5 núm. 1 (1992) 13–34.
14. J. C. Rebelo, *Singularités des flots holomorphes*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **46**, 2 (1996) 411-428.
15. M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish (1979).
16. K. Strebel, *Quadratic Differentials*, Springer–Verlag (1984).