

Geometría y dinámica de poliedros

Jesús Muciño Raymundo

Instituto de Matemáticas UNAM

Ciudad Universitaria, Coyoacán México D. F. 04510

Centro de Investigación en Matemáticas A. C. (CIMAT)

A. P. 402 Guanajuato, Gto. 36000

MEXICO

Resumen. Se muestra que para toda superficie existe un poliedro con la misma forma topológica, esto es: toda superficie admite estructuras planas, posiblemente con singularidades. Se estudian dichos poliedros desde el punto de vista de la geometría diferencial. Así como los sistemas dinámicos engendrados por las geodésicas de esos poliedros. Se discuten aplicaciones al estudio de campos vectoriales meromorfos en superficies de Riemann.

INTRODUCCION

El estudio de las superficies reales forma un tema de estudio clásico en muchas ramas de las matemáticas. El objetivo del presente trabajo es exponer los siguientes aspectos del estudio de superficies poco conocidos:

- i) Mostrar que toda superficie admite una estructura plana que la transforma en una superficie plana (posiblemente con singularidades), i. e. en un poliedro.*
- ii) Estudiar los sistemas dinámicos engendrados por las geodésicas en esas superficies.*

Debemos hacer notar que es precisamente la presencia de singularidades (puntos que provienen de los vértices en los poliedros) lo que nos permitirá tener muchos ejemplos. Las singularidades por otra parte harán que los sistemas dinámicos presenten comportamientos complicados.

Para simplificar la exposición sólo consideraremos superficies orientables sin frontera, aunque no necesariamente compactas. Trataremos de hacer autocontenida nuestra exposición de tal forma que sólo requerimos conocimientos básicos de topología, ecuaciones diferenciales y análisis. Los conceptos centrales del trabajo, estructuras planas, campos vectoriales localmente constantes y sistemas dinámicos, serán definidos de manera explícita.

Entre las motivaciones para llevar a cabo los dos puntos anteriores están las siguientes:

- a) Las estructuras planas son objetos fáciles de construir y existe una gran abundancia de ellas, ver Teorema 1.15.
- b) Cada estructura plana tiene asociada una familia de sistemas dinámicos de manera natural, donde cada familia es el flujo geodésico de la superficie plana, ver Teorema 5.4.
- c) Los sistemas dinámicos engendrados por las geodésicas de superficies planas, preservan una medida y más aún, poseen medidas transversas invariantes, ver Corolario 3.20 y Proposición 4.5.
- d) Ejemplos importantes de sistemas dinámicos tales como el flujo lineal en el toro, flujos geodésicos, billares en polígonos, foliaciones con medida y funciones de intercambio de intervalos, aparecen en el estudio de sistemas dinámicos en superficies planas.
- e) Por otra parte una estructura plana (con singularidades) en una superficie nos da ejemplos de los siguientes objetos: métricas de Riemann (con singularidades), superficies de Riemann, diferenciales cuadráticas, campos vectoriales meromorfos. Por falta de espacio sólo comentaremos algo de ello en la Sección 6.
- f) Hay todavía muchos aspectos por investigar alrededor de las estructuras planas, nuestra meta principal es plantear algunas preguntas abiertas, ver incisos 1.17, 2.9, 4.8, 4.10 así como la Sección 6.

Sobre el estilo: nuestra intención es presentar el material con un mínimo de definiciones, lo más simples como sea posible (el lector más experimentado podrá reconocer en nuestras definiciones conceptos más generales). Por un ejercicio entendemos un hecho que el lector podrá demostrar por sí mismo (estas son las notas de un curso impartido en el XXVII congreso de la Sociedad Matemática Mexicana), y por un problema entendemos un problema abierto para investigación futura, para el cual daremos referencias exactas.

Finalmente el autor desea agradecer a Xavier Gómez Mont y al Centro de Investigación en Matemáticas A. C. (CIMAT) su hospitalidad, durante la preparación de este trabajo.

1 CONSTRUCCION DE SUPERFICIES PLANAS

En esta sección vamos a dotar toda superficie de una estructura plana, para hacer esto procederemos de una manera constructiva dando modelos explícitos para todas las superficies imaginables. Estos modelos van a construirse mediante el pegado de superficies más simples. Así que más que precisar qué entendemos por una superficie, comenzaremos construyendo objetos que lo son. Al final de la sección discutiremos la relación con la noción rigurosa de superficie. Para hacer precisos nuestros métodos necesitamos aclarar dos conceptos:

- i) El material con que vamos a construir superficies.
- ii) Las reglas de pegado con las que vamos a unir el material.

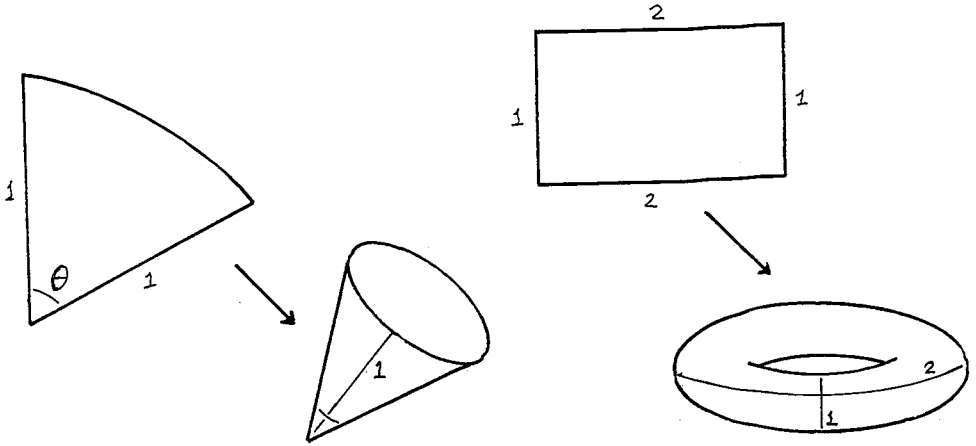


Fig. 1 El cono y el toro.

Explicuemos el primer punto: como estamos interesados en construir superficies planas la cantera natural para proveernos de material es el plano euclideo \mathbf{R}^2 , sin embargo trozos de \mathbf{R}^2 cuya frontera sea demasiado irregular deberán de ser difíciles de pegar entre sí.

1.1 Definición. Un *polígono* es una región cerrada y conexa del plano \mathbf{R}^2 , cuya frontera está formada por un número finito de líneas rectas y/o segmentos de líneas rectas, llamadas aristas.

Nótese que en nuestra definición de polígono estamos admitiendo polígonos no compactos (de área infinita). Provistos ya del material podemos empezar a experimentar qué objetos pueden construirse, las superficies que inmediatamente podemos construir son:

1.2 Ejemplo. El *cono*, que obtenemos de tomar un polígono delimitado por dos rayos que emanan del origen en \mathbf{R}^2 formando un ángulo θ , pegando ambos rayos entre sí. El *cilindro*, que obtenemos de tomar el polígono definido por la región entre dos líneas paralelas en \mathbf{R}^2 , pegando ambas líneas entre sí. El *toro*, que obtenemos de pegar los lados opuestos de un rectángulo cualquiera en \mathbf{R}^2 . Ver Fig. 1.

Antes de pasar a construir otras superficies examinemos con detalle las reglas de pegado que hemos usado, resumiendo sus propiedades más naturales en la siguiente:

1.3 Definición. Un *pegado admisible* entre dos polígonos P y Q es aquel en que:
1) Un lado de un polígono P ha sido identificado con un y sólo un lado de Q .

2) La función que identifica ambos lados debe preservar la distancia entre puntos identificados, esto es, está dada por una isometría de uno de los lados que se identifican en el otro.

El pegado admisible entre los lados de un mismo polígono P está definido identificando lados distintos de P entre sí.

Obviamente en el Ejemplo 1.2 hemos usado pegados admisibles. Por simplicidad el pegado admisible de P y Q lo denotamos simplemente por $P \amalg Q$. La justificación del uso del adjetivo admisible es el siguiente:

1.4 Lema de zurcido invisible. Sean P y Q dos polígonos que han sido unidos con un pegado admisible a lo largo de dos de sus lados.

1) El espacio resultante es un espacio métrico.

2) Todo punto p en $P \amalg Q$ que está en el interior de $P \amalg Q$ tiene una vecindad en $P \amalg Q$ que es isométrica a una vecindad de $0 \in \mathbb{R}^2$.

Demostración: Para mostrar (1) definamos la distancia entre dos puntos de $P \amalg Q$ como el mínimo de las longitudes de entre todas las curvas que los unen, es posible comprobar que ésta es una distancia bien definida. Para mostrar (2); si p está en el interior de P ó Q el resultado es inmediato, si p está en la arista donde se pegan P y Q , use que la unión de dos mitades de un disco abierto en \mathbb{R}^2 reproduce el disco mismo. □

1.5 Definición. Una *superficie plana* (posiblemente con singularidades) es aquella que se ha obtenido mediante el pegado admisible de un conjunto a lo más numerable de polígonos de tal forma que ninguna de sus aristas quede sin identificar.

Note que en general del pegado admisible de dos polígonos no resulta un polígono, de donde el proceso de pegado admisible nos permite engendrar nuevas superficies. Por otra parte una superficie plana (posiblemente con singularidades) sólo tiene puntos interiores pues todas las aristas fueron identificadas, esto es, estamos hablando de superficies sin frontera.

1.6 Ejemplo. El plano con un punto singular; consideremos cuatro copias del medio plano superior, Fig. 2, e identificando sus fronteras mediante pegados admisibles obtenemos una superficie plana con un punto especial, lo llamaremos el punto singular.

1.7 Ejemplo. El siguiente ejemplo de estructura plana será de mucha utilidad, lo llamaremos un *pantalón plano singular*. Consideremos en el plano un triángulo y tres rectángulos de altura infinita y base igual a cada uno de los lados del triángulo como lo muestra la Fig. 3, identificando mediante pegados admisibles, como está

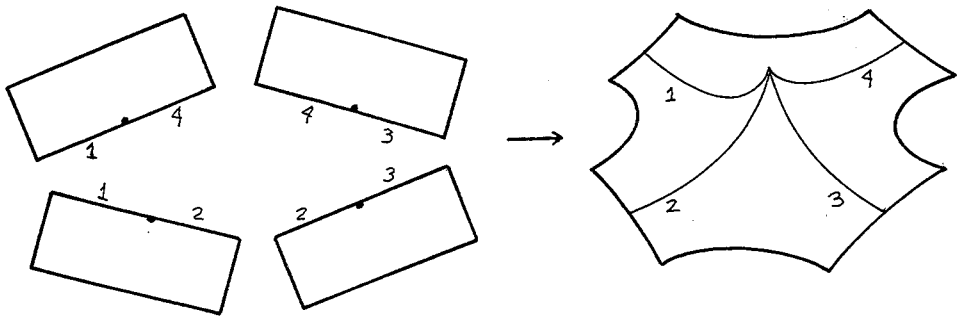


Fig. 2 El plano con un punto singular.

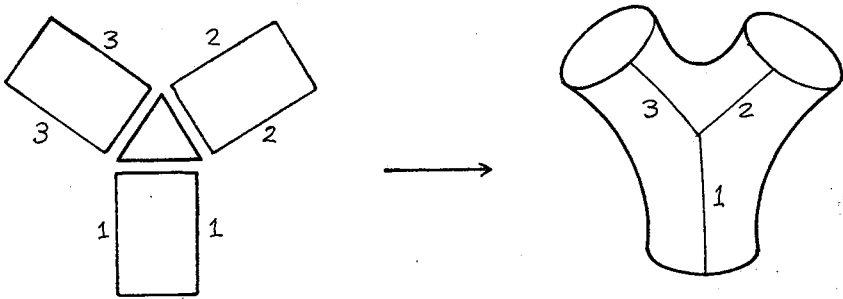


Fig. 3 El pantalón plano singular

indicado obtenemos una superficie que es homeomorfa a una esfera menos tres puntos, correspondientes a los extremos de los cilindros. Más aún los tres vértices del triángulo se identificaron en un mismo punto, a este punto lo llamaremos el punto singular.

En todo lo que sigue debemos pensar que superficie plana posiblemente con singularidades es para nosotros un *poliedro* (formado por los polígonos que se utilizaron en su construcción), con *vértices* (puntos donde se han unido dos o más polígonos entre sí) y *aristas* (segmentos de líneas rectas en que se han unido sólo dos polígonos entre sí), de hecho las aristas son invisibles desde el punto de vista métrico usando el Lema de zurcido invisible.

El siguiente corolario translada algunos conceptos métricos del plano euclideo a superficies planas, empecemos por recordar la siguiente propiedad de las líneas rectas.

1.8 Ejercicio. Dados dos puntos p y q en \mathbf{R}^2 muestra que la línea de menor longitud que los une es el segmento de recta entre ellos.

Las rectas también reciben el nombre de *geodésicas* refiriéndose a que satisfacen la propiedad anterior.

1.9 Corolario. *En una superficie plana (posiblemente con singularidades) están bien definidos los siguientes conceptos:*

- 1) *La distancia entre puntos de la superficie.*
- 2) *El área de la superficie y de regiones de ella (misma que puede ser infinita).*
- 3) *Las curvas en la superficie que son geodésicas (fuera de los vértices).*
- 4) *El ángulo formado por dos geodésicas que se intersectan (fuera de los vértices).*

Demostración: La distancia se define como en 1.4.

Para definir el área de una superficie plana basta sumar las áreas de los polígonos usados en su construcción, con ello obtenemos una medida de Lebesgue μ en M .

Naturalmente una curva en la superficie será una geodésica si y sólo si su intersección con cada vecindad (isométrica con un abierto del plano) es un segmento de recta en la vecindad correspondiente. Esta definición es equivalente a decir que es una curva que minimiza la distancia entre puntos contenidos sobre ella. Usando el lema de zurcido invisible se sigue que la anterior definición es posible solamente fuera de los vértices de la superficie. Mientras que una curva que pasa por uno de los puntos de pegado en una arista (que no sea un vértice), es una geodésica si y sólo si minimiza distancias entre sus puntos localmente.

La definición de ángulo de intersección usa que todo punto tiene vecindades isométricas con abiertos del plano, para aplicar la forma de medir ángulos usual en \mathbf{R}^2 . □

1.10 Ejercicio. Muestra que el plano con un punto singular y el plano usual \mathbf{R}^2 son homeomorfos entre sí, pero no son isométricos.

1.11 Ejercicio. Para el plano con un punto singular y el pantalón plano singular (Ejemplos 1.6 y 1.7) muestra que su área es infinita. Describe sus geodésicas, más aún dados dos puntos p y q cualquiera en la superficie describe la geodésica de longitud menor que los une. Discute bajo qué condiciones en la elección de los puntos tal geodésica es única.

Finalmente vamos a comparar las superficies que hemos construido con las superficies topológicas. Recordemos que una *superficie topológica* N es un espacio topológico Hausdorff con base numerable, tal que todo punto en N tiene una vecindad abierta homeomorfa a un abierto de \mathbf{R}^2 , observemos que con esta definición las superficies topológicas no tienen frontera.

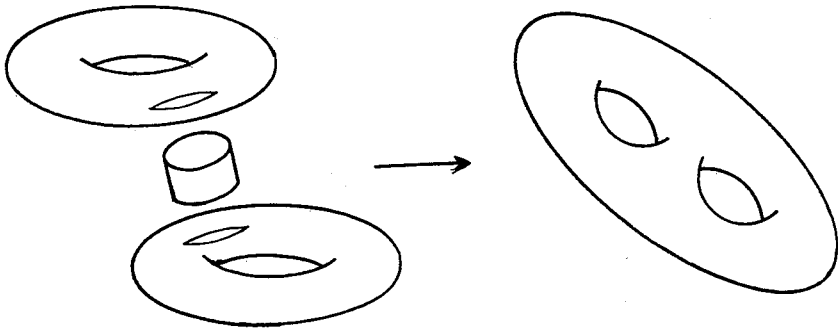


Fig. 4 Suma conexa de superficies planas.

Una herramienta básica es la suma conexa de superficies, la cual nos permitirá construir superficies nuevas a partir de otras ya conocidas.

1.12 Definición. Dadas dos superficies planas M y N (posiblemente con singularidades), definimos su *suma conexa* mediante el siguiente proceso:

- 1) Elegimos en cada superficie M y N segmentos de geodésicas de longitud l y que no toquen sus vértices, llamémoslos l_m, l_n .
- 2) Cortamos M a lo largo de l_m obteniendo una nueva superficie M_o que tiene como frontera un círculo de perímetro $2l$, hacemos el mismo proceso en N .
- 3) Pegamos mediante isometrías un cilindro plano $S_{2l}^1 \times [0, h]$ de perímetro $2l$ y altura finita h (aquí S_{2l}^1 es el círculo de perímetro $2l$), a lo largo de las fronteras obtenidas de M_o y N_o .

Es fácil comprobar que el resultado de la suma conexa de dos superficies planas M y N es una nueva superficie plana que denotamos $M \# N$, ver Fig. 4.

La suma conexa de superficies topológicas se define de forma análoga, pero requiriendo que el pegado en (3) sea dado por funciones solamente continuas.

Por otra parte como las superficies topológicas no tienen frontera, es natural requerir que nuestras superficies planas tampoco la tengan. Una manera fuerte de decir lo anterior es mediante el siguiente concepto que involucra las geodésicas de la superficie.

1.13 Definición. Una superficie plana M (posiblemente con singularidades) es *completa* si toda geodésica que no toca los vértices de M puede extenderse indefinidamente en ambas direcciones.

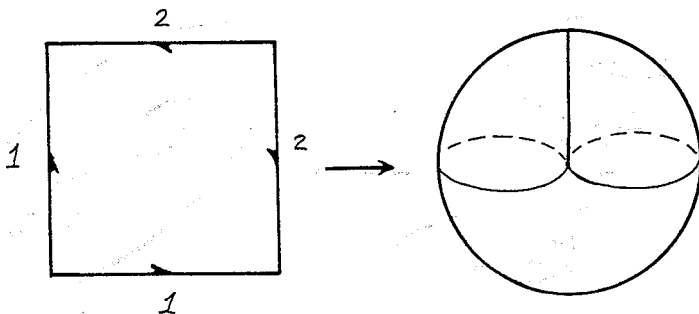


Fig. 5 El plano proyectivo.

1.14 Ejercicio. Muestra que toda superficie plana (posiblemente con singularidades) como en la definición 1.5 es completa.

Podemos ahora enunciar el resultado principal de esta sección.

1.15 Teorema de universalidad de superficies planas. *Toda superficie topológica es homeomorfa a alguna superficie plana y completa (posiblemente con singularidades).*

Demostración: Nótese que una superficie topológica es básicamente un espacio topológico mientras que una superficie plana (posiblemente con singularidades) está dada por un espacio métrico; vamos a considerar en superficies planas la topología heredada por esa métrica. La prueba es constructiva: para cada superficie topológica vamos a construir una superficie plana (posiblemente con singularidades) homeomorfa a ella. Podemos agrupar las superficies topológicas en cuatro casos, para más detalles sobre la clasificación de superficies ver [12] vol. II cap. XV para el caso de superficies compactas y [28] para el caso de superficies no compactas.

Caso 1. La superficie topológica es compacta y orientable. De acuerdo al teorema de clasificación topológica de superficies compactas orientables, ver [12] vol. II, cap. XV, sabemos que la superficie que tenemos es homeomorfa o bien a una esfera, a un toro o a una esfera con g asas, donde $g > 1$ (g es un entero positivo, llamado el *género*). Para la esfera es fácil ver que un cubo es una superficie plana con singularidades homeomorfa a la esfera. El toro ya fue construido en el Ejemplo 1.2. Para la esfera con g asas donde $g = 2$; tomando dos toros mediante el proceso de suma conexa se obtiene una superficie homeomorfa a la esfera con dos asas, ver Fig. 4. El caso de $g > 2$ puede lograrse usando el número adecuado de toros.

Caso 2. La superficie topológica es compacta y no orientable. De acuerdo con el

teorema de clasificación para estas superficies pueden obtenerse como la suma conexa de superficies topológicas:

$$M \# \mathbf{RP}^2 \# \dots \# \mathbf{RP}^2 ,$$

donde M es una superficie topológica compacta y orientable (como en el caso 1) y se tiene un número finito de planos proyectivos \mathbf{RP}^2 . Recordemos que el plano proyectivo \mathbf{RP}^2 es la superficie topológica compacta y no orientable más sencilla que hay, para construirla podemos identificar los lados de un cuadrado como muestra la Fig. 5, usando siempre pegados admisibles. Como sabemos que nuestra superficie topológica es $M \# \mathbf{RP}^2 \# \dots \# \mathbf{RP}^2$ podemos usar la suma conexa de superficies planas (por el caso 1, M es ya una superficie plana), para obtener toda superficie topológica $M \# \mathbf{RP}^2 \# \dots \# \mathbf{RP}^2$.

Caso 3. La superficie topológica es orientable y no compacta. Una superficie con las características anteriores deberá ser homeomorfa al plano, al cilindro o es la suma conexa del tipo:

$$M_1 \# M_2 \# \dots \# M_i \# \dots$$

donde cada M_i es una superficie compacta conexa y orientable, de la cual posiblemente se han removido $n_i \in \mathbf{N}$ discos cerrados, el número de sumandos $\{i\}$ puede ser finito o inclusive infinito numerable.

El cilindro ya fue construido (Ejemplo 1.2) y el plano puede construirse de muchas maneras (por ejemplo pegando un número infinito de rectángulos, formando un enlosado de \mathbf{R}^2).

Para concluir este caso debemos construir modelos donde intervienen superficies compactas y conexas menos posiblemente un número finito de discos cerrados. La dificultad radica en que esos discos son cerrados por lo que tenemos superficies topológicas abiertas, pero como estamos interesados en superficies planas completas, no basta remover los discos de una superficie plana dada, pues ello haría que la superficie plana resultante ya no fuera completa.

Sea M una superficie compacta conexa y orientable con una estructura plana (como en el caso 1). Consideremos en M un segmento de geodésica de longitud l (que no pase por ningún vértice de M). Cortamos M a lo largo de el segmento de geodésica y pegamos un cilindro con frontera $S^1_{2l} \times [0, \infty)$ de altura infinita y perímetro $2l$, la superficie topológica obtenida es homeomorfa a M menos un disco cerrado y es completa. Remover más discos de M es posible mediante un proceso parecido. Con ello tenemos todas las piezas que intervienen en la suma conexa de una superficie orientable y no compacta.

Caso 4. La superficie topológica es no orientable y no compacta. Una superficie con las características anteriores es homeomorfa a una suma conexa:

$$M_1 \# M_2 \# \dots \# M_i \# \dots$$

con la diferencia de que ahora pueden aparecer como sumandos superficies topológicas M_i homeomorfas al plano proyectivo menos n_i discos cerrados. Por un proceso como

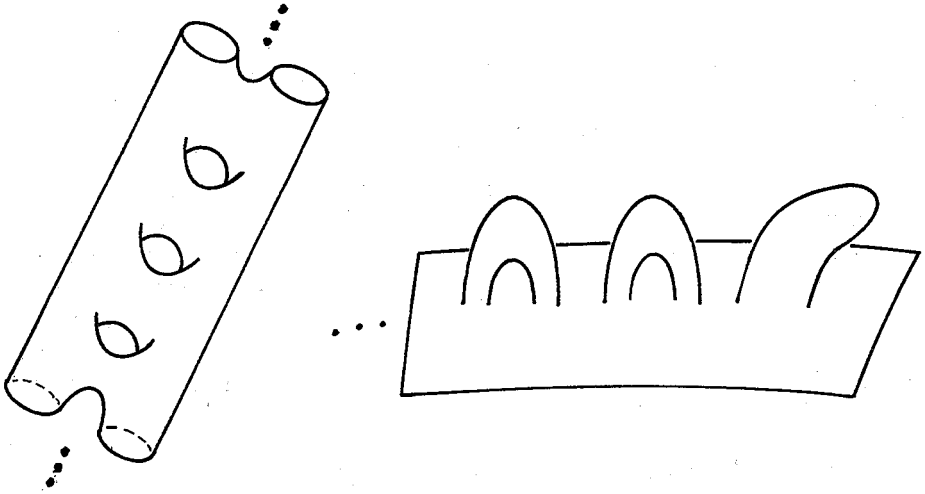


Fig. 6 La escalera de Hopf y el monstruo del lago Ness.

en el caso 3 podemos imponer en el plano proyectivo menos n_i discos cerrados estructuras planas. \square

Algunos ejemplos de superficies planas no compactas son dados en la Fig. 6, la idea es que todas ellas son sumas conexas de superficies planas.

1.16 Ejercicio. Muestra que la superficie compacta de género $g \geq 2$ tiene una estructura plana con un solo punto singular, identificando adecuadamente los lados de un $2g$ -ágono plano. Muestra igualmente que la escalera de Hopf y el monstruo del lago Ness Fig. 6 tienen una estructura plana completa.

1.17 Problema. *El teorema del encaje de Whitney dice que toda superficie puede realizarse en algún \mathbf{R}^n como una superficie sin autointersecciones. Más aún toda superficie compacta con una métrica de Riemann encaja isométricamente en \mathbf{R}^{17} (Teorema de Nash, ver [24]).*

¿Será verdadero que toda superficie plana compacta (posiblemente con singularidades) puede ponerse de manera uno a uno e isométricamente en algún \mathbf{R}^n ?

Si ello es posible, sería interesante estimar si existe alguna dimensión n que sirva para todas las superficies planas, así como estudiar el caso no compacto.

2 SINGULARIDADES Y PUNTAS AL INFINITO

Hemos llamado vértices de una superficie plana a los puntos que provienen de los vértices de polígonos que intervienen en su construcción. En esta sección vamos a explorar primeramente la geometría de esos puntos.

2.1 Definición. El *ángulo cónico de un vértice* en una superficie plana M (posiblemente con singularidades) es la suma de los ángulos internos en los polígonos de M que son adyacentes al vértice.

El nombre de ángulo cónico está justificado por el hecho de que un modelo isométrico local cerca de un vértice de ángulo cónico θ puede contruirse identificando los dos lados de un sector limitado por rectas en \mathbf{R}^2 emanando del origen y formando un ángulo θ entre sí.

2.2 Ejercicio. Muestra que pueden construirse vértices con ángulo cónico cualquiera en el rango $(0, \infty)$.

El siguiente corolario describe aquellos vértices que son invisibles.

2.3 Corolario. Un vértice en una superficie plana tiene una vecindad isométrica a una vecindad de \mathbf{R}^2 si y sólo si su ángulo cónico es 2π . \square

2.4 Ejercicio. Calcula el ángulo cónico en el punto singular del plano con un punto singular (Ejemplo 1.6). Muestra que el pantalón plano singular (Ejemplo 1.7) sólo tiene un punto singular y calcula su ángulo cónico. Muestra que los puntos singulares de ambos ejemplos son localmente isométricos entre sí.

En contraste si el ángulo cónico no es 2π el vértice correspondiente forma un punto muy especial de M , como veremos en las siguientes secciones.

2.5 Definición. Un *punto singular* de una superficie plana M es un vértice con ángulo cónico diferente de 2π . Una *superficie plana con singularidades* es aquella que contiene al menos un punto singular.

Ejemplos de superficies planas singulares son el cono (si el ángulo en el vértice es distinto de 2π) y el cubo, de superficies planas sin singularidades lo son el toro y el cilindro. Desafortunadamente existen muy pocas superficies topológicas que admiten estructuras planas sin singularidades que sean completas:

2.6 Teorema. *Toda superficie plana sin singularidades y completa es homeomorfa o bien al plano \mathbf{R}^2 , a el toro, a la botella de Klein, al cilindro o a una banda de Möbius.* \square

Una demostración de lo anterior puede verse en [4] o [37].

Una superficie plana no compacta puede comportarse de muchas formas al infinito, esto es, fuera de conjuntos compactos (por ejemplo considere la escalera de Hopf, Fig. 6). Una forma de obtener superficies no compactas a partir de superficies compactas consiste en remover puntos, la siguiente definición describe una forma de

comportamiento sencilla para superficies planas en la vecindad de puntos removidos, i. e. en su comportamiento al infinito.

2.7 Definición. Sea M una superficie plana (posiblemente con singularidades), decimos que M tiene una *punta* si admite un vecindad abierta $C \subset M$ tal que C es isométrica a un cilindro de altura infinita, $S_r^1 \times (0, \infty)$, donde S_r^1 es un círculo de perímetro r (aquí $S_r^1 \times \{0\}$ se identifica con la frontera de la cerradura de C en M).

Topológicamente si M tiene una punta entonces tiene una perforación y una vecindad de esa perforación es el cilindro C . La perforación queda a distancia infinita con respecto a la estructura plana. Esto es, las superficies completas pueden admitir puntas.

Naturalmente las superficies con al menos una punta son no compactas. Por ejemplo el pantalón plano singular es una superficie con tres puntas, que es topológicamente lo mismo que una esfera donde tres puntos han sido removidos.

2.8 Ejercicio. Muestra que una superficie plana completa con sólo dos puntas y sin vértices es necesariamente isométrica a un cilindro $S_r^1 \times \mathbf{R}$.

2.9 Problema. Hemos visto que toda superficie compacta admite estructuras planas con singularidades aisladas (por ejemplo construyendo modelos de ellas mediante pantalones planos singulares).

¿ Toda variedad topológica compacta, de dimensión tres admite una estructura plana singular, cuyas singularidades sean puntos ?

Recuérdese que toda tres variedad es triangulable [21], sin embargo ello no implica que las piezas de la triangulación pueden pegarse entre sí por medio de pegados admisibles (usando isometrías). Por ejemplo para superficies es posible diseñar descomposiciones de superficies compactas en polígonos para las cuales es imposible introducir pegados admisibles entre ellos para formar la superficie, ver [14].

¿ Que sucede en dimensión arbitraria, i. e. toda n -variedad admite una estructura plana con singularidades ?

Parece ser que la respuesta es afirmativa (Gil Bor ha dado una idea para la prueba), sin embargo el problema de estudiar sistemáticamente ese tipo de estructuras parece poco explorado. En dimensión tres se han estudiado principalmente estructuras planas con singularidades para variedades hiperbólicas, ver [1].

3 ECUACIONES DIFERENCIALES EN SUPERFICIES

En esta sección estamos interesados en introducir en algunas superficies planas (posiblemente con singularidades) ecuaciones diferenciales i. e. campos vectoriales.

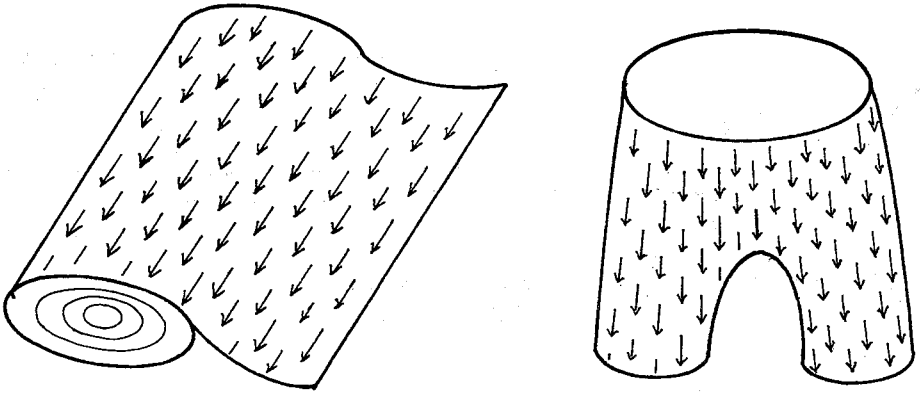


Fig. 7 Un género de tela y unos pantalones confeccionados con ella.

Nos interesan aquellos campos vectoriales que están naturalmente asociados a su estructura plana. Empezaremos por construir ese tipo de campos vectoriales, como segunda etapa mostraremos que los objetos construidos definen sistemas dinámicos y exploraremos algunas de sus propiedades básicas.

3.1 El problema del sastre. Imaginemos que un sastre ha recibido un género de tela con un estampado como en la Fig. 7. donde la pendiente de las flechas es constante y todas son de norma uno. El sastre está interesado en confeccionar piezas con polígonos recortados en esa tela, de tal forma que el zurcido de dos piezas respete la continuidad del estampado. Al sastre sólo le es permitido violar la continuidad del estampado en los vértices. Pregunta: ¿ que reglas de recortar y pegar son admisibles para que el sastre obtenga piezas con continuidad en el estampado ?

La respuesta al problema es casi obvia; el sastre debe ser cuidadoso al recortar los polígonos en la tela de tal forma que al pegar dos de ellos el estampado pegue continuamente. Sin embargo al pegar dos o más polígonos alrededor de un vértice el problema puede no tener solución. Por ejemplo, si el sastre desea forrar un cono con la tela, eso no puede hacerse preservando continuamente la colocación de las flechas si el ángulo en el vértice es menor que 2π . Sin embargo es fácil ver que si el sastre desea confeccionar unos pantalones, entonces el problema sí tiene solución Fig. 7.

3.2 Lema. *Sea p un vértice en una superficie plana M , es posible colocar flechas paralelas en una vecindad de p violando la continuidad de las flechas a lo más en p si y sólo si el ángulo cónico en p es un múltiplo de la forma $(2 + 2n)\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$, etc.*

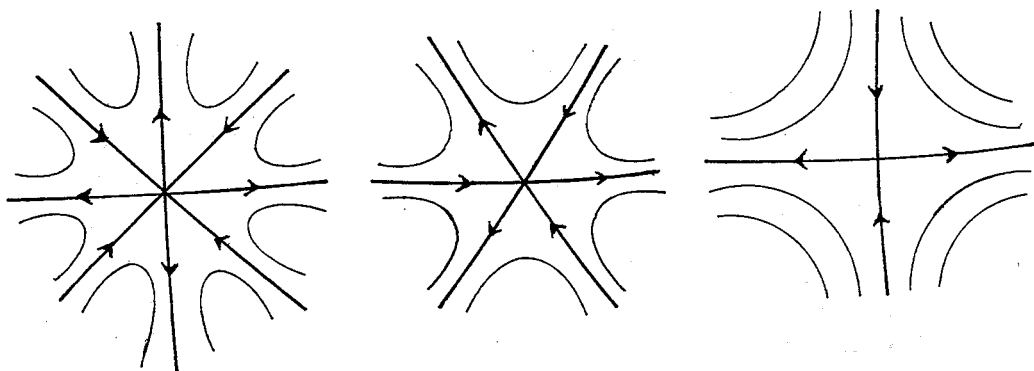


Fig. 8 Campos vectoriales en puntos singulares de ángulo 4π , 6π , 8π .

Demostración. El caso donde el ángulo es 2π sigue del Corolario 2.3. Supongamos que el ángulo cónico en p es $(2 + 2n)\pi$, con $n \geq 1$. Examinando en detalle como puede el sastre recortar piezas para formar una superficie plana en una vecindad de un punto singular respetando la continuidad del estampado tenemos la Fig. 8.

Note que en cada figura hay exactamente $2+2n$ curvas que llegan al punto singular, llamadas *separatrices del punto singular* y los sectores que ellas limitan son isométricos a rectángulos planos con un campo vectorial paralelo, a cada sector le llamaremos *sector hiperbólico*.

Para mostrar el inverso, si las flechas han sido colocadas en una vecindad de p , es posible dividir esa vecindad en sectores hiperbólicos de ángulo cónico π , tomando las curvas tangentes a esas flechas que llegan o emanan de p . El número de sectores hiperbólicos debe ser par, de tal manera que la orientación de las flechas pueda ser continua fuera de p . \square

3.3 Definición. Una *ecuación diferencial ordinaria de primer orden en una superficie* es un campo vectorial continuo en la superficie (esto es, a cada punto de la superficie se le asigna un vector tangente a la superficie de manera continua).

Usualmente se requiere que el campo vectorial sea más que continuo, por ejemplo que sea diferenciable, para poder aplicar el Teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, ver [2], [25] ó [30]. Sin embargo en casos como el nuestro basta la continuidad para poder hallar soluciones. Estamos interesados en estudiar campos vectoriales que sean tan simples como sea posible:

3.4 Definición. Sea M una superficie plana (posiblemente con singularidades),

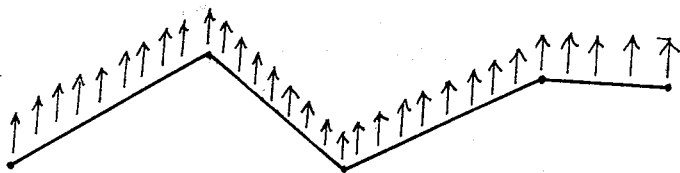


Fig. 9 El transporte paralelo de un vector en una poligonal geodésica.

decimos que un campo vectorial F en M es *localmente constante* si es un campo continuo de vectores tangentes definido fuera de sus singularidades, los vectores de F tienen norma idénticamente uno y su pendiente es localmente constante.

Obviamente usamos los conceptos usuales de vector tangente (ver [31]), norma y pendiente en \mathbf{R}^2 . Es fácil ver, usando el Lema de zurcido invisible, que esos conceptos están bien definidos fuera de los vértices de M . El interés en este tipo de campos está motivado por el siguiente:

3.5 Lema. *Sea F un campo vectorial continuo definido en una superficie plana, fuera de sus singularidades. Todas las curvas solución de F son geodésicas parametrizadas con velocidad de norma uno en M si y sólo si el campo vectorial es localmente constante.*

Demostración. Basta observar que usando el Lema de zurcido invisible, el vector de velocidad de toda curva parametrizada $\gamma(t) : (a, b) \rightarrow M$ está bien definido, suponiendo que la curva evita las singularidades de M . Es fácil mostrar que una curva parametrizada recorre un segmento de geodésica con velocidad de norma uno si y sólo si su velocidad es localmente constante y de norma idénticamente uno. \square

Nuestro problema ahora es caracterizar las superficies planas que admiten un campo vectorial localmente constante.

En todo lo que sigue $S \subset M$ denota el conjunto de puntos singulares de la superficie plana M . Una *poligonal geodésica* en una superficie plana M es una curva continua y orientada formada por un número finito de segmentos de geodésica en $M - S$. Como toda poligonal geodésica evita los vértices de M , dado un vector sobre algún punto de ella, él define una familia de vectores tangentes sobre toda la poligonal de acuerdo a la siguiente:

3.6 Definición. El *transporte paralelo de un vector $v \in T_p M$ a lo largo de una poligonal geodésica γ* , con punto inicial y final p , es una función que asigna a cada vector tangente en el punto inicial de la poligonal el vector tangente en el punto final

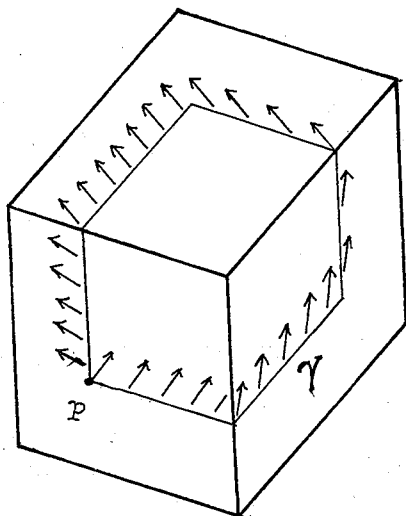


Fig.10 El transporte paralelo alrededor de un vértice en un cubo.

de la poligonal obtenido como sigue:

- 1) trasladando el vector inicial a lo largo del primer segmento de geodésica de tal forma que el vector permanece con norma constante y formando ángulo constante con el segmento de recta,
- 2) al llegar a la unión de dos rectas en la poligonal se conserva el ángulo correspondiente que forman el vector con el nuevo segmento geodésico y se repite (1) a lo largo del nuevo segmento de geodésica,
- 3) el proceso continúa hasta llegar al punto final de la poligonal, ver Fig. 9.

Una discusión más amplia del concepto de transporte paralelo en geometría diferencial puede hallarse en [6] o [16]. Como ejemplo del transporte paralelo, en la figura 10 se muestra como es el transporte paralelo de un vector a lo largo de una poligonal que encierra un vértice en un cubo.

Si la poligonal geodésica es cerrada, el transporte paralelo como función del vector v es simplemente una rotación por un ángulo fijo en el plano tangente T_pM en el punto inicial de la poligonal.

3.7 Ejercicio. Calcula la rotación dada por el transporte paralelo en los siguientes casos:

- 1) En el cilindro cuando la poligonal cerrada da una vuelta al cilindro.
- 2) En el cono con vértice de ángulo θ , cuando la poligonal cerrada da una vuelta alrededor del vértice.
- 3) En el plano con un punto singular (Ejemplo 1.6), cuando la poligonal cerrada da

una vuelta alrededor del punto singular.

3.8 Lema. *El transporte paralelo a lo largo de una poligonal geodésica encerrando un vértice es la identidad si y sólo si el vértice tiene ángulo cónico $2n\pi$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ etc.*

Demostración. Basta usar la Fig. 8. □

Si $S \subset M$ es el conjunto de puntos singulares de la superficie plana M , fijando un punto $p \in M - S$ podemos definir una función de *holonomía* de M como:

$$\begin{aligned} \text{Hol} : (M - S) \times \Omega \times T_p M &\rightarrow T_p M \\ (p, \gamma, v) &\mapsto \text{Hol}(p, \gamma, v). \end{aligned}$$

Donde, Ω es el conjunto de todas las poligonales geodésicas cerradas en $M - S$, mientras que $\Omega(p)$ es el subconjunto de poligonales geodésicas cerradas con punto inicial $p \in M - S$ un punto no singular y $T_p M$ es el espacio vectorial de todos los vectores tangentes a M en p . La función de holonomía $\text{Hol}(p, \gamma,)$ asocia a cada vector $v \in T_p M$ el vector que resulta hacer su transporte paralelo a lo largo de la poligonal geodésica cerrada $\gamma \in \Omega(p)$.

3.9 Definición. Una superficie plana tiene *holonomía trivial* si el transporte paralelo de cualquier vector a lo largo de toda poligonal geodésica es la identidad.

Holonomía trivial es equivalente a decir que la función

$$\text{Hol}(p, \gamma,) : T_p M \rightarrow T_p M$$

es la identidad para todo punto no singular p y toda poligonal γ como función de $v \in T_p M$.

3.10 Ejercicio. Muestra que si $\text{Hol}(p, \gamma,)$ es la identidad para un punto fijo p y toda $\gamma \in \Omega(p)$, entonces lo es para todo p en M . Esto es, para averiguar si la holonomía de M es trivial basta calcular la función de holonomía $\text{Hol}(p, ,)$ con respecto a un solo punto p .

De hecho es fácil mostrar que si dos poligonales cerradas son tales que su unión forma la frontera de un disco en M sin singularidades, entonces sus funciones de holonomía son iguales como funciones de $T_p M$. Por lo que para mostrar que una superficie plana tiene holonomía trivial, basta calcular el transporte paralelo de una colección de poligonales geodésicas tales que tienen el mismo punto inicial y hay una poligonal en cada clase de homotopía de lazos en $M - S$. La anterior observación es importante pues si M es compacta nos dice que para comprobar si tiene holonomía trivial basta calcular el transporte paralelo en un número finito de poligonales geodésicas (ya que por la hipótesis de compacidad sólo hay un número finito de clases de homotopía

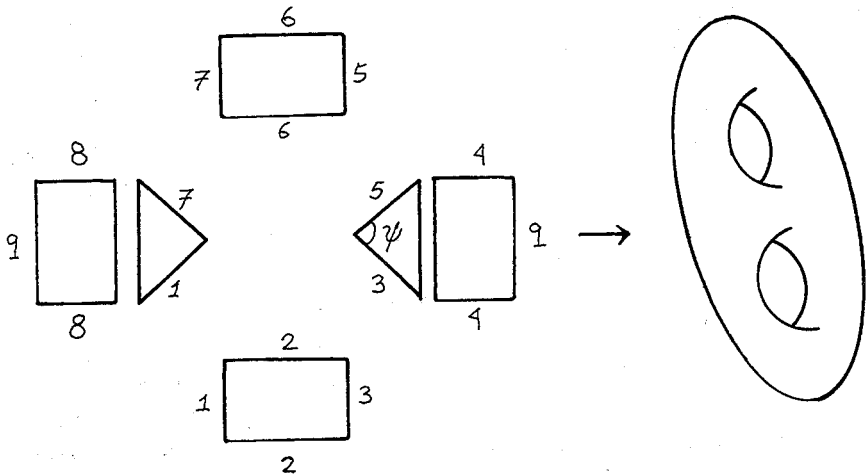


Fig. 11 Una superficie plana con holonomía no trivial.

de lazos en $M - S$, ver por ejemplo [20]). Un tratamiento detallado de la holonomía desde el punto de vista de la geometría diferencial puede verse en [16].

3.11 Ejemplo. Un superficie plana con holonomía no trivial (teniendo sólo vértices con holonomía trivial). Consideremos el toro menos dos puntos, con una estructura plana que viene de identificar dos pantalones planos singulares como indica la Fig. 11. Hay solo dos vértices que son puntos singulares con ángulo cónico 4π , de donde la holonomía alrededor de ellos es trivial. Sin embargo es posible mostrar que existen ángulos ψ haciendo que la holonomía de la poligonal β es no trivial (en la figura se identifican los lados de los polígonos como indican los números).

Tenemos ya los elementos para caracterizar las superficies planas que admiten un campo vectorial localmente constante.

3.12 Teorema de existencia de campos vectoriales localmente constantes en superficies planas. Sea M una superficie plana, orientable con puntos singulares $S \subset M$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1) La superficie M tiene holonomía trivial.

2) Existe un campo vectorial F en $M - S$ localmente constante.

Demostración. Dada M como unión de polígonos satisfaciendo (1) deseamos asignar a cada punto de $M - S$ un vector tangente, de manera continua. Elegimos P cualquier polígono en M y pongamos en su interior un campo de pendiente constante con norma uno. Vamos a mostrar que es posible extender este campo a todo $M - S$. Las dificultades que debemos resolver son las siguientes.

¿ Como definir el campo a través de una arista ?

¿ Que pasa con el campo alrededor de un vértice ?

Sobre lo primero: por el Lema de zurcido invisible un punto en el interior de una arista tiene una vecindad isométrica a un abierto de \mathbf{R}^2 , de ahí se sigue que si el campo está definido en la mitad de esta vecindad es posible extenderlo a través de la arista, dejamos los detalles al lector. Así podemos continuar extendiendo el campo entre polígonos contiguos. Sin embargo al continuar con ese proceso pudiera suceder que regresáramos al polígono inicial por otra cara distinta de la que hemos partido, ¿ como podríamos garantizar que el proceso de extensión está bien definido ? Usando la condición de holonomía trivial, se sigue que el campo debe regresar exactamente sobre sí mismo, de donde el proceso de extensión está bien definido fuera de los vértices.

Desafortunadamente nuestros campos no pueden definirse de manera continua en los vértices a menos de que el ángulo en el vértice correspondiente fuera 2π , por ello debemos omitir esos puntos en la definición del campo vectorial. Por la hipótesis de holonomía trivial, mediante el Lema 3.8 es posible mostrar que la superficie tiene vértices con ángulo cónico $2\pi n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ etc., de donde el campo asume en los vértices los modelos locales ya conocidos (ver Fig. 8).

Inversamente, si el campo vectorial existe, calcula primeramente el transporte paralelo de un vector del campo vectorial localmente constante a lo largo de poligonales geodésicas, en efecto el transporte paralelo de un vector del campo está dado por los vectores del campo en los puntos correspondientes, de donde su holonomía es trivial. \square

Una conclusión importante es que en una superficie M con holonomía trivial todo campo vectorial localmente constante F tiene singularidades exactamente en los puntos singulares de M , y esas singularidades están descritas por los modelos en la Fig. 8.

Usando el Ejercicio 3.7.1 podemos ver que el transporte paralelo a través de poligonales geodésicas que encierran puntas de M es la identidad, por lo que la existencia de puntas no obstruye la existencia de campos vectoriales localmente constantes.

3.13 Teorema. *Toda superficie topológica compacta, orientable de género $g \geq 1$, admite una estructura plana, completa (posiblemente con singularidades) tal que existe en ella un campo vectorial localmente constante.*

Demostración. Debemos construir la superficie como superficie plana con holonomía trivial y luego describir el campo. Si M es el toro (caso $g = 1$), obtenido de identificar un rectángulo (Ejemplo 1.2) el campo localmente constante en el rectángulo sigue estando bien definido después del pegado.

Si la superficie tiene género $g \geq 2$ mediante la suma conexa de g toros (provistos de campos vectoriales localmente constantes), es posible obtener estructuras planas con holonomía trivial. De donde se sigue la existencia de campos vectoriales localmente constantes (dejamos los detalles al lector). \square

Es fácil ver que en general la estructura plana del teorema anterior no es única (salvo isometrías), y lo mismo ocurre para el campo vectorial.

Si M es topológicamente una esfera es posible mostrar, usando el teorema de Gauss Bonnet (ver Teorema 6.1), que no existen estructuras planas compactas sobre ella con holonomía trivial. Sin embargo si permitimos la aparición de puntas es posible hallar estructuras planas con holonomía trivial. Por ejemplo el pantalón plano singular es una estructura en la esfera menos tres puntos con holonomía trivial (consideramos que las tres puntas en el pantalón plano singular son los puntos removidos de la esfera, mientras que el único punto singular está en la esfera). El lector podrá construir sin dificultad campos vectoriales localmente constantes en esa estructura plana, más aún:

3.14 Corolario. *Para todo entero $n \geq 3$, existen en la esfera menos n puntos estructuras planas con holonomía trivial.*

Demostración. Basta pegar un número adecuado de pantalones planos singulares. \square

Otra posibilidad es explorar qué sucede para otras superficies, por ejemplo:

3.15 Ejercicio. Discute si existen en la botella de Klein y la banda de Möbius estructuras planas completas (posiblemente con singularidades) y con holonomía trivial.

Pasamos ahora a estudiar los sistemas dinámicos asociados a campos vectoriales localmente constantes:

3.16 Definición. Sea E un espacio topológico, un sistema dinámico en E con tiempo \mathbf{R} es una función $\Lambda : \mathbf{R} \times E \rightarrow E$, tal que satisface las siguientes condiciones:

- 1) $\Lambda(t, \Lambda(s, e)) = \Lambda(t + s, e)$,
 - 2) $[\Lambda(t, e)]^{-1} = \Lambda(-t, e)$,
- para todo $e \in E$ y $t, s \in \mathbf{R}$.

Es útil pensar que E es el espacio de todos los posibles estados de algún fenómeno y \mathbf{R} es el tiempo, así interpretamos Λ como la función que describe los cambios de estado conforme el tiempo transcurre. La condición (1) nos dice que el cambio observado en los estados después de transcurrir un tiempo s y luego un tiempo t es el mismo que ocurrirá después de un tiempo $t + s$. Mientras que la condición (2) nos dice que para mover el tiempo hacia el pasado en t unidades, basta aplicar la función inversa de $\Lambda(t, \cdot) : E \rightarrow E$. Existen muchos tipos de sistemas dinámicos (continuos, medibles, diferenciables,...), dependiendo de propiedades adicionales que reúnan Λ ó E , para más detalle ver [25], [30] o [33].

Sea M una superficie plana provista de un campo vectorial F localmente constante, intuitivamente el flujo del campo vectorial F describe el movimiento de partículas en

M bajo la influencia de la fuerza F . La pregunta natural es:

¿ Define el flujo de un campo vectorial localmente constante F un sistema dinámico en M ?

Vamos a mostrar que la respuesta es afirmativa, con la probable excepción de un conjunto de medida cero en M . Examinemos que pasa en la vecindad de una arista de ángulo cónico $(2 + 2n)\pi$, donde $n \geq 1$, ver Fig. 8. Para aquellas partículas (puntos en M) que se mueven a lo largo de curvas solución de F que no son separatrices es posible definir el flujo. Mientras que si una partícula está sobre una separatriz entonces su movimiento no está definido para todo tiempo. Si está en una separatriz en la que el campo apunta hacia el vértice entonces para un tiempo finito llegara al vértice y ya no es posible definir su movimiento para tiempo mayor. Algo similar ocurre sobre las separatrices que emanan del vértice. Así pues la dinámica de un vértice es tal que se comporta como una fuente en $n + 1$ separatrices y como pozo en las restantes $n + 1$ separatrices.

3.17 Ejemplo. En la superficie del plano con un punto singular un campo vectorial localmente constante se ve como una silla con cuatro separatrices y cuatro sectores hiperbólicos. En efecto es posible representar este campo vectorial en coordenadas de \mathbf{R}^2 como

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y},$$

los semiejes en x y y corresponden a las cuatro separatrices y es fácil mostrar que el flujo está definido sólo para tiempo finito en ellas. Cada cuadrante en \mathbf{R}^2 corresponde a un medio plano en la construcción original, Ejemplo 1.6.

Para evitar problemas vamos a remover de M las separatrices.

3.18 Definición. Sea M una superficie plana posiblemente con singularidades $S \subset M$ provista de un campo vectorial localmente constante F , el flujo de F es una función

$$\phi : \mathbf{R} \times (M - K) \rightarrow (M - K),$$

donde K es la unión de todas las geodésicas que son separatrices del campo vectorial y donde ϕ es definida como $\phi(t, p) = q$ siguiendo las reglas:

- 1) si $t \geq 0$, entonces q es el extremo final de la geodésica tangente al campo F y de longitud t con punto inicial p ;
- 2) si $t < 0$, entonces q es el extremo inicial de la geodésica tangente al campo F y de longitud t con punto final p .

Es posible definir el flujo para puntos en las separatrices de F pero sólo para algunos valores del tiempo. Sin embargo el siguiente ejercicio demuestra que nuestra definición trabaja casi en todo punto de M .

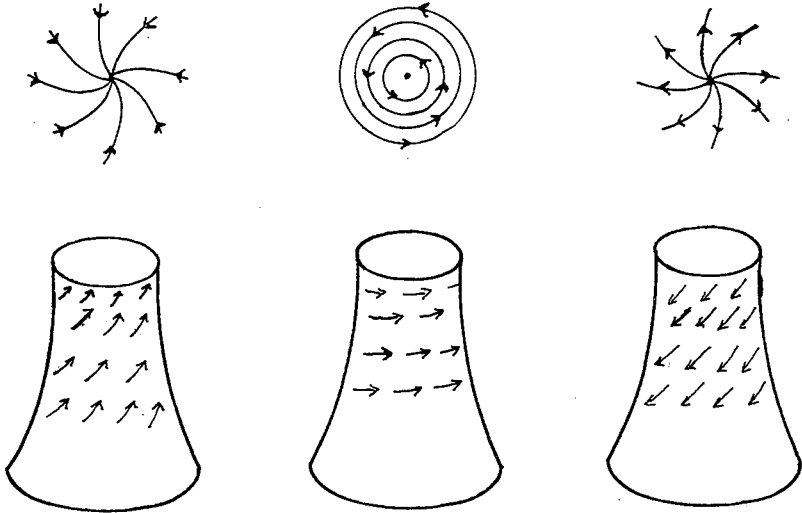


Fig. 12 El flujo en una vecindad de p es: pozo, centro ó fuente.

3.19 Ejercicio. Muestra que como M tiene un número a lo más numerable de vértices, entonces K tiene medida cero en M .

El flujo en una punta de la estructura plana de M admite una descripción simple. Sea $C \subset M$ una vecindad abierta que contiene a una punta de M (como en la Definición 2.7), es fácil ver que el flujo asume uno de los siguientes tres tipos de comportamientos: pozo, centro ó fuente (ver Fig. 11).

Procedemos ahora a construir medidas invariantes para el flujo usando el Lema 1.9.

3.20 Corolario. *Sea M una superficie plana y F un campo vectorial localmente constante en M .*

1) *El flujo de F preserva la medida de Lebesgue μ en M , esto es, si $A \subset M$ es un conjunto medible de M entonces $\mu(A) = \mu(\phi(t, A))$, para todo $t \in \mathbf{R}$.*

2) *El flujo de F preserva localmente la distancia entre dos soluciones.* \square

La parte (2) es interesante pues nos dice que campos vectoriales localmente constantes en superficies compactas, definen *foliaciones con medida transversa* en el sentido de J. Plante, ver [8], [13], [14], [19], [26], [27], [35] para un estudio de las propiedades de ese tipo de foliaciones.

3.21 Ejercicio. Muestra que un campo vectorial localmente constante en una superficie plana M es tal que:

- 1) No tiene curvas solución cerradas aisladas, de hecho sus curvas solución cerradas aparecen en bandas, i. e. cilindros con geodésicas cerradas paralelas.
- 2) No tiene curvas solución que sean ciclos límites.

4 EL FLUJO GEODESICO DE UNA SUPERFICIE PLANA

Empecemos por describir el flujo geodésico en el plano euclideo \mathbf{R}^2 . Si hacemos moverse una partícula en el plano, teniendo velocidad uno y sin fricción, la partícula se moverá describiendo una geodésica. Es fácil predecir la posición de la partícula para todo tiempo en el pasado o futuro, conociendo únicamente dónde se encontraba a tiempo cero y cuál era su velocidad inicial. El flujo geodésico de \mathbf{R}^2 es precisamente la función que describe las trayectorias de todas las posibles partículas como antes. Para definirlo rigurosamente necesitamos algunos conceptos.

4.1 Definición. El *espacio tangente unitario de \mathbf{R}^2* es el espacio formado por todas las parejas

$$T_1\mathbf{R}^2 = \{(p, v) \mid p \in \mathbf{R}^2, v \text{ es un vector de norma uno tangente a } \mathbf{R}^2 \text{ en } p\}.$$

Para una revisión de la definición de espacio tangente ver [31]. Podemos observar que el espacio tangente unitario de \mathbf{R}^2 es un espacio topológico de dimensión tres que es homeomorfo al producto $\mathbf{R}^2 \times S^1$, donde el círculo S^1 parametriza la dirección de los vectores $\{v\}$.

4.2 Definición. El *flujo geodésico de \mathbf{R}^2* es la función definida como:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{R} \times T_1\mathbf{R}^2 &\rightarrow T_1\mathbf{R}^2 \\ (t, p, v) &\mapsto (p + tv, v) \end{aligned}$$

donde en la derecha tenemos la suma usual de vectores en \mathbf{R}^2 , pensando que el vector tangente v es él mismo un elemento de \mathbf{R}^2 .

Observemos que $p + tv \in \mathbf{R}^2$ es precisamente la posición que ocupa al tiempo t una partícula en \mathbf{R}^2 que en el tiempo $t = 0$ se hallaba pasando por el punto p con velocidad v , de donde el flujo geodésico Φ describe el movimiento de todas las posibles partículas en \mathbf{R}^2 . En la Fig. 13, si graficamos $T_1\mathbf{R}^2$ usando la coordenada vertical como el ángulo de los vectores unitarios v , entonces los planos $\{v = \text{constante}\}$ en $T_1\mathbf{R}^2$ modelan el movimiento de todas las partículas en \mathbf{R}^2 con la misma velocidad v , conforme cambiamos el vector de velocidad v cambiamos también de plano horizontal.

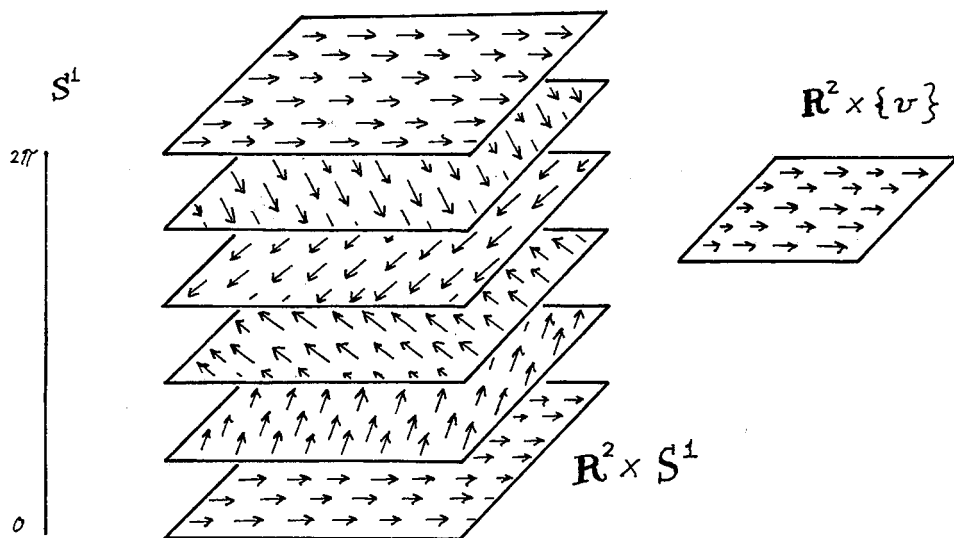


Fig. 13 El flujo geodésico de \mathbb{R}^2 .

4.3 Ejercicio. Muestra que Φ como función de t satisface las siguientes relaciones bajo la composición:

1) $\Phi(t, \cdot, \cdot) \circ \Phi(s, p, v) = \Phi(t + s, p, v)$.

2) $[\Phi(t, \cdot, \cdot)]^{-1} = \Phi(-t, \cdot, \cdot)$,

donde el símbolo $[\]^{-1}$ significa la función inversa.

Esto es, el flujo geodésico define un sistema dinámico en $T_1\mathbb{R}^2$, de acuerdo a la Definición 3.16.

4.4 Lema. El flujo geodésico Φ como función de t preserva una medida de Lebesgue $\bar{\mu}$ en $T_1\mathbb{R}^2$.

Demostración. Definimos la medida $\bar{\mu}$ como el producto de las medidas usuales en \mathbb{R}^2 y S^1 , observemos que $\bar{\mu}$ es de hecho la forma de volumen del espacio $\mathbb{R}^2 \times S^1$. \square

4.5 Proposición. En toda M una superficie plana posiblemente con singularidades en $S \subset M$, los siguientes conceptos están bien definidos:

1) El haz tangente unitario $T_1(M - S)$.

2) El flujo geodésico Φ en $T_1(M - S)$, con la probable excepción de un conjunto $\bar{K} \subset T_1(M - S)$ de medida cero.

3) El flujo geodésico Φ preserva la medida de Lebesgue $\bar{\mu}$ en $T_1(M - S)$.

Demostración. El punto (1) sigue del Lema de zurcido invisible, obviamente el haz

tangente unitario está bien definido en un vértice si y sólo si el vértice tiene ángulo cónico 2π .

Para definir el flujo geodésico debemos remover todas aquellas geodésicas que tienen algún extremo inicial ó final en un vértice singular de M . El conjunto de todas esas geodésicas $\bar{K} \subset T_1(M - S)$ es de medida cero con respecto a la medida $\bar{\mu}$.

Usando la descripción local de Φ en la Definición 4.2 es posible mostrar que $\bar{\mu}$ es preservada por Φ . \square

El flujo geodésico Φ contiene toda la información sobre las geodésicas de M , en particular:

4.6 Observación. Una geodésica cerrada de $M - S$ es un *punto periódico* del flujo geodésico en $T_1(M - S)$, esto es un punto $(p, v) \in T_1(M - S)$ tal que existe $t_0 > 0$ con $\Phi(t_0, p, v) = (p, v)$.

Una consecuencia del Corolario 3.20.2 es que si el flujo geodésico Φ tiene un punto periódico entonces tiene en la vecindad de él un continuo de puntos periódicos.

4.7 Ejercicio. Describe el flujo geodésico de las siguientes superficies planas singulares, discute en cada caso la existencia de geodésicas cerradas.

- 1) El tetraedro (obtenido de identificar cuatro triángulos equiláteros).
- 2) El cubo.
- 3) El pantalón plano singular.

4.8 Problema. *Estudiar bajo qué condiciones el flujo geodésico de un poliedro compacto i. e. de una superficie plana compacta con singularidades es ergódico (un sistema dinámico se llama ergódico si sus únicos conjuntos invariantes son de medida cero ó total, ver [33]).*

Se sabe que si M es compacta y todos sus ángulos cónicos son múltiplos racionales de π , el flujo geodésico no es ergódico, ver Teorema 5.4 y [9].

Por otra parte, una teorema famoso afirma que toda superficie compacta (con cualquier métrica de Riemann) tiene al menos una geodésica cerrada (Teorema de Lusternik y Fet, ver [19]).

¿ Todo poliedro compacto tiene geodésicas cerradas ?

Para más información sobre poliedros compactos ver [7], [9], [10], [15].

4.9 Ejemplo. La figura 14 muestra una curva de longitud mínima en una clase de homotopía de un poliedro menos sus vértices tal que no es una geodésica de acuerdo a nuestra definición.

4.10 Problema. *Es bien conocido un Teorema que afirma que en cada clase de*

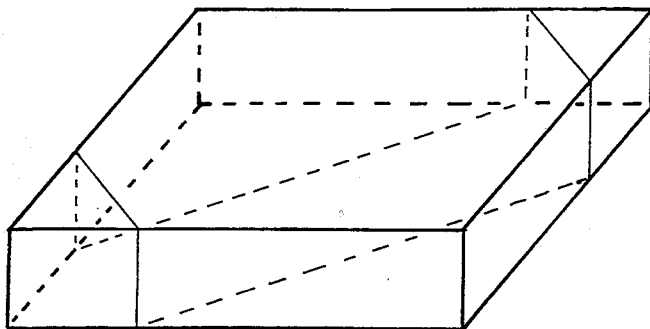


Fig. 14 Una curva de longitud mínima.

homotopía de una superficie compacta (con cualquier métrica de Riemann) existe al menos una geodésica cerrada con esa clase de homotopía, ver por ejemplo [11]. Un problema natural es averiguar si este resultado se extiende para superficies planas M con singularidades S , naturalmente es necesario considerar clases de homotopía y geodésicas cerradas en $M - S$. Es fácil construir ejemplos donde no existen geodésicas cerradas en cada clase de homotopía en $M - S$, así que el problema es precisar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de tales geodésicas.

5 DESCOMPOSICION DEL FLUJO GEODESICO

El problema que vamos a discutir en esta sección es el siguiente: considere M una superficie plana (posiblemente con singularidades) orientada y con holonomía trivial, provista de un campo vectorial localmente constante F . Es posible definir una función de rotación en vectores tangentes

$$R_\theta : T_1(M - S) \rightarrow T_1(M - S) ,$$

donde R_θ rota cada vector tangente en $M - S$ por un ángulo $\theta \in S^1$ en la dirección positiva con respecto a la orientación de M . Cualquier campo vectorial F puede rotarse por θ . Nuestro problema es el siguiente:

¿ Como cambia la topología de las soluciones de un campo vectorial localmente constante F cuando se rota el campo F ?

Para una discusión de este problema para campos vectoriales rotados C^∞ en el plano \mathbb{R}^2 ver [25]. Necesitamos precisar algunos conceptos:

5.1 Definición. Sea F un campo vectorial localmente constante en M una superficie

plana (posiblemente con singularidades). Una familia de campos rotados es:

$$\{F_\theta = R_\theta F \mid \theta \in S^1\},$$

donde S^1 es el círculo que parametriza los ángulos entre 0 y 2π .

5.2 Definición. Decimos que un ángulo $\theta \in S^1$ es un valor de bifurcación de la familia $\{F_\theta\}$ si existen valores $\theta' \in S^1$ arbitrariamente cercanos a θ en S^1 tal que no existe un homeomorfismo $H : M \rightarrow M$ enviando las soluciones del campo F_θ en las del campo $F_{\theta'}$. El conjunto de todos los ángulos $\{\theta\} \subset S^1$ tales que son valores de bifurcación de $\{F_\theta\}$ se conoce como el diagrama de bifurcación de la familia $\{F_\theta\}$.

5.3 Ejemplos. 1) El diagrama de bifurcación de una familia de campos localmente constantes, no singulares en el cilindro consta de dos puntos en S^1 .

2) El diagrama de bifurcación del campo localmente constante en el plano con un punto singular (Ejemplo 3.6), es vacío.

3) El diagrama de bifurcación de un campo vectorial localmente constante en el pantalón plano singular consta de seis puntos de bifurcación.

5.4 Teorema de integrabilidad del flujo geodésico. Sea M una superficie plana (posiblemente con singularidades) que tiene holonomía trivial. El haz tangente unitario de M admite una descomposición dada por una familia de superficies

$$\{M_\theta \mid \theta \in S^1\} = T_1 M$$

invariantes bajo el flujo geodésico, y donde cada superficie M_θ es homeomorfa a M .

Demostración. Dado un punto no singular $p \in M$ para cada vector unitario $v \in T_p M$ usando la hipótesis de holonomía trivial es posible definir de manera única un campo vectorial localmente constante en M cuyo valor en p es v .

Cada uno de estos campos vectoriales definen una superficie en $T_1 M$ y cada superficie es invariante bajo el flujo. \square

Una justificación para usar la palabra “integrabilidad” viene de que el valor θ es preservado por el flujo geodésico, en analogía con los sistemas dinámicos hamiltonianos decimos entonces que la cantidad θ es una primera integral del sistema dinámico, de donde, es integrable en el sentido hamiltoniano, ver [17] para una mayor información.

Es posible mostrar que existe una correspondencia uno a uno entre las superficies $\{M_\theta\}$ y la familia $\{F_\theta\}$ de todos los campos rotados localmente constantes en M . Por lo que el anterior Teorema de integrabilidad nos permite descomponer el flujo geodésico (definido en $T_1(M - S)$ que es tres dimensional), como la unión de sistemas dinámicos en cada superficie invariante M_θ .

Por otra parte la hipótesis de que M tenga holonomía trivial es muy restrictiva, vagamente dicho, casi ninguna superficie plana (en el “espacio” de todas las superficies

planas), tiene holonomía trivial. Si la holonomía de M es no trivial, en algunos casos (por ejemplo, cuando la imagen de la holonomía es finita), existe una descomposición similar de T_1M ver [9].

Como una aplicación de lo anterior tenemos el siguiente:

5.5 Corolario. *No existe superficie plana (posiblemente con singularidades), que tenga un campo vectorial localmente constante y sólo tenga una punta.*

Demostración. Por contradicción, consideremos en la superficie cualquier campo localmente constante. Es posible rotarlo de tal forma que se transforme en un campo localmente constante donde la única punta es como una fuente, i. e. el flujo va de la punta hacia el resto de la superficie, ver Fig. 12. Esto es imposible pues el flujo posee una medida invariante y la medida de la superficie menos la punta es necesariamente finita. \square

6 ALGUNAS SUGERENCIAS PARA ESTUDIO POSTERIOR

Dada una superficie topológica existen una infinidad de métricas de Riemann en ellas, entre las más usadas están:

- 1) Aquellas que vienen de encajar la superficie en \mathbf{R}^3 .
- 2) Métricas de Riemann de curvatura Gaussiana constante (que siempre existen por el teorema de Uniformización).

Las propiedades de esas superficies están ampliamente estudiadas desde el punto de vista de la geometría diferencial, análisis complejo y sistemas dinámicos. Las estructuras planas que hemos presentado aquí forman una tercera familia de métricas de Riemann con singularidades. Creemos que para objetos de este último tipo hay todavía mucho por decir. Una introducción a su geometría con una prueba del Teorema de Gauss Bonnet para este tipo de objetos se puede leer en [34].

6.1 Teorema de Gauss Bonnet para superficies singulares. *Sea M una superficie plana, compacta con singularidades, si $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ son los ángulos cónicos de sus puntos singulares entonces:*

$$\sum_i (2\pi - \theta_i) = 2\pi\chi(M),$$

donde $\chi(M)$ es la característica de Euler Poincaré de M . \square

De hecho un problema muy complicado (y útil) es el clasificar en algún sentido todas las estructuras planas de una superficie topológica dada, ver [3], [29]. Usar estructuras complejas es también interesante, en efecto: una superficie orientable plana con singularidades de ángulo cónico $(2 + 2n)\pi$ y a lo más puntas posee una estructura conforme (i. e. una forma de medir ángulos) que se extiende a las singularidades y a la perforaciones de las puntas. Por lo que una estructura plana determina en

la superficie topológica una estructura de superficie de Riemann. El estudio de sus estructuras conformes asociadas es lo que se conoce como la teoría de diferenciales cuadráticas ver [32], [34]. Más explícitamente se tiene el siguiente resultado:

6.2 Teorema. [22], [32] *Existe una correspondencia uno a uno entre:*

- 1) *Campos vectoriales localmente constantes en superficies planas admitiendo a lo más singularidades de ángulo cónico 4π y puntas.*
- 2) *Campos vectoriales meromorfos en superficies de Riemann con a lo más polos y ceros de orden uno.*
- 3) *Diferenciales cuadráticas meromorfas y orientables en superficies de Riemann con a lo más polos y ceros de orden dos (sin ceros o polos de orden uno).* \square

Más detalladamente en este caso los vértices de ángulo cónico 4π en M producen polos de orden uno en el campo vectorial meromorfo y las puntas de M corresponden a ceros también de orden uno. Mientras que un cero de orden uno en un campo meromorfo produce un polo de orden dos en la correspondiente diferencial cuadrática.

El resultado anterior es interesante pues nos dice que los campos vectoriales meromorfos en superficies de Riemann son casos particulares de flujos geodésicos en poliedros. Es posible para distintas familias de campos meromorfos construir los poliedros asociados ver [22], [23], [36].

El caso donde la superficie M es compacta y sólo posee vértices de ángulos múltiplos racionales de π , corresponde al estudio de campos vectoriales con sólo polos o equivalentemente a diferenciales cuadráticas holomorfas. En este caso se conoce bastante acerca de la ergodicidad de las soluciones de campos localmente constantes [15]. En particular este tipo de sistemas dinámicos están relacionados con billares en polígonos [15] y sistemas dinámicos de intercambio de intervalos [19]. Un ejemplo de resultados en esta dirección es el siguiente:

6.3 Teorema. [15] *Sea M una superficie compacta plana con un campo localmente constante F . Para casi todo ángulo $\theta \in S^1$, casi todas las curvas solución de F_θ son densas y el flujo de F_θ es únicamente ergódico.* \square

Como un corolario de lo anterior tenemos.

6.4 Corolario. *Sea M una superficie compacta plana con un campo localmente constante F . Todo punto en $S^1 = \{\theta\}$ es punto de bifurcación de los campos rotados $\{F_\theta\}$.* \square

El caso donde el campo vectorial tiene polos y ceros de orden uno, que es el caso genérico desde el punto de vista de sistemas dinámicos casi no ha sido estudiado. En el caso donde la topología de M es simple se tiene:

6.5 Teorema. [23], [36] *Sea M una superficie plana con singularidades, tal que sólo*

tiene puntos singulares de ángulo cónico 4π y puntas, adicionalmente M es homeomorfa a la esfera menos posiblemente un número finito de puntos (correspondientes a las puntas). Para todo campo localmente constante en M su diagrama de bifurcación tiene a lo más un número finito de puntos de acumulación de puntos de bifurcación.

□

Finalmente consideraremos aplicaciones de las superficies planas a la construcción de ecuaciones diferenciales, con alguna propiedad geométrica.

6.6 Teorema. [23], [36] *Considere en el plano complejo \mathbf{C} un campo vectorial polinomial complejo:*

$$F(z) = \operatorname{Re}(P(z)) \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{Im}(P(z)) \frac{\partial}{\partial y},$$

donde $P(z)$ es un polinomio complejo, Re , Im sus partes real e imaginaria y $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbf{C}$ como es usual. El diagrama de bifurcación de la familia de campos rotados $\{F_\theta\}$ consta de un número finito de puntos en S^1 . □

Decimos que un campo vectorial C^∞ en \mathbf{R}^2 tiene un centro isócrono en un punto si el campo se anula ahí y todas sus soluciones en una vecindad del punto son curvas cerradas del mismo período. Los centros isócronos fueron descubiertos por Ch. Huygens en el siglo XVII al estudiar el problema de construir péndulos para relojes con el mismo período en cada oscilación. La cuenca de un centro isócrono es el abierto maximal con la propiedad de que está formado por soluciones cerradas del mismo período. Para más información sobre centros isócronos ver [38]. El siguiente resultado permite reconocer algunos campos con centros isócronos:

6.7 Teorema. [22] *Sea F un campo vectorial C^∞ en \mathbf{R}^2 , supongase que F tiene centros isócronos y la unión de las cerraduras de las cuencas de sus centros isócronos llenan \mathbf{R}^2 . Entonces existe un difeomorfismo $\xi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ tal que transforma F en un campo polinomial complejo i. e. $\xi_*(F) = P(z)$, donde $P(z)$ es un campo polinomial complejo (identificando \mathbf{R}^2 con \mathbf{C} como es usual) y donde la derivada $P'(z)$ en todos sus ceros es imaginaria pura. Los ceros de P corresponden a los centros isocronos de F . □*

Hemos visto que los campos vectoriales meromorfos son tales que existe una métrica de Riemann haciendo sus curvas solución sean geodésicas. Una variación de lo anterior permite construir campos vectoriales singulares cuyas soluciones sean geodésicas en métricas de Riemann con curvatura variable.

6.8 Teorema [5] *Sea F un campo vectorial C^∞ en \mathbf{R}^2 , escrito en notación compleja como $F(z) = u(z) \frac{\partial}{\partial x} + v(z) \frac{\partial}{\partial y}$, donde $u, v : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ son C^∞ . Existe una métrica de Riemann g en \mathbf{R}^2 conforme con la métrica plana usual y tal que hace que las*

curvas solución de F sean geodésicas de g si y sólo si la función complejo valuada $u(z) + \sqrt{-1}v(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, satisface que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{u(z) + \sqrt{-1}v(z)} \right)$$

es una función real valuada. □

El interés del anterior resultado radica en que traduce el problema de hallar la métrica de Riemann g en un problema de ecuaciones diferenciales parciales donde aparece el operador complejo $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, cuya teoría es bien conocida. Y por otra parte es posible admitir que el campo F tenga singularidades. Usando lo anterior es fácil caracterizar y construir campos vectoriales con singularidades cuyas curvas solución sean geodésicas para métricas de Riemann en superficies arbitrarias, ver [5].

REFERENCIAS

- [1] I. R. Aitchinson, J. H. Rubinstein: *An introduction to polyhedral metrics of non-positive curvature on 3-manifolds*. En: *Geometry of Low Dimensional Manifolds* vol. II. Symplectic manifolds and the Jones–Witten theory. Cambridge University Press (1992), 127–161.
- [2] V. I. Arnold: *Ordinary Differential Equations*. MIT Press (1981).
- [3] B. H. Bowditch: *Singular euclidean structures on surfaces*. *Journal of the London Mathematical Society* 44 (1991), 553–565.
- [4] L. S. Charlap: *Bieberbach Groups and Flat Manifolds*. Universitext Springer–Verlag (1986)
- [5] H. Del Rio, J. Muciño Raymundo: *Singular geodesible vector fields on surfaces and complex structures*. Publicación preliminar (1994).
- [6] M. P. Do Carmo: *Differential Geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall (1976).
- [7] R. H. Fox, R. B. Kershner: *Concerning the transitive properties of geodesics on rational polyhedron*. *Duke Mathematical Journal* 2 (1936) 147–150.
- [8] C. Godbillon: *Fewilletages*. *Progress in Mathematics* vol. 98 Birkhäuser (1991).
- [9] E. Gutkin: *Billiards on almost integrable polyhedral surfaces*. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 4 (1984), 569–584.
- [10] E. Gutkin, N. Haydn: *Topological entropy of generalized polygon exchanges*. *Bulletin of the American Mathematical Society* 32, 1 (1995), 50–56.

- [11] J. Eells, L. Lemaire: *A report on harmonic maps*. Bulletin of the London Mathematical Society 10 (1978), 1–68.
- [12] H. Eves: *Estudio de las Geometrías 2 vols.* UTHEA (1985).
- [13] G. Hector, U. Hirsch: *Introduction to the Geometry of Foliations Part B*. Aspects of Mathematics vol. 3 Viewg (1987).
- [14] J. Hubbard, H. Masur: *Quadratic differentials and foliations*. Acta Mathematica 142 (1979), 221–274
- [15] S. Kerckhoff, H. Masur, J. Smillie: *Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials*. Annals of Mathematics 124 (1986), 293–311.
- [16] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry vol. 1*. Tracts in Mathematics 15 Wiley–Interscience (1969)
- [17] V. V. Kozlov, D. V. Treshchev: *Billiards*. Translations of Mathematical Monographs vol. 89 AMS (1991).
- [18] L. Lusternik, A. I. Fet: *Variational problems on closed manifolds*. Doklady Akad. Nauk. SSSR 81 (1951), 17–18.
- [19] H. Masur: *Interval exchange transformations and measured foliations*. Annals of Mathematics 115 (1982), 169–200.
- [20] J. Milnor: *A note in curvature and fundamental group*. Journal of Differential geometry 2 (1968), 1–7.
- [21] E. Moise: *Geometric Topology in dimensions 2 and 3*. GTM vol. 47 Springer–Verlag (1977).
- [22] J. Muciño Raymundo: *Complex structures adapted to smooth vector fields*. Publicación preliminar (1994).
- [23] J. Muciño Raymundo, C. Valero Valdés: *Bifurcations of meromorphic vector fields on the Riemann sphere*. Por aparecer en Ergodic Theory and Dynamical Systems.
- [24] J. F. Nash: *The imbedding problem for Riemannian manifolds*. Annals of Mathematics 63 (1956), 20–63.
- [25] L. Perko: *Differential Equations and Dynamical Systems*. TAM vol. 7 Springer–Verlag (1991).
- [26] J. Plante: *Foliations with measure preserving holonomy*. Annals of Mathematics 102 (1975), 327–361.
- [27] B. L. Reinhart: *Differential Geometry of Foliations*. Springer–Verlag, (1983).
- [28] I. Richards: *On the classification of noncompact surfaces*. Transactions of the American Mathematical Society 106 (1963), 259–269.
- [29] I. Rivin: *Euclidean structures on simplicial surfaces and hyperbolic volume*. Annals of Mathematics 139 (1994), 553–580.
- [30] S. Smale, M. W. Hirsch: *Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Algebra Lineal*. Alianza Universidad Textos (1983).
- [31] M. Spivak: *Calculo en Variedades*. Reverté (1984).

- [32] K. Strebel: *Quadratic Differentials*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete vol. 5 Springer-Verlag (1984).
- [33] W. Szlenk: *Teoría Ergódica*. Publicaciones del Departamento de Matemáticas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (1985).
- [34] M. Troyanov: *Les surfaces euclidiennes à singularités coniques*. L'Enseignement Mathématique 32 (1986), 79–94.
- [35] W. Thurston: *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*. Bulletin of the American Mathematical Society 19 (1988), 417–431.
- [36] C. Valero Valdéz: *Bifurcación de campos meromorfos sobre la esfera de Riemann*. Tesis profesional, Facultad de Ciencias UNAM (1993).
- [37] J. A. Wolf: *Spaces of Constant Curvature*. Mc. Graw-Hill (1967).
- [38] A. T. Winfree: *The geometry of biological time*. Biomathematics vol. 8 Springer-Verlag (1980).