¿QUE ES LA GEOMETRIA DIFERENCIAL?

Jesús Muciño
Becario del Instituto de Matemáticas, UNAM
Facultad de Ciencias, UNAM

El presente artículo bosqueja una respuesta a la pregunta que le da título. Se exponen algunos conceptos, resultados y problemas con el fin de dar al lector una visión introductoria del tema. Sin embargo para evitar un tratamiento demasiado largo no se discuten ni las demostraciones de los teoremas, ni los aspectos históricos.

El concepto central de la teoría es el de curvatura para superficies en el espacio euclidiano tridimensional. Iniciemos discutiendo el concepto de curvatura para curvas planas.

Deseamos asignar a cada curva una función real valuada que mida "qué tan distinta es la curva de una recta, en cada punto de la curva". Intuitivamente desearíamos que para círculos y rectas esta función fuese constante, ya que tanto los círculos como las rectas se curvan uniformemente, es decir la curva se ve igual desde cualquier punto.

Definición

Dada una curva plana C, si C es una recta su curvatura es idénticamente cero y si C es un círculo de radio r, su curvatura es idénticamente $1/r$.

Obsérvese que se utiliza $1/r$ con el fin de justificar que si se considera la recta como un caso límite de círculos—cuando el radio tiende a infinito— la curvatura del límite es el límite de las curvaturas. Además, mientras más pequeño es el círculo su curvatura es mayor.

Para definir curvatura en el caso general procedemos de la siguiente manera. Sean $p, q, g \in C$ puntos distintos entre sí, por lo que determinan un único círculo que los contiene. Si hacemos tender q y g a p obtenemos una sucesión de círculos, cuyo círculo límite es llamado el *círculo osculador* en p (ver fig. 1). No discutiremos aquí las hipótesis necesarias para las construcciones, para ello ver las referencias.

Definición

La *función de curvatura* para una curva plana C es

$$\begin{aligned} k : C &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto 1/r \end{aligned}$$

donde r es el radio del círculo osculador en p.

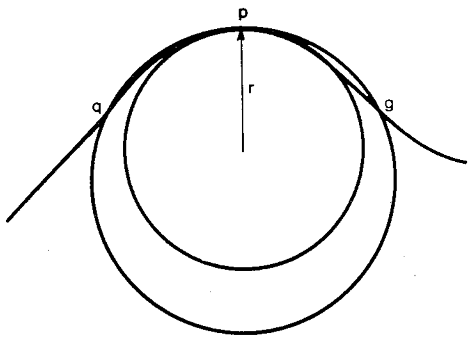


fig. 1

Esta definición utiliza los círculos como patrones, ajustando a la curva el círculo que más se le parece infinitesimalmente en p. Procedamos ahora a definir curvatura para superficies.

Una primera idea podría ser intentar seguir el camino anterior; tomar las esferas y el plano como patrones y tratar de ajustarlos infinitesimalmente a la superficie. Sin embargo ahora el proceso puede no estar bien definido, por ejemplo para una superficie como en la figura 2 hay dos esferas que se ajustan en el mismo punto y los tamaños de ellas no coinciden.

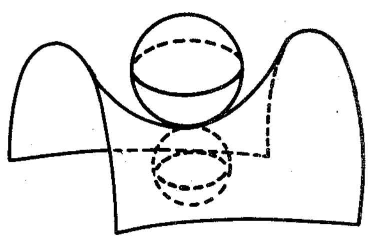


fig. 2

Es mejor seguir la idea de L. Euler. Sea S una superficie en el espacio euclidiano tridimensional; dado un punto p en S consideremos $N(p)$ un vector normal a S en p. Sea Q un plano que contiene a $N(p)$, entonces $Q \cap S$ es una curva plana y sea $k(Q)$ la curvatura de esa curva en el punto p, a la cual si es distinta de cero se le asocia un signo de la siguiente manera: decimos que $k(Q)$ es positiva si el centro del círculo osculador correspondiente está contenido en la semirecta determinada por $N(p)$ y es negativa si no está contenido en tal semirrecta (ver fig. 3). Por ejemplo para la superficie determinada por la ecuación $z = x^2 + y^2$ todas las curvaturas en el origen tienen el mismo signo —ya que la superficie es cóncava—mientras que para la superficie $z = x^2 - y^2$, en el origen hay curvaturas positivas y negativas. Es posible mostrar que el conjunto $k(Q)$ siempre tiene un máximo $k_1(p)$ y un mínimo $k_2(p)$, para cada punto p fijo.

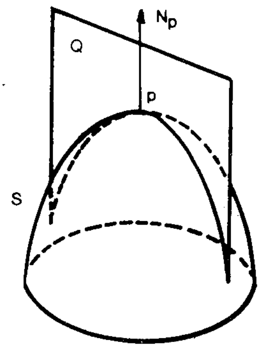


fig. 3

Definición (Euler)

La *función de curvatura* de la superficie S es

$$\begin{aligned} K : S &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto k_1(p)k_2(p). \end{aligned}$$

Una primera interpretación de K es que mide qué tan rápidamente se aleja S de su tangente en cada punto. Sin embargo la interpretación más clara fue obtenida por C. F. Gauss y es como sigue.

Para toda superficie S se define una aplicación $G : S \to E$, donde E es la esfera de radio uno con centro en el origen, de la siguiente manera: Sea N un campo continuo de vectores normales a S con norma unitaria. Dado un punto p en S, el vector $N(p)$ determina un punto en E al trasladarlo rígidamente de tal forma que su punto inicial sea el origen, su punto final es por definición $G(p)$, esta aplicación se conoce hoy como la *aplicación de Gauss* (ver fig. 4).

Definición (Gauss)

La *función de curvatura* de la superficie S es

$$\begin{aligned} \overline{K} : S &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \lim_{A \to p} \delta \frac{\text{área de } G(A)}{\text{área de } A} = \overline{K}(p) \end{aligned}$$

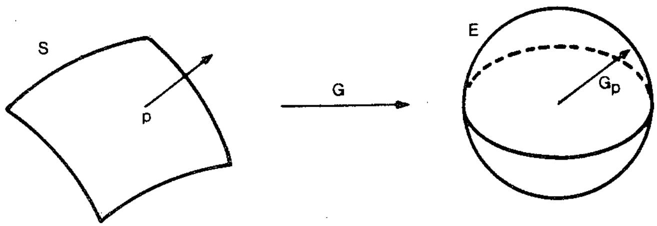


fig. 4

donde A es una vecindad de p en S, $A \to p$ significa que la vecindad tiende a p y δ está definida como

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{Si } G \text{ es un difeomorfismo local que conserva orientación en } p \\ & \text{o si } G \text{ no es difeomorfismo en } p. \\ -1 & \text{Si } G \text{ es un difeomorfismo local que invierte orientación en } p. \end{cases}$$

Intuitivamente decimos que G es un difeomorfismo local en p si existe una vecindad de p en la cual G es biyectiva diferenciable y con inversa diferenciable. Decimos además que conserva orientación si dada una pequeña curva orientada que rodea a p en S, al recorrerla su curva imagen bajo G también se recorre en el mismo sentido y que invierte la orientación si la recorre en sentido opuesto (ver fig. 5).

La pregunta natural ahora es ¿cómo están relacionadas las construcciones de Euler y Gauss para curvatura de superficies?

Teorema (Gauss)

Ambas definiciones de curvatura coinciden, i. e. $K(p) = \overline{K}(p)$.

Veamos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo

Si S es un plano, calculando según Euler $k(Q) = 0$ para todo p, pues las curvas $Q \cap S$ son rectas, por lo que $K = 0$. Calculando según Gauss

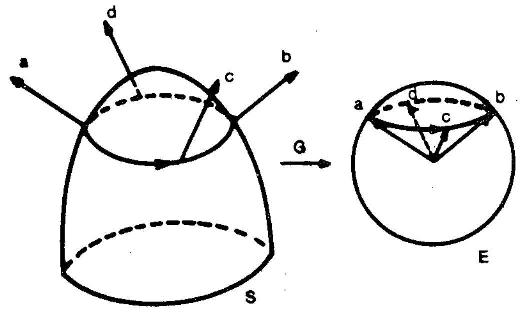
$$K(p) = \lim_{A \to p} 1 \frac{0}{\text{área de } A} = 0$$

ya que área de $G(A)$ = área de un punto = 0 (ver fig. 6).

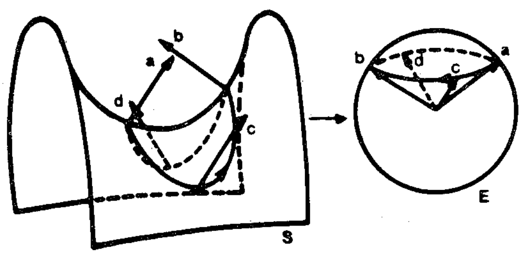
Ejemplo

Si S es la esfera de radio r, según el método de Euler $k(Q) = 1/r$ para todo p, de donde $K = 1/r^2$. Según el método de Gauss

$$\overline{K}(p) = \lim_{A \to p} 1 \frac{\text{área de } G(A)}{\text{área de } A} = \frac{1}{r^2}$$



G conserva orientación.



G invierte orientación.

fig. 5

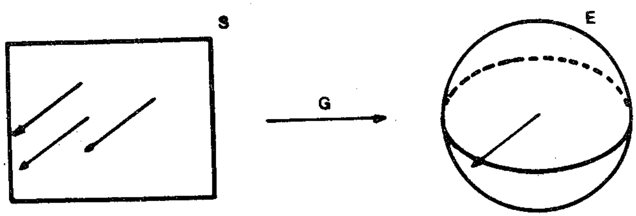


fig. 6

ya que

$$\text{área de } A = r^2(\text{área de } G(A)).$$

(ver fig. 7).

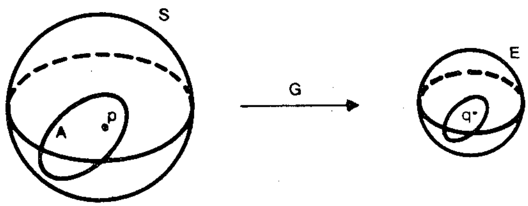


fig. 7

Con ello tenemos que esta definición de curvatura es compatible con nuestra intuición, en el sentido de que un plano tiene curvatura idénticamente cero y una esfera curvatura constante positiva (el caso de curvatura constante negativa es sumamente interesante y algo sobre ello se discutirá después). Sin embargo consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Sea S un cilindro circular recto de radio r. Según el método de Euler para p, se tiene que

$$0 \leq k(Q) \leq \frac{1}{r}$$

por lo que

$$K(p) = k_1(p)k_2(p) = \frac{1}{r}0 = 0.$$

Las direcciones en las cuales $k(Q)$ alcanza su máximo y mínimo corresponden a los paralelos y meridianos del cilindro.

Según el método de Gauss

$$K(p) = \lim_{A \to p} 1\frac{0}{\text{área de } A} = 0$$

ya que $G(A)$ es siempre una curva en E por lo que tiene área cero (ver fig. 8).

Parece en este momento que la teoría no es del todo satisfactoria pues el cilindro se curva, intuitivamente hablando. Existe otro tipo de curvatura que es el promedio de k_1 y k_2, que permite distinguir el cilindro del plano. Sin embargo el que el cilindro

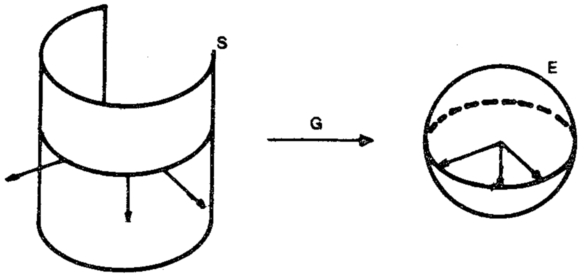


fig. 8

tenga curvatura cero está justificado por un teorema de Gauss, para enunciarlo necesitamos la siguiente definición:

Definición

Dadas dos superficies S y M, una *isometría* entre ellas es una función $f : S \to M$, tal que $d(p,q) = d_1(f(p), f(q))$ para todo par de puntos $p, q \in S$, donde d, d_1 son las distancias en S y M, dadas como el ínfimo de las longitudes de las curvas que están contenidas en la superficie y unen los puntos. Además f debe ser diferenciable.

Si tal f existe se dice que S y M son *isométricas*.

Ejemplo

Una región de plano y una región de cilindro son isométricas (ver fig. 9).

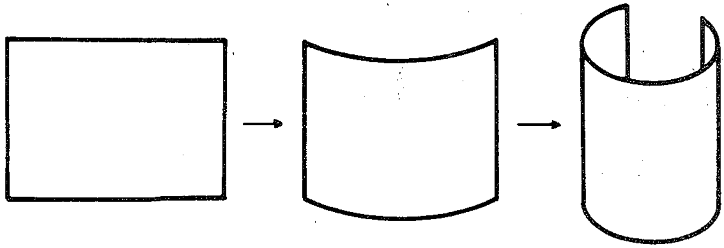


fig. 9

Teorema (Egregio* de Gauss)

Si S y M son isométricas, mediante f, entonces $K(p) = K(f(p))$ para todo $p \in S$.

Una aplicación de este teorema es que no puede diseñarse un mapa plano exacto en distancias para una región de la Tierra, pues ello implicaría que existe una región de una esfera que es isométrica a una región de un plano, pero como las esferas y el plano son de curvaturas distintas ello contradice el Teorema Egregio.

Sin embargo lo más egregio del teorema de Gauss radica en el hecho de que libera al concepto de curvatura de la necesidad de un *espacio ambiente*. Esto es, un habitante de la superficie con una cinta métrica en los bolsillo que es lo suficientemente inteligente para medir distancias entre puntos, puede determinar la curvatura de la superficie sin necesidad de abandonar la superficie y observarla desde afuera. Los físicos utilizan esta idea hoy en día para determinar cómo es la curvatura del universo, aplicación que fue primeramente propuesta por Gauss. El Teorema egregio es además uno de los ingredientes que utilizó B. Riemann al generalizar la teoría de curvatura años después.

Podemos ahora decir, siguiendo a F. Klein, que *la geometría diferencial es el estudio de aquellas propiedades de las superficies que son invariantes bajo isometrías.*

De estas propiedades la que resulta más interesante es la curvatura, discutamos más acerca de ella. Preguntémonos acerca del significado del signo de la curvatura, para ello consideremos antes un ejemplo.

Ejemplo

Sea S la superficie dada por la ecuación $z = x^2 - y^2$. Siguiendo el método de Euler es posible mostrar que en el origen

$$-1 \leq k(Q) \leq 1$$

de donde su curvatura en el origen es -1 (ver fig. 10).

Con ello tenemos ejemplos que ilustran la siguiente afirmación. La curvatura K mide la distorsión infinitesimal del área de la superficie con respecto al área del plano tangente en cada punto. Esto es, si tomamos una bola de radio t alrededor de $p \in S$—el radio medido con la distancia de curvas sobre la superficie—esta bola tendrá menor área que la bola del mismo radio en un plano si $K(p)$ es un número positivo y mayor área si es negativo—todo ello para t suficientemente pequeño. Ilustramos esto con la figura 11.

Hay que observar que todo esto pasa infinitesimalmente, esto es el "corte" para poder "aplanar" tiene que hacerse de hecho en una infinidad de rayos que convergen al punto p. Por ejemplo recordemos que una esfera no es isométrica a un plano por lo que no puede "aplanarse" mediante un proceso finito.

---

* Egregio significa: ilustre, insigne, majestuoso.

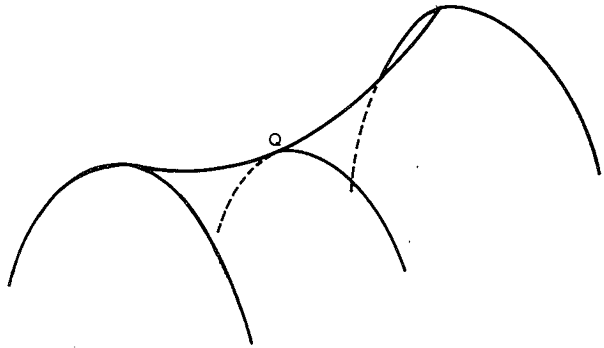
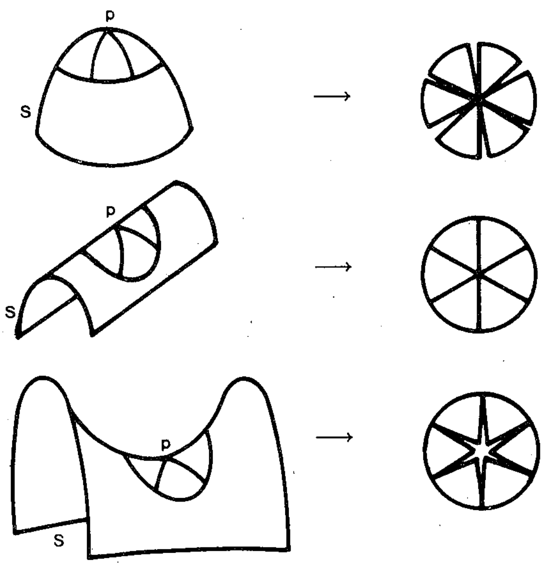


fig. 10



Si $K(p) > 0$ $\longrightarrow$ "S tiene menos área que el plano"

Si $K(p) = 0$ $\longrightarrow$ "S tiene igual área que el plano"

Si $K(p) < 0$ $\longrightarrow$ "S tiene más área que el plano"

fig. 11

Esta es una interpretación local de la curvatura; discutamos ahora una de naturaleza global. Unánimemente el teorema más bello de la geometría diferencial es el teorema de Gauss-Bonet; para enunciarlo recordemos antes el siguiente concepto:

Dada S una superficie compacta, sin frontera, conexa y orientable es posible asignarle un número $\chi(S)$, llamado la característica de Euler-Poincaré de la superficie (ver fig. 12).

$\chi(S)$ depende sólo de la forma topológica de S, por ejemplo una esfera y un

$\chi(S)$	2	0	-2	-2(n-1)

S

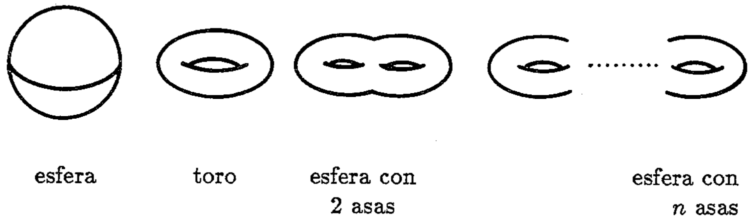


fig. 12

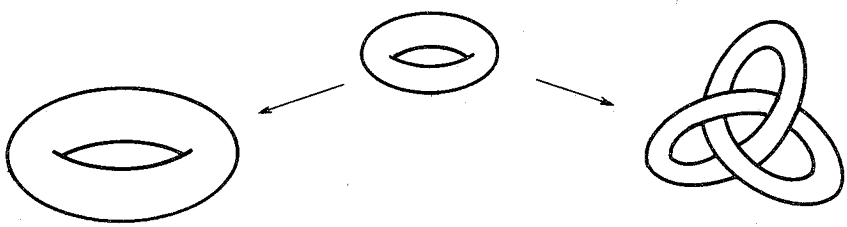


fig. 13

elipsoide tienen la misma forma topológica y por ello tienen la misma característica de Euler-Poincaré (recomendamos averiguar más acerca de estos númeritos, por ejemplo en [1]).

Teorema (Gauss-Bonet)

Sea S una superficie como antes, entonces

$$\int_S K = 2\pi \cdot \chi(S)$$

donde

$$\int_S K = \lim_{R_i \to 0} \left[\sum_i \text{área}(R_i) K(p_i) \right]$$

con R_i una partición de S y $p_i \in R_i$. Esta integral se conoce como la curvatura total de S.

¡El teorema afirma que la curvatura total de S determina la forma topológica de S y viceversa! Por ejemplo un toro puede deformarse de muchas maneras y sin embargo su curvatura total es siempre cero, lo mismo que su característica de Euler-Poincaré (ver fig. 13).

Con el fin de dar una idea del objeto de estudio actual de la geometría diferencial, se mencionan ahora algunos problemas abiertos.

Problema 1

Demostrar que toda superficie compacta sin frontera es rígida. Esto es, no existe una familia continua de superficies isométricas a la original tal que no provengan de una familia de isometrías de $\mathbb{R}^3$.

Intuitivamente, si la superficie es rígida y está hecha de un material flexible pero no elástico, al tratar de hacerla cambiar de forma se rasga. Por ejemplo un plano—que no es compacto—, no es rígido ya que puede deformarse continuamente, sin que la deformación provenga de una familia de isometrías de $\mathbb{R}^3$ (ver fig. 14).

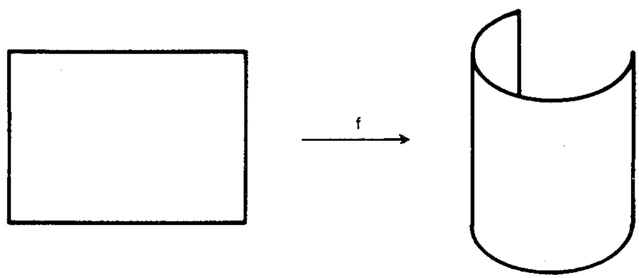


fig. 14

Se sabe que las esferas—superficies con curvatura constante positiva—son rígidas y que superficies con interior convexo, por ejemplo elipsoides, también lo son, pero una solución completa al problema no se conoce hoy día.

Problema 2

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2, la curvatura de su gráfica está dada por

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{\left(1 + f_x^2 + f_y^2\right)^2}$$

donde f_x denota la derivada parcial con respecto a la variable x. Pregunta: ¿Bajo qué condiciones para $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, existe una tal f?

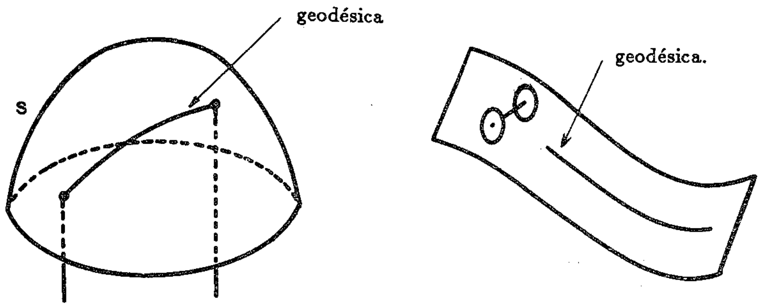
Es decir, si tenemos una función de curvatura dada ¿cuándo podremos diseñar una superficie que sea la gráfica de una función con esa curvatura?

Sobre la respuesta a la pregunta es conocido que si $K = -1$ no es posible resolver la ecuación diferencial parcial en todo $\mathbb{R}^2$ (Teorema de Hilbert), aunque sí en abiertos pequeños de $\mathbb{R}^2$. El problema puede también plantearse omitiendo la restricción de que la superficie sea una gráfica de función. En este problema la forma y extensión de la superficie así como la amplitud de valores que toma K juegan un papel muy importante, sin embargo esto todavía no ha sido comprendido totalmente.

Problema 3

De todas las curvas en una superficie, las geodésicas son las más importantes. Una curva C en una superficie se dice *geodésica* de la superficie si para cualesquiera dos puntos en la curva suficientemente cercanos, el segmento de C que determinan es la curva de longitud mínima entre todas las curvas que los unen y están contenidas en la superficie. Obsérvese que las geodésicas son invariantes bajo isometrías. Por ejemplo en un plano las geodésicas son las rectas y en las esferas son los círculos máximos. Pueden construirse geodésicas de muchas maneras, por ejemplo dados dos puntos en la superficie S se hacen perforaciones en ellos y se introducen los extremos de una liga por las perforaciones, si la liga tiene la propiedad de siempre "pegarse" a S, entonces al tensarla describe una geodésica en la superficie (ver fig. 15).

Otro método es considerar un carrito como en la figura 15 y hacerlo rodar sobre S sin que sus ruedas resbalen. Si el carrito es suficientemente pequeño, esto es las ruedas del carrito están infinitesimalmente cercanas entre sí, entonces el carrito al rodar describe una geodésica.



liga carrito

fig. 15

Conjetura

Toda superficie compacta y sin frontera tiene una infinidad de geodésicas cerradas.

Esto es, hay una infinidad de maneras de colocar el carrito de tal manera que describe curvas periódicas distintas. Por ejemplo la conjetura es cierta para esferas pues admiten una infinidad de círculos máximos. Sin embargo en el plano—que no es compacto—no existen geodésicas cerradas. Se sabe que todas superficie que tiene forma topológica de esfera admite por lo menos tres geodésicas cerradas (Teorema de Lusternik-Schnirelmann).

Bibliografía

[1] Do Carmo, M. P.: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.

[2] Micha, E.: *Geometría Diferencial*. CINVESTAV, 1985.

[3] Spivack, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, 1970, 5 vols.

[4] Verjovsky, A.: *Introducción a la Geometría de Curvas en el Espacio*. CINVESTAV, 1982.

[5] Yau, S. (Ed.): *Seminar on Differential Geometry*. Princeton University Press, 1982.

Comentarios: [2] y [4] son textos introductorios y pueden obtenerse en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV), [1] y el volumen II de [3] tienen un nivel intermedio; en [5] puede hallarse una discusión más amplia de los problemas abiertos.

Colaboraciones, sugerencias, críticas, etc., favor de dirigirse a:

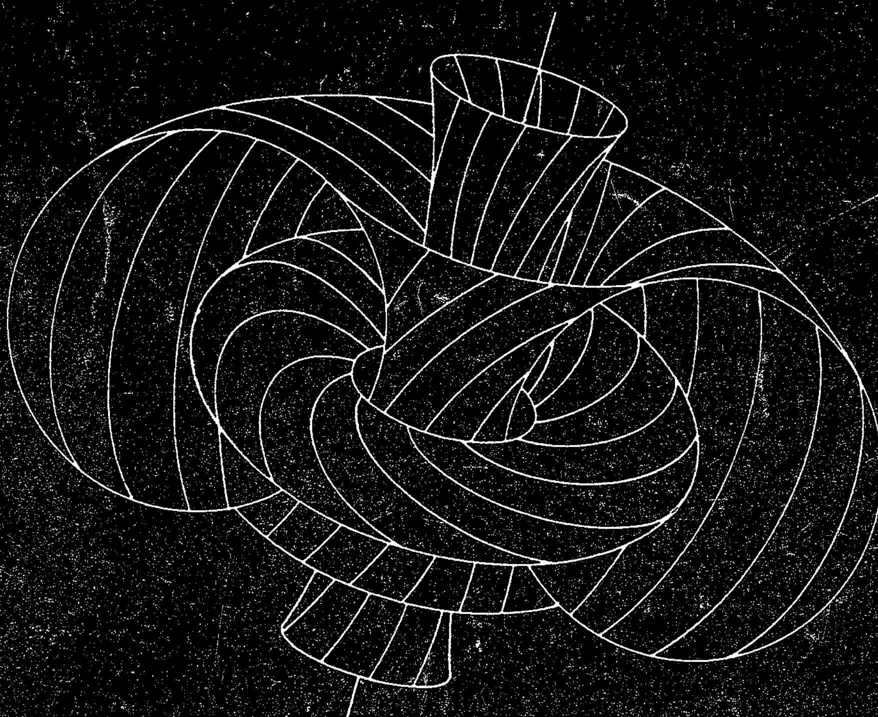
Daniel Juan Pineda
cub. 103, Instituto de Matemáticas
Area de la Investigación
Circuito Exterior
Ciudad Universitaria
México 20, D. F. C. P. 04510

Situs es una publicación semestral patrocinada por el Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México. El original se produjo utilizando equipo del mismo Instituto de Matemáticas, así como del Departamento de Matemáticas y de la Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Portada: He aquí una bonita descomposición de S^3 en círculos, conocida como la *fibración de Hopf*. Para obtenerla basta intersectar S^3, la esfera unitaria en $\mathbb{C}^2$ —o en $\mathbb{R}^4$— con las rectas complejas que pasan por el origen; cada recta corta a S^3 en un círculo y todos ellos son ajenos entre sí. Proyectando estereográficamente S^3 a $\mathbb{R}^3$ se obtiene la figura.

SiTUS

Lugar de Matemática



num. 1 Agosto de 1987