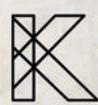




$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$   
 $y^3$   
 $\frac{d}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$   
 $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\tan \alpha}$   
 $\sqrt{x^2 - x} - x^2$   
 $n! = \prod_{k=1}^n k$   
 $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$   
 $x_A = x_c$   
 $\frac{x_A + x_c}{2}$   
 $m = S/2$   
 $(x) = \frac{d}{3}$   
 $f(x) \sim \frac{\alpha \pi}{2}$   
 $\sum_{n=1}^{\infty}$   
 $\Delta x \rightarrow 0$   
 $(x) = 0$   
 $\sqrt[3]{4}$   
 $m = S$   
 $V + E + F = 2$

e-ISSN  
2665-2471

# PAS XIN MATEMÁTICO

 **KONRAD  
LORENZ**  
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Vol. 2

No. 2

$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\sin \frac{3}{4}$

# PASKÍN MATEMÁTICO

<https://editorial.konradlorenz.edu.co/paskin-matematico.html>

e-mail: [paskin@konradlorenz.edu.co](mailto:paskin@konradlorenz.edu.co)

## EDITORES

John A. Arredondo

Fundación Universitaria Konrad Lorenz  
[alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co](mailto:alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co)

Carlos Alberto Díez

Fundación Universitaria Konrad Lorenz  
[carlosa.diezf@konradlorenz.edu.co](mailto:carlosa.diezf@konradlorenz.edu.co)

---

Esta publicación puede ser difundida y reproducida con fines académicos y científicos por todos aquellos que tengan a bien hacer un correcto uso de su contenido.

---

ISSN 2665-2471

**Fundación Universitaria Konrad Lorenz:** Tel: (+57 1) 347 23 11, Carrera 9 Bis No. 62 – 43 Bogotá – Colombia, eMail: [info@konradlorenz.edu](mailto:info@konradlorenz.edu).  
**Carácter académico:** Institución Universitaria. Personería Jurídica por Resolución 18537 del 4 de noviembre de 1981 del Ministerio de Educación Nacional. Institución de Educación Superior sujeta a inspección y vigilancia por el Ministerio de Educación Nacional (Art. 2.5.3.2.10.2, Decreto 1075 de 2015).

# LAS MATEMÁTICAS EMANAN DE LA NATURALEZA

Jesús R. Muciño Raymundo \*  
muciray@matmor.unam.mx

## 1. Un fenómeno cultural.

Imaginemos una pieza de pan, la más sencilla que sea de nuestro gusto. En ella tenemos tierra, sol, agua, trigo, levaduras, el calor del horno ... En la pieza de pan ya elaborada, esos elementos son muy difíciles de distinguir para quien no sea un panadero experimentado.

La elaboración del pan y de los alimentos en general, es un fenómeno cultural. Con esto buscamos expresar que a través de muchos siglos diversas mentes inteligentes, prácticas, han contribuido a sus técnicas de elaboración, haciéndolas evolucionar. Cuando imaginamos un pan o un pastel sofisticado, es claro que su elaboración escapa del alcance de un neófito.

La analogía es completa. Las matemáticas son un fenómeno cultural. A través de muchos siglos, diversas mentes inteligentes, prácticas, han contribuido a elaborarlas, haciéndolas evolucionar.

Una de las fuentes de las matemáticas está en la naturaleza, ¿verdaderamente es así? Cuando leemos un libro de matemáticas “puras”, estamos ante un producto sofisticado.

## 2. Tierra–Sol el círculo maestro.

Nuestro objeto matemático de partida es

360.

Inmediatamente, eso suena como los grados de una circunferencia. ¿A quién se le ocurriría eso? Nuestro punto de salida en la naturaleza son las siguientes preguntas.

¿Cuál es la duración de un año?,  
¿por qué esa cantidad es interesante?

Para todos nosotros la respuesta a la primera pregunta es 365 días o algo similar. Concerniente a la segunda pregunta, parece que su interés es meteorológico o administrativo. Retrocediendo en el tiempo, para las culturas antiguas los ciclos del clima, en particular las lluvias, eran esenciales, pues ello determinaba el tiempo de siembra y cosecha. Por ejemplo, en Egipto el año lo marcaba la crecida del Nilo, en la India el ciclo anual lo marcaba la llegada del monzón. En Barranquilla, Colombia, la época de lluvias más intensas es octubre. Hace 2000 años el clima presentaba una periodicidad casi cronométrica cada año.

¿Averiguar cuánto dura un año es un problema de las matemáticas?

\*Centro de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Morelia, México.

Veamos que sí lo es. Consideramos un objeto fijo que produzca una sombra nítida a medio día, por ejemplo un edificio, un poste o un árbol nos sirven. Llamamos a este objeto el gnomon. La idea es señalar la sombra que proyecta el gnomon a medio día a lo largo de 400 ó 500 días, es decir tendremos 400 ó 500 mediciones de su sombra, ver Figura 1.a. El número de días que transcurre entre las dos sombras más alargadas es la duración en días del año. El resultado será 365 ó 366 días.

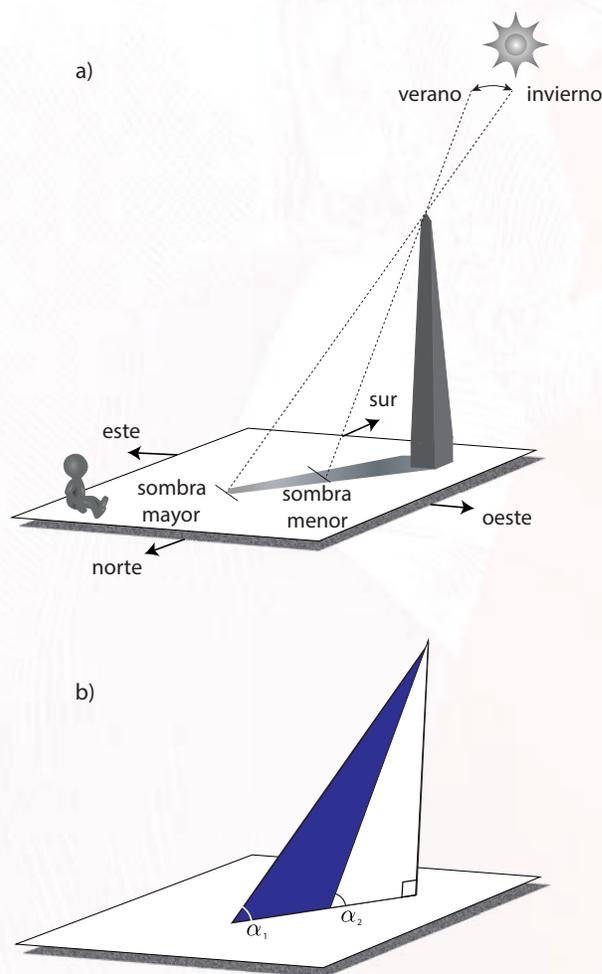


Figura 1: a) Calculando la duración de un año mediante la observación de sombras, desde un lugar en el hemisferio norte de la Tierra. b) Dos triángulos que aparecen en la observación.

Usando métodos actuales de medición, sabemos que el año tiene una duración aproximada de

365 días, 5 horas, 48 minutos, 45.25 segundos, ...

o

365.242190402... días.

¿Por qué hay dos respuestas? ¡Ah!, es que era un problema de matemáticas; la primera respuesta usa el sistema numérico sexagesimal y la segunda el sistema decimal.

Todas las civilizaciones de la antigüedad reconocieron 365 ó 366 días como la duración del año. Como 365 es un número "incómodo" de manejar, por ejemplo no tiene mitad en números enteros. Los mayas y aztecas consideraban 360 días propicios y 5 días de mala suerte. Naturalmente los 360 grados que mide un círculo son un redondeo numérico de 365, haciéndolo más cómodo. En la cultura griega, Hiparco de Nicea (siglo II a.C.) graduó el Zodíaco o la órbita de la Tierra de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . Él estableció el punto vernal de la órbita de la Tierra  $0^\circ$  en el equinoccio de primavera del hemisferio norte.

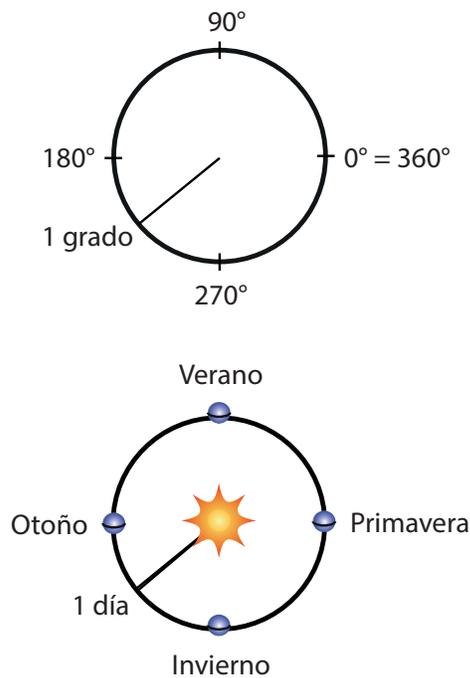


Figura 2: Un grado de la circunferencia es equivalente al arco en que se desplaza la Tierra durante 24 horas en su órbita alrededor del Sol.

Con ello podemos escribir que:

$$\begin{aligned} 1 \text{ grado} &= 1 \text{ día} \\ 90 \text{ grados} &= 1 \text{ estación} \\ 360 \text{ grados} &= 1 \text{ año,} \end{aligned}$$

donde por "día" entendemos el arco que recorre la Tierra sobre su órbita alrededor del Sol en 24 horas, ver Figura 2. Otro

aspecto fascinante de la cifra 365.242190402... es que nos dice que la Tierra describe en un año los 365 días con la adición del decimal 242190402... Esto es, la Tierra no gira alrededor del Sol días (o números) enteros. Para describirlo se requiere un decimal (¿racional o irracional?) extremadamente difícil de calcular y/o estimar observacionalmente.

Ahora recordemos que la órbita de la Tierra no es circular; es una elipse con el Sol en uno de sus focos. Afortunadamente dicha elipse tiene una excentricidad cercana a cero. Por ello, aproximarla por un círculo es adecuado.

Ese no es el caso para otros planetas. En la Figura 3 hemos dibujado cuatro órbitas elípticas, cambiando su escala al hacer sus ejes mayores iguales a cierta unidad. Ello ilustra como varía la excentricidad y la forma de dichas órbitas.

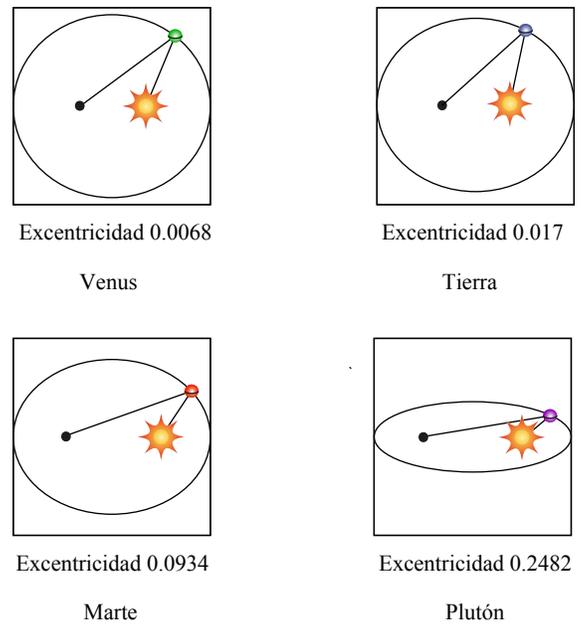


Figura 3: La órbita de la Tierra alrededor del Sol puede aproximarse por un círculo. La bondad de ese tipo de aproximación depende de la excentricidad de la órbita del planeta.

### 3. El coseno y el seno.

El método de paralaje descrito en la Figura 1.b, nos lleva a estudiar triángulos con detalle. ¿Será suficiente con estudiar los dos triángulos en dicha figura? Una magia de matemáticas ocurre; en cierto sentido, es más fácil mirar/estudiar todos los triángulos que uno solo, ello nos lleva al:

**Lema 3.1.** Existe una correspondencia biyectiva entre los siguientes conjuntos

$$\{ \text{ángulos } 0 \leq \alpha \leq 90^\circ \},$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{puntos del arco de círculo} \\ \text{con radio 1} \\ \text{de } 0^\circ \text{ a } 90^\circ \end{array} \right\}$

y

$\left\{ \begin{array}{l} \text{triángulos rectángulos,} \\ \text{orientados, de hipotenusa 1} \end{array} \right\}$ .

Esto es, cada punto en ese arco de círculo determina un triángulo rectángulo, orientado, de hipotenusa 1. Viceversa, a cada triángulo rectángulo, orientado, de hipotenusa 1 le corresponde exactamente un punto en ese arco de círculo, y por ello un ángulo.

Para entender cabalmente esta correspondencia, recurrimos a las funciones seno y coseno

$$\begin{aligned} \cos : [0^\circ, 90^\circ] &\longrightarrow [0, 1] \\ \alpha &\longmapsto \cos(\alpha), \\ \text{sen} : [0^\circ, 90^\circ] &\longrightarrow [0, 1] \\ \alpha &\longmapsto \text{sen}(\alpha). \end{aligned}$$

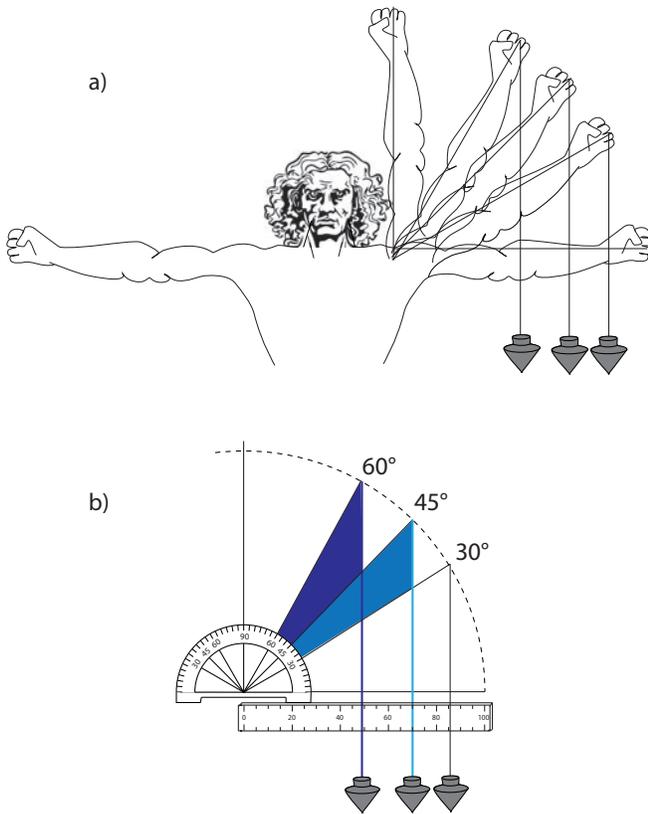


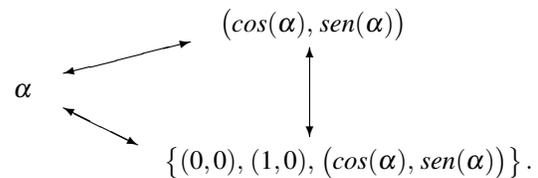
Figura 4: a) Al mover el brazo, la plomada va describiendo los valores del coseno. b) Es posible realizar una estimación del valor de  $\cos(\alpha)$  si agregamos al mecanismo un transportador para medir  $\alpha$  y una regla con escala para determinar  $\cos(\alpha)$ .

Un experimento interesante es calcular el coseno de un ángulo concreto provistos de un transportador y una regla de

longitud un metro, digamos  $\cos(73^\circ)$ , ver Figura 4. (En ella usamos una caricatura de un dibujo famoso de Leonardo da Vinci.) ¿Cuántas cifras decimales de  $\cos(73^\circ)$  podemos calcular sin error? ¿Qué ocurre si comparamos nuestro resultado experimental, con el resultado que nos provee una computadora? El video [MR20], minutos 10–23, muestra el experimento.

Una computadora provista del programa adecuado puede calcular fácilmente 30 cifras decimales de  $\cos(\alpha)$ ; ¿cómo lograron esto los matemáticos? Bueno, ya aceptamos que las matemáticas son sofisticadas.

*Prueba del Lema.* La correspondencia es



□

#### 4. El coseno y el seno como movimientos periódicos.

Imaginemos la naturaleza en este caso, como un móvil describiendo la trayectoria del arco de círculo  $[0, 90^\circ]$ .

¡Si!, basta imaginar un móvil o un insecto que camina sobre el arco de círculo con velocidad de norma 1: al caminar por el punto  $\alpha$  del círculo y proyectarlo a los ejes cartesianos  $x$  e  $y$  da lugar a las funciones coseno y seno de  $\alpha$ . ¿Qué sucede si en lugar de detener  $\alpha$  en el borde del arco de círculo (punto  $\alpha = 90^\circ$ ), continuamos más allá sobre el círculo completo? Traducido a las matemáticas, ello nos proporciona la trayectoria

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2 \\ \alpha &\longmapsto (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha)). \end{aligned}$$

Donde  $\alpha$  puede pensarse como el tiempo de recorrido y varía en todo  $\mathbb{R}$ .

Recordemos que el compás es un mecanismo que nos permite sin dificultad trazar el círculo completo.

¿Podemos imaginar un mecanismo que trace la gráfica de  $\text{sen}(\alpha)$ ?

Es un problema de matemáticas, pero buscamos un “mecanismo”, en el sentido concreto y práctico del compás. Tal mecanismo existe, observemos la Figura 5.

El video “Sinegraph” en [ET09], tiene una bonita animación del mecanismo que mencionamos.

¿Podemos hallar en la naturaleza la gráfica de  $\text{sen}(\alpha)$ ?

**Definición 4.1.** Una función periódica  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  es tal que los valores de  $f(x)$  y de  $f(x + T)$  coinciden para un número  $T > 0$ . El número positivo más pequeño  $T$  con esa propiedad es el periodo de  $f$ .

Esto es

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) \quad \text{con} \quad f(x) = f(x + T).$$

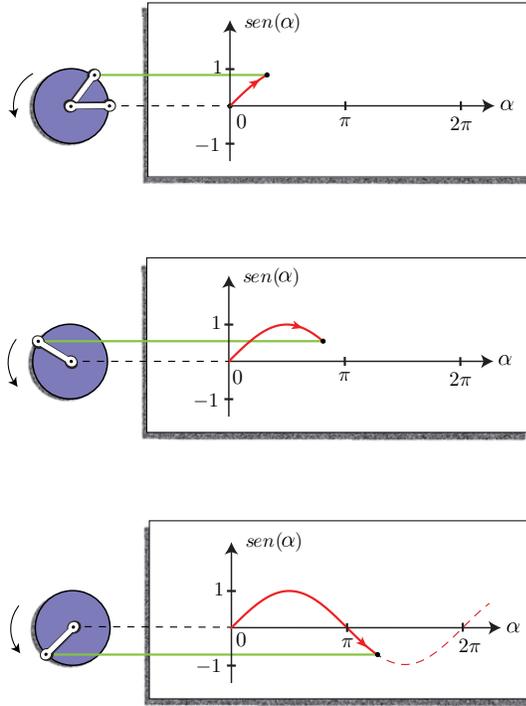


Figura 5: Al recorrer el punto  $\alpha$  el círculo unitario, con velocidad unitaria, su altura respecto al eje  $y$ , va trazando la gráfica de  $\text{sen}(\alpha)$ .

Intuitivamente, decimos que el comportamiento de una función periódica se repite después de cada periodo de tiempo  $T$ . El prototipo de una función periódica es

$$f(\alpha) : \mathbb{R} \longrightarrow [-A, A] \subset \mathbb{R}$$

$$\alpha \longmapsto A \cos(c\alpha + \varphi)$$

donde:

- $A > 0$  es el valor máximo de la función o amplitud de onda (la mitad de la oscilación de sus valores),
- $T = \frac{2\pi}{c}$  es el periodo de la función o longitud de onda,
- $\varphi$  es la fase.

Desde un punto de vista práctico, las culturas prehispánicas de América crearon sellos cilíndricos, tal que al hacerlos rodar engendran dibujos periódicos; en la Figura 7.a, el primero de ellos tiene un diseño geométrico y el segundo un monito sentado.

Si en un cilindro trazamos una curva adecuada, al hacerlo rodar engendrará una función periódica, que sorprendentemente (matemáticamente) tendrá como dominio a todos los

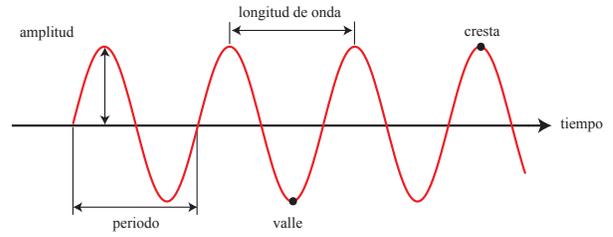


Figura 6: Gráfica de  $f(\alpha) = A \cos(c\alpha + \varphi)$  con sus características geométricas; amplitud y periodo (longitud).

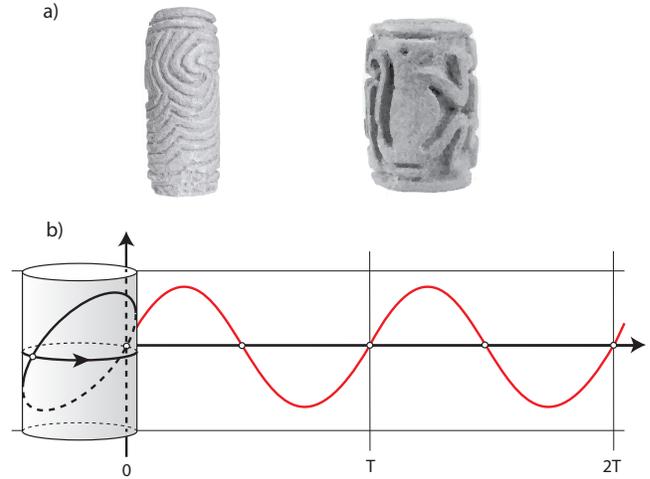


Figura 7: a) Dos sellos cilíndricos prehispánicos que al rodar dan lugar a diseños periódicos. b) Tambor cilíndrico que al rodar engendra una función periódica.

números reales  $\mathbb{R}$ , Figura 7.b. Todo lo anterior se resume en el resultado siguiente.

**Lema 4.1.** Existe una correspondencia biyectiva entre los conjuntos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{funciones continuas} \\ f_{\text{linea}}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{con periodo } T > 0 \end{array} \right\}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{funciones continuas} \\ f_{\text{circulo}}(\alpha) : \{x^2 + y^2 - (\frac{T}{2\pi})^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{en el círculo de radio } T/2\pi \end{array} \right\}.$$

La “prueba geométrica” es la Figura 7.b. Si bien ello puede ser insuficiente para los lectores cuya intuición sea algebraica o analítica (en cuyo caso, queda la invitación a escribir “su” prueba).

Veamos algunos ejemplos.

En nuestro prototipo  $A \cos(c\alpha + \varphi)$ , el periodo y la amplitud parecen parámetros inocentes. Con sinceridad:

¿a quién le importa esas funciones y sus cantidades  $T, A$ ?

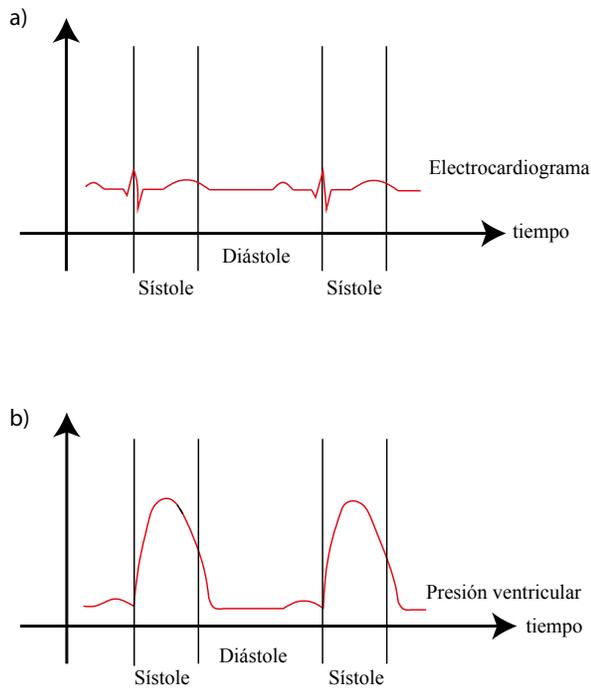


Figura 8: Dos funciones periódicas que reflejan la actividad del corazón humano.

En telecomunicaciones, televisión, teléfono internet, rayos X, tomografía médica, exploración petrolera; los ingenieros y físicos han logrado separar las ondas electromagnéticas que codifican todas las señales necesarias. La amplitud y periodo de dichas ondas, su diferenciación y manejo son indispensables hoy día. Recomendamos [PI09] particularmente Cap. 10 y [Jam15]; para una descripción desde la física o las matemáticas respectivamente, de estos temas.

La actividad del corazón humano es periódica respecto al tiempo. Dos parámetros interesantes son su actividad eléctrica y su presión sanguínea. Al graficarlas obtenemos la Figura 8;  $T$  y  $A$  son importantes. ¿Cuál es el valor de tu  $T$ ?

La órbita de la Tierra respecto al Sol y la inclinación de su eje de rotación tienen como consecuencia las estaciones en la Tierra. Claramente en un ecosistema, la variación en el número de las poblaciones vegetales o animales tiene periodicidad anual. Usando ecuaciones diferenciales ordinarias es posible obtener modelos para esos fenómenos periódicos, ver por ejemplo [HSD13] Cap. 11. A nivel cualitativo, si en un ecosistema la biomasa vegetal (hierba por simplicidad) alcanza un máximo anual en cierto mes. Entonces ese máximo condiciona la reproducción de los animales pequeños y de sus predadores. En la Figura 9 graficamos en un mismo plano tres funciones periódicas que bosquejan esta dependencia.

Podemos decir que, el oscilador maestro Sol-Tierra transmite su oscilación anual a las especies vegetales y animales (presas, predadores).

¿Cuáles son las expresiones matemáticas para las funciones

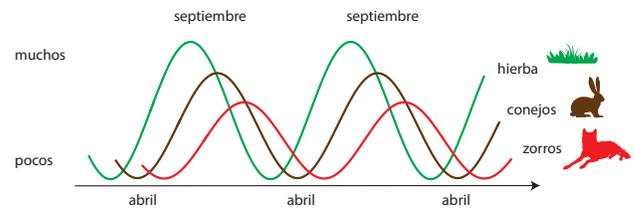


Figura 9: Periodicidad cualitativa anual de biomasa vegetal (hierba), presas y predadores; para un ecosistema tal que en julio la biomasa vegetal alcanza un valor máximo.

que aparecen en las Figuras 8 y 9? ¿Cómo escribir todas las funciones periódicas?

### 5. El resultado “universal” de Fourier.

Dicho sucintamente, un teorema de J.-B. Joseph Fourier (Francia, 1768–1830) nos dice que, todo fenómeno periódico

$$\text{en el tiempo } \mathbb{R} = \{\alpha\}$$

puede expresarse usando una suma convergente de las funciones

$$\text{sen}(k\alpha) \text{ y } \text{cos}(k\alpha), \text{ para } k \in \mathbb{N}.$$

Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, suponemos que el periodo es  $2\pi$ . Dicho en lenguaje técnico tenemos el siguiente:

**Teorema 5.1.** *Toda función*

$$f(\alpha) : [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

*diferenciable de clase  $C^1$ , puede expresarse como una serie*

$$f(\alpha) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{cos}(k\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen}(k\alpha)$$

*convergente (casi siempre infinita).*

Nuestro enunciado es una versión simplificada del dado en [Tol62] pág. 19. ¿Por qué nos atrevemos a calificar de universal este teorema?, de hecho, no está referido así en la literatura matemática. Decimos que el teorema es universal, pues describe cualquier función, usando las funciones periódicas prototipo (que como ya hemos argumentado, están en muchos de los ámbitos que nos rodean).

*Idea de la demostración.* La idea que describimos no sabemos si coincide históricamente con la de Fourier. Pero es un bonito ejemplo de como se construyen pruebas en matemáticas para imaginar resultados nuevos.

**Paso 1.** Dada  $f(\alpha)$  suponemos que la igualdad en el teorema se cumple y la serie que representa a  $f$  existe pero no la conocemos.

**Paso 2.** Usando el lenguaje del álgebra lineal, observamos que el conjunto (infinito)

$$\{\cos(k\alpha), \sin(k\alpha) \mid k = 1, 2, 3, \dots\}$$

es una base para un cierto espacio vectorial de “dimensión infinita” de funciones en  $[-\pi, \pi]$ . Esto es, ellas son linealmente independientes y sus combinaciones lineales generan un espacio de funciones. (Ahora sabemos que el concepto de base para espacios de dimensión infinita es delicado, e.g. consultar concepto de *base de Schauder*, [Kre78] § 2.3.)

**Paso 3.** Esa base satisface las siguientes reglas de “ortogonalidad respecto al producto punto”

$$\langle g(\alpha), h(\alpha) \rangle \doteq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

entre funciones.

Para  $k, \ell$  enteros positivos, las reglas de ortogonalidad son

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\alpha)d\alpha = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\alpha)d\alpha = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(k\alpha)d\alpha = 1$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(k\alpha)d\alpha = 1$$

y si  $k \neq \ell$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\alpha)\cos(\ell\alpha)d\alpha = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\alpha)\sin(\ell\alpha)d\alpha = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\alpha)\sin(\ell\alpha)d\alpha = 0.$$

**Paso 4.** Con esa idea en mente, dada  $f$  el problema es calcular los coeficientes  $c_0, a_k$  y  $b_k$  de la serie para  $f$ . La propuesta es

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)d\alpha$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos(k\alpha)d\alpha$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin(k\alpha)d\alpha.$$

Ello construye (descubre) la serie dicha en el enunciado del teorema.

**Paso 5.** Ahora, resta aclarar para qué funciones  $f$  la serie converge o no, usando que el dominio es cerrado y la diferenciabilidad. Pero es fácil hallar familias de funciones para las cuales su serie sí converge; usando sumas finitas tan grandes como se desee y/o las reglas de ortogonalidad (para ejemplos

más generales). Ello proporciona evidencia afirmativa para el resultado.

Los enunciados y los hechos detallados pueden leerse en [Tol62] Caps. 1–5, esa referencia usa solo técnicas elementales de cálculo y análisis.  $\square$

¿Por qué llegó Fourier a ese resultado?, ¿cómo lo descubrió?

La motivación original de Fourier fue construir modelos matemáticos para el comportamiento o la transferencia del calor. El libro [Haw06] págs. 429–492 contiene la traducción (parcial) al castellano de su trabajo original [Fou22] “Teoría analítica del calor”; [GP17] pág. 21, describe las funciones para un problema de temperatura en un anillo. En [SS03] Cap. 1 hay una introducción elemental a las ideas de Fourier usando las ecuaciones diferenciales parciales de onda y del calor, los Caps. 2 y 3 contienen una descripción contemporánea del análisis matemático para las series de Fourier (y su convergencia). Hay muchas referencias con la biografía de Fourier, solo mencionamos [Haw06] págs. 421–427.

Como parte de la maduración del teorema, conviene observar el siguiente:

**Corolario 5.1.** Consideramos una función  $f$  continua y  $2\pi$  periódica en  $\mathbb{R}$ . Su restricción

$$f : [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

puede aproximarse tanto como se desee mediante una serie finita de Fourier, esto es, la diferencia

$$\left| f(\alpha) - \left( c_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\alpha) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\alpha) \right) \right| < \varepsilon$$

puede hacerse tan pequeña como se desee para toda  $\alpha \in [-\pi, \pi]$  simultáneamente, tomando  $k$  suficientemente grande.

Ver [Tol62] pág. 115 para el resultado anterior. Naturalmente, el hecho de que la suma sea finita nos abre camino libre para aplicaciones prácticas y modelos matemáticos de la naturaleza. Ello nos proporciona la seguridad de que una computadora lleva a cabo los cálculos necesarios para tratar dichas series con certeza.

## 6. ¿Realmente son iguales?

Nuestro objetivo ha sido bosquejar la relación entre la naturaleza y las matemáticas. Metafóricamente, esa relación es similar a una enredadera sobre un árbol tropical. A veces la enredadera y el árbol se confunden, siguen caminos similares, su forma es parecida. Sin embargo, la enredadera y el árbol son esencialmente distintos.

Considerando funciones  $f$  que aparecen en finanzas y economía, ellas no siempre son diferenciables  $C^1$  o incluso en muchos casos son discontinuas. Un acertijo general es:

¿En la naturaleza cuáles abundan más; las funciones continuas o las discontinuas?

Volviendo a las matemáticas, nos gustaría remover la hipótesis de diferenciabilidad para  $f(\alpha)$  en el teorema de Fourier.

Sin embargo, la correspondencia biyectiva entre los conjuntos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{funciones} \\ f(\alpha) : [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{series} \\ c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\alpha) \\ \text{convergentes} \end{array} \right\}$$

requiere introducir conceptos sofisticados para las integrales empleadas en la prueba. Hubiese sido bonito enunciar aquí el resultado de Fourier como biyección, pero ello requiere hipótesis más finas.

En particular, en 1922 Andrei N. Kolmogorov (Rusia, 1903–1987) halló ejemplos de funciones  $f$  (no  $C^1$ ) tales que la serie diverge casi en todo punto de  $[-\pi, \pi]$ , ver [GP17] Cap 1.

Más aún, Lennart Axel A. Carleson (Suecia, 1928) probó en 1966, la convergencia de las series de Fourier suponiendo que las funciones  $f$  son  $L^2$ , ver [Car06].

Dejamos a los lectores meditar la diferencia entre la naturaleza (realidad) y las matemáticas de los objetos que hemos presentado.

Para comparar las series de Fourier con la realidad, [Jam15] es útil, en particular el Prefacio págs. ix y x.

Para la comparación entre la naturaleza y diversas ciencias, recomendamos ver [dS18] y [Pen06] Caps. 1 y 34.

## 7. Algunos principios (de matemáticas) que son evidentes en cualquier profesión.

En toda profesión se necesita un aprendizaje profundo, detallado. En un oficio tan delicado como las matemáticas debemos ser cuidadosos. La elaboración del pan en particular, requiere de:

- procesos de **refinación**; el trigo molido y refinado se convierte en harina, que resulta muy distinta de lo original,
- procesos de **maduración**; la masa de harina reposa con la levadura.

Volvamos a lo nuestro. Para describir nuestros objetos matemáticos hemos preferido solo sugerir sus definiciones, relaciones o resultados. El llevar ideas rudimentarias a su forma precisa en el lenguaje de las matemáticas, es un proceso de refinación. En la gráfica de la Figura 10.a nos hemos mantenido a la izquierda.

Al ir avanzando en una profesión (en cualquiera de ellas) sucede que los detalles aumentan y el aprendizaje se hace difícil. Es entonces cuando el aprendizaje se hace serio, se hace verdadero, ver Figura 10.b. Ello ilustra metafóricamente un proceso de maduración en el trabajo matemático. Los Lemas

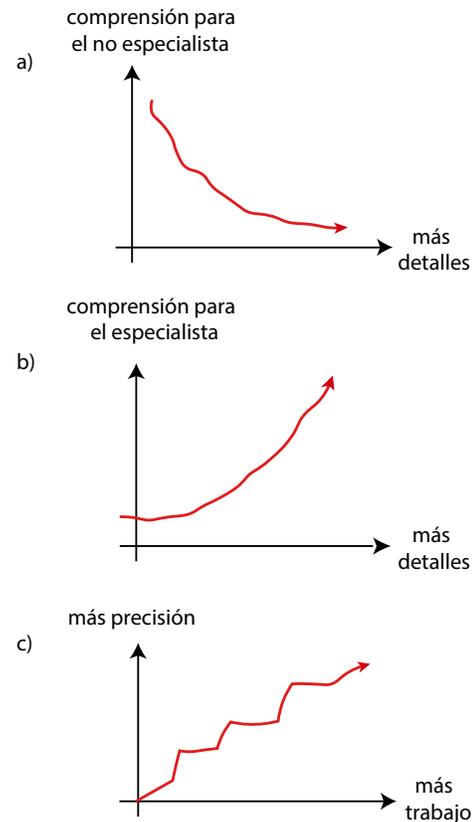


Figura 10: Tres principios en el trabajo matemático.

1, 2 y el Corolario 1 están enunciados de tal forma que sean ejemplos de maduración.

Finalmente, una consecuencia de que las matemáticas son un fenómeno cultural es, que para progresar verdaderamente en ellas debemos trabajar de forma disciplinada. A nuestro entender, la gráfica de trabajo vs. precisión (logros) es creciente pero no lineal. La Figura 10.c ilustra esto.

Basándose en su experiencia, los lectores seguramente podrán enunciar y enriquecer los tres principios bosquejados en la Figura 10.

## Referencias.

- [Car06] L. Carleson, *Abel Prize*, Norwegian Academy of Science and Letters (2006), 1-3.  
[https://web.archive.org/web/20060411161033/http://www.abelprisen.no/nedlastning/2006/english\\_2006\\_press.pdf](https://web.archive.org/web/20060411161033/http://www.abelprisen.no/nedlastning/2006/english_2006_press.pdf)
- [ET09] Elica Team, *Sinegraph*, 2009.  
[https://www.youtube.com/watch?v=0WN6\\_k9D6A4](https://www.youtube.com/watch?v=0WN6_k9D6A4)
- [Fou22] J. Fourier, *Théorie Analytique de La Chaleur*, Chez Firmin Didot, Père et Fils, Paris, 1822.
- [GP17] M. García Piqueras, *Kolmogoróv La dualidad entre el caos y la determinación*, RBA, Barcelona, 2017.
- [Haw06] S. Hawking, *Dios creo los números*, Crítica, Barcelona, 2006.
- [HSD13] M. Hirsch, S. Smale, and R. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, Elsevier, Amsterdam, 2013.

- [Jam15] J. F. James, *A Student's Guide to Fourier Transforms, Third Ed.*, Cambridge, United Kingdom, 2015.
- [Kre78] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Willey, New York, 1978.
- [MR20] J. Muciño Raymundo, *Las matemáticas que emanan de la naturaleza*, 2020.  
<https://www.facebook.com/unamccm/videos/2566724500212079/>
- [Pen06] R. Penrose, *El camino a la realidad*, Debate, Barcelona, 2006.
- [PI09] A. Pérez Izquierdo, *Nuestra vida en el campo electromagnético*, Almuzara, Córdoba, España, 2009.
- [dS18] M. de Sauty, *Lo que no podemos saber*, Acantilado, Barcelona, 2018.
- [SS03] R. Shakarchi and E. M. Stein, *Fourier Analysis an Introduction*, Princeton, U. S. A., 2003.
- [Tol62] G. V. Tolstov, *Fourier Series*, Dover, New York, 1962.

**Acerca del autor:** Jesús R. Muciño Raymundo ha sido profesor de la Universidad Nacional Autónoma de México, en las ciudades de México y Morelia. Atesora amistad y contacto académico con profesores en Colombia. Su área de trabajo son los sistemas dinámicos y la geometría. Le maravilla como el álgebra y el análisis muchas veces proveen pruebas y explicaciones que él con geometría rudimentaria no ve. Su página es <http://matmor.unam.mx/~muciray>