Espacio Moduli de poligonos Euclideanos y sus aplicaciones. *

V Coloquio de Gometría UADY, 2008

Jesús Muciño Raymundo, Osbaldo Mata Gutiérrez.

Instituto de Matemáticas UNAM Unidad Morelia

1. Plan general.

Al estudiar un objeto

$$\theta$$

(para fijar ideas pensemos en objetos en $\mathbb{R}^n$, digamos una cónica, un triángulo, una matriz ... etc.) aparecen los siguientes aspectos:

Hecho 1. El objeto pertenece de manera natural a una familia $\mathcal{O}$:

$$\theta \in \mathcal{O}$$

(para fijar ideas: la familia de todas las cónicas en el plano, la familia de todos los triángulos, la familia de todas la matrices reales de dos por dos).

Hecho 2. Hay un grupo de transformaciones

$$G = \{g\}$$

que nos permite llevar un objeto θ en otro $\theta' := g(\theta)$; sin que cambien las propiedades del objeto que deseamos estudiar (para fijar ideas el grupo de isométrias del plano, nos permite llevar cónicas en cónicas, triángulos en ...).

*Este artículo es una versión preliminar.

Hecho 3. La propiedades del objeto que nos interesan muchas veces pueden ser cuantificadas como números

$$I_\alpha(\theta)$$

donde α expresa que dichos números invariantes

$$I_\alpha(\theta) = I_\alpha(g(\theta)) = I_\alpha(\theta')$$

forman un conjunto de funciones $I_1,\ I_2, \ldots, I_\alpha \ldots$ (un anillo de funciones invariantes, para ser más precisos). Para fijar ideas pensemos en I_α como; la excentricidad de una cónica, el ángulo mayor de un triángulo, un valor propio de una matriz.

Hecho 4. Esos números obedecen ciertas relaciones.

$$R_j(I_\alpha(\theta), \ldots, I_\omega(\theta)) = 0$$

(relaciones entre los elementos del anillo de invariantes) donde el índice j varía en un cierto conjunto. Para fijar ideas, un ejemplo de relación en el caso de triángulos es; la suma de los ángulos de un triángulo menos π es cero.

Muy rudimentariamente dicho:
Para un objeto θ en la familia $\mathcal{O}$, y para la relación de equivalencia del grupo de transformaciones G: el problema de moduli consiste en describir el espacio cociente

$$\frac{\mathcal{O}}{G} = \frac{\{objetos\ \theta\}}{\{la\ relación\ de\ equivalencia\ \theta \sim g(\theta)\}}\ .$$

¿Por qué es interesante este cociente?
De manera absolutamente primitiva (Neardenthal) decimos que $\mathcal{O}/G$ es un espacio moduli si cuenta sin repetición, ni omisiones todos los objetos θ esencialmente distintos entre si. Dando además alguna estructura natural (topológica, diferenciable, algebraica, ...) a dicho cociente.

¿Cuál es la “geometría” de $\mathcal{M} = \mathcal{O}/G$?
Supongamos que seleccionamos una colección finita de funciones invariantes y de relaciones entre ellas con esos datos podemos construir una aplicación

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^k$$

$$\theta \mapsto (I_1(\theta), ..., I_k(\theta))$$

cuya imagen sería un subconjunto de puntos en $\mathbb{R}^k$ que satisfacen las ecuaciones

$$\{R_j(I_1(\theta), ..., I_k(\theta)) = 0 \mid j \in 1, ..., s\}\ .$$

Esto es: las funciones invariantes $\{I_\alpha\}$ y sus relaciones encierran la geometría de $\mathcal{O}/G$. Por ejemplo: la dimensión esperada del espacio “debe” ser

$$dim\left(\frac{\mathcal{O}}{G}\right) = dim(\mathcal{O}) - dim(G) = k - s\ .$$

La primera igualdad es sugerida por la teoría de accciones de grupos de Lie en variedades y la segunda igualdad es sugerida de la teoría de invariantes. Cabe señalar que al considerar el moduli de matrices 2×2 la fórmula determinaría que el moduli tiene dimensión cero pues se tendría

$$dim\ M(2, \mathbb{R}) - dim\ GL(2, \mathbb{R}) = 2 - 2 = 0\ ,$$

lo cual es falso, por lo que la fórmula correcta en este caso es

$$dim \left(\frac{\mathcal{O}}{G} \right) = dim(\mathcal{O}) - dim(G) + dim(Estabilizador)$$

Debemos decir que en muchos problemas de moduli la elección de las funciones invariantes y sus relaciones a utilizar, es un problema extremadamente difícil y que no está completamente entendido hoy en dia.

En lo que sigue exploraremos como los hechos anteriores ocurren para varios objetos elementales.

2. Grupo de Isometrías de $\mathbb{R}^2$.

Reflexiones:
Definimos la reflexión en el plano con respecto al eje x como la siguiente función

$$\mathbb{R}_{\{eje\ x\}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longrightarrow (x\ ,\ -y)$$

De igual manera si: L es una línea cualquiera en el plano, definimos la reflexión en el plano con respecto a L, esto es R_L, de la manera obvia.

Rotaciones:
Consideremos dos líneas en el plano $L_1\ y\ L_2$ y supongamos que $p \in \mathbb{R}^2$ es el punto de intersección tal que $p = L_1 \cap L_2$. Definimos la rotación del plano respecto a ambas rectas como la composición

$$R = R_{L_1} \circ R_{L_2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Ejercicio: Calcular el ángulo θ por el cual rota $R_{L1} \circ R_{L2}$ en términos del ángulo entre $L_1\ y\ L_2$.

Traslaciones:
Definimos una traslación en el plano como la composición

$$T = R_{L_1} \circ R_{L_2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

donde $L_1\ y\ L_2$ son dos líneas paralelas en el plano.

Ejercicio: Calcule el vector por el cual se translada en términos de $L_1\ y\ L_2$ y escriba la función T en coordenadas.

Si $L_1, ..., L_k$, para un número finito $k \geq 1$ es una colección ordenada de líneas, en $\mathbb{R}^2$, entonces definimos el conjunto de funciones

$$Iso(\mathbb{R}^2) = \{R_{L_k} \circ ... \circ R_{L_1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 / \ L_1, ..., L_k \ como \ antes\} \ .$$

Todas las funciones en $Iso\mathbb{R}^2)$ forman un grupo bajo la composición y si $E_{euc}(\mathbb{R}^2)$ son las funciones en $\mathbb{R}^2$ que preservan la distancia Euclideana tenemos el siguiente:

Teorema 2.1. *Hay un isomorfismo de grupos:*

$$E_{euc}(\mathbb{R}^2) = \{g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 / \ preservan \ distancia \ euclideana\} = Iso(R^2) \ .$$

Teorema 2.2. *i) $Iso(\mathbb{R}^2)$ es un grupo no conmutativo (i.e. no Abeliano).*
ii) Cualquier $T \in Iso(R^2)$ es composición de a lo más reflexiones en tres rectas $L1$, L_2, L_3, adecuadas para T.
iii) $Iso(R^2)$ posee una topología que lo hace homeomorfo a la unión disjunta

$$(\mathbb{R}^2 \times S^1) \sqcup (\mathbb{R}^2 \times S^1)$$

donde cada copia $\mathbb{R}^2 \times S^1$ corresponde a:
funciones $\{g\}$ tales que preservan la orientación en $\mathbb{R}^2$, o
funciones $\{g\}$ tales que no preservan la orientación en $\mathbb{R}^2$, respectivamente.
iv)

$$dim(Iso(\mathbb{R}^2)) = 3 \ .$$

3. Triángulos rectángulos.

Aplicamos ahora el plan general en sección 1, teniendo como objetos triángulos en el plano.

Considere un triángulo rectángulo θ *en* $\mathbb{R}^2$, donde como es usual convenimos que dos triángulos son iguales si existe una función $g \in Iso(\mathbb{R}^2)$ que lleva uno en otro.

A partir del triángulo θ es posible considerar los invariantes siguientes; sus ángulos α y β (no rectos), sus catetos a y b, su hipotenusa h, su área ..., en símbolos:

$$I_1(\theta) = \alpha, \qquad I_2(\theta) = \beta, \qquad I_3(\theta) = h,$$
$$I_4(\theta) = a, \qquad I_5(\theta) = b, \qquad I_6(\theta) = \text{área de } \theta \ ...$$

Tenemos las siguientes relaciones entre los invariantes:

$$R_1(I_4(\theta), I_5(\theta), I_3(\theta)) = I_4(\theta)^2 + I_5(\theta)^2 - I_3(\theta)^2 = 0 \ .$$

$$R_2(I_1(\theta), I_2(\theta)) = I_1(\theta) + I_2(\theta) - \frac{\pi}{2} = 0 \ .$$

Consideremos ahora la familia de todos los triángulos rectángulos en el plano. Si (x_1, x_2), (x_3, x_4) y (x_5, x_6) son los vértices de un triángulo rectángulo, todas las ternas posibles quedan descritas como sigue:

$$\Theta := \{(x_1, ..., x_6) \in \mathbb{R}^6 / < (x_3, x_4) - (x_1, x_2), (x_5, x_6) - (x_1, x_2) >= 0\} .$$

De esta manera Θ está determinada por una ecuación de segundo grado o cuádrica en $\mathbb{R}^6$, que es un conjunto cerrado no compacto.

Nuestro problema es describir el espacio cociente $\Theta/Iso(\mathbb{R}^2)$.

En estas coordenadas algunas de las funciones invariantes son:

$$I_4(\theta) = a = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2} ,$$

$$I_5(\theta) = b = \sqrt{(x_5 - x_1)^2 + (x_6 - x_2)^2} .$$

Con ellas tenemos la siguiente función:

$$\pi : \Theta \subset \mathbb{R}^6 \longrightarrow \frac{\Theta}{Iso(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{M}$$

$$(x_1, x_2, ..., x_6) \longrightarrow (max\{a, b\}, min\{a, b\}) ,$$

obteniendo así que su imagen es

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0,\ x < y\} \subset \mathbb{R}^2$$

Esta región en el plano, parametriza el espacio de triángulos rectángulos, salvo posición en $\mathbb{R}^2$. Observemos que $\mathcal{M}$ posee una topología e incluso una métrica. En particular se cumple que

$$dim(\mathcal{M}) = dim(\Theta) - dim(Iso(\mathbb{R}^3)) = 5 - 3 = 2 .$$

Ejercicios.

1) Demuestre que la función π es continua.

2) Calcule $I_1(\theta)$ en términos de las coordenadas $(x_1, x_2, ..., x_6)$.

3) Muestre que todas las $I_j(\theta)$ propuestas son invariantes bajo $Iso(\mathbb{R}^2)$.

4) Muestre que Θ es no compacta en $\mathbb{R}^6$. ¿Cúal es la topólogia y la métrica natural en el?

5) ¿Cual es la métrica natural en $\mathcal{M}$? ¿Cómo se relaciona con la métrica en Θ?

4. Triángulos rectángulos con hipotenusa uno.

Consideremos triángulos rectángulos θ *en* $\mathbb{R}^2$, donde como es usual convenimos que dos trinágulos son iguales si existe una función $g \in Iso(\mathbb{R}^2)$ que lleva uno en otro. Más aún, como en trigonometría elemental dos triángulos rectángulos que difieren por un cambio de escala son iguales, así que solo debemos entender los triángulos rectángulos con hipotenusa uno.

Consideramos la familia de todos los triángulos rectángulos en el plano

$$\Theta := \{(x_1, ..., x_6) \in R^6 / < (x_3, x_4) - (x_1, x_2) , (x_5, x_5) - (x_1, x_2) >= 0\}$$

con las características ya mencionadas. El grupo $H = \{h\}$ se define como el grupo de homotecias e isométrias en $\mathbb{R}^2$, esto es aplicaciones $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ las cuales son composición finita de rotaciones, reflexiones, traslaciones y homotecias en el plano.

Deseamos describir al espacio cociente Θ/H.

A partir de todos los ángulos del triángulo θ es posible considerar los invariantes siguientes

$I_1(\theta) = \alpha$ $\quad$ $I_2(\theta) = \beta$

con la siguiente relación:

$$R_1(I_1(\theta), I_2(\theta)) = I_1 + I_2 - \frac{\pi}{2} = 0 \ .$$

Ahora bien si consideramos $(x_1, x_2, ..., x_6) \in \Theta$ entonces definimos los siguientes valores.

$$v = (x_1 - x_3,\ x_2 - x_4) \ , \ w = (x_1 - x_5,\ x_2 - x_6) \ ,$$

$$u = (x_5 - x_3,\ x_6 - x_4) \ ,$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{< v.u >}{\| v \| \| u \|}\right) ,$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{< w, (-u) >}{\| w \| \| -u \|}\right) ,$$

y a partir de los valores α, β obtenemos la siguiente función.

$$\pi : \Theta \subset \mathbb{R}^6 \longrightarrow \frac{\Theta}{H} = \mathcal{N}$$

$$(x_1, x_2, ..., x_6) \longrightarrow (\text{mín}\{\alpha,\ \beta\})$$

$\mathcal{N} = [0, \pi/4]$ parametriza el espacio de triángulos rectángulos, salvo posición en $\mathbb{R}^2$. Observemos que $\mathcal{N}$ posee una topólogia e incluso una métrica. Ya que usando la relación que proviene del teorema de Pitagoras

$$\mathcal{N} = \{(a, b) \ / \ a^2 + b^2 = 1,\ a > 0,\ b > 0,\ a > b \ \} \subset \mathbb{R}^2$$

el espacio es el arco de círculo unitario que se estudia en trigonometría elemental. En particular se cumple que

$$dim(\mathcal{N}) = dim(\Theta) - dim(H) = 5 - 4 = 1 \ .$$

5. Espacios proyectivos reales y espacio moduli de rectas.

Presentamos ahora otra herramienta para los problemas que nos interesan.

Idea algebraica básica.

Se consideran en $\mathbb{R}^n$ que dos puntos p, $q \in \mathbb{R}^2$ son iguales si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$p = \lambda q \, .$$

Esto es, no nos interesa la norma (o escala) de p solo la proporción entre sus entradas.

Idea geométrica básica.

Se considera en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que dos puntos p y q son iguales si y solo si

$$\{linea\ por\ el\ origen\ y\ p\} = \{linea\ por\ el\ origen\ y\ q\} \quad en\ \mathbb{R}^n \, .$$

Observación.

$p \sim q$ si y solo si $p = \lambda q$,(como en la primera idea) es una relación de equivalencia.

Como conjunto el espacio proyectivo real de dimensión n es

$$\mathbb{RP}^n := \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim} = \{conjunto\ de\ todas\ las\ lineas\ en\ \mathbb{R}^{n+1}\ por\ el\ origen\} \, .$$

Dotemoslo de una topología natural.

Definimos la función de proyección

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^n \, ,$$

$$p \longrightarrow [p] \, ,$$

observamos que

$$\pi^{-1}[p] \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \, ,$$

es la línea en $\mathbb{R}^{n+1}$ que une p y el origen, por ello $\pi^{-1}[p]$ denota la imagen inversa de la clase de equivalencia $[p]$.

Definición 5.1. *Un subconjunto $U \subset \mathbb{RP}^n$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es abierto con la topología Euclideana.*

Lema 5.2. *Con la anterior definición los conjuntos abiertos son una topología en $\mathbb{RP}^n$. Además se cumplen las siguientes afirmaciones:*
i) $\mathbb{RP}^n$ es un espacio Hausdorff.
ii) $\mathbb{RP}^n$ es un espacio compacto.

Vemos algunos casos particulares.

Lema 5.3. $\mathbb{RP}^1$ *es homeomorfo a un círculo usual en $\mathbb{R}^2$.*

Idea de la demostración.
El conjunto $\{(1,y)\ /\ y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ determina todas las rectas, es decir todas las clases en $\mathbb{RP}^1$, salvo una; la recta que proviene del eje y $\{x=0\}$. Al agregarla, estamos agregando un punto al infinito al parámetro real $\{y\}$ con ello obtenemos el círculo.

Lema 5.4.

$$\mathbb{RP}^n = \frac{S^n}{\{p \sim -p\}}.$$

Lema 5.5. *$\mathbb{RP}^2$ es homemorfa a la superficie que se obtiene pegando por sus fronteras un disco cerrado y una Banda de Moebius (con su frontera). En particular, no es una superficie orientable.*

Es posible definir rectas en el espacio proyectivo, en particular para el caso de dimensión dos tenemos: En $\mathbb{RP}^2$ sus puntos son $[p]$ y sus rectas (proyectivas) son subconjuntos de la forma

$$L = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{RP}^2\ /\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0,\ (A,B,C) \neq (0,0,0)\}$$

esto es, la imagen bajo la proyección π de todos los puntos en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ contenidos en un plano usual por el origen. Toda línea proyectiva en $\mathbb{RP}^2$ es homeomorfa a $\mathbb{RP}^1 = S^1$.

La importancia de la geometría determinada por estos puntos y rectas en el plano proyectivo, es que nos proveen de una modelo de geometría no Euclideana:

Teorema 5.6. *$\mathbb{RP}^2$ provista de sus puntos y sus líneas satisface los axiomas de la geometría de Euclides en los que no interviene el quinto postulado de la existencia de parelelas.*

El nuevo quinto postulado en $\mathbb{RP}^2$ dice que no existen paralelas en el siguiente sentido: todo par de rectas proyectivas L_1 , L_2 distintas entre sí en $\mathbb{RP}^2$ se cortan en exactamente un punto proyectivo.

Como una primera aplicación de estos conceptos consideremos la pregunta: ¿Cómo es el espacio $\mathcal{O}$ de todas las rectas $\{L\}$ en el plano $\mathbb{R}^2$?

Teorema 5.7. *Tal espacio es homemorfo a $\mathbb{RP}^2 - \{1\ punto\}$, en particular es una superficie no orientable y no compacta.*

¿Como es el espacio de todas las rectas salvo equivalencia por transformaciones en $Iso(\mathbb{R}^2)$?

Corolario 5.8. *Tal espacio es homeomorfo a un punto.*

Ejercicio. Calcula los siguientes cocientes:
$\{\mathcal{O}\}/\{Rotaciones\}$, $\{\mathcal{O}\}/\{Traslaciones\}$.

6. Moduli de cónicas en el plano.

Nuestro objeto de estudio ahora es una cónica $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^2$. Empezemos por describir la familia de todas la cónicas en el plano. Tenemos ecuaciones del tipo

$$\{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\}$$

por lo tanto, un primer candidato para nuestro espacio de cónicas $\mathcal{O}$ sería:

$$\mathbb{R}^6 = \{(A, B, C, D, E, F)\} \ .$$

Sin embrago, varias correcciones en $\mathbb{R}^6$ para construir $\mathcal{O}$ son necesarias. Primeramente, la cónica de ecuación

$$\{0x^2 + ... + 0y + F = 0\} \ ,$$

es vacía en $\mathbb{R}^2$ y debemos remover los puntos de la forma $\{(0, 0, ..., 0, F)\}$. Segunda corrección: las sextetas $(\lambda A, \lambda B, \lambda C, \lambda D, \lambda E, \lambda F)$, y (A, B, C, D, E, F), para λ un número real no cero, determinan la misma cónica. Aplicando el espacio proyectivo desarrollado en la sección anterior proponemos

$$\Theta := \mathbb{RP}^5 - \{[0, .., 0, F]\} \ .$$

que resulta ser el espacio proyectivo real de dimensión cinco menos un punto. Ella es una variedad diferenciable de dimensión cinco, abierta.

Naturalmente usando el grupo $Iso(\mathbb{R}^2)$ = convenimos que dos cónicas (A, B, C, D, E, F) y (A', B', C', D', E', F') son la misma cónica si existe una isometría g que lleva una cónica en otra.

Nuestro problema es describir el espacio cociente

$$\frac{\mathcal{O}}{Iso(\mathbb{R}^2)} \ .$$

En particular deseamos construir la función de proyección.

$$\pi : \mathcal{O} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}}{Iso(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{M} \ .$$

¿Cuales son las funciones invariantes $I(\mathcal{C})$ para este problema ?

Definimos la excentricidad de una cónica $\mathcal{C}$ como

$$e(\mathcal{C}) := \frac{distancia(directriz, (x, y))}{distancia(foco, (x, y))} \ ,$$

donde el punto (x, y) está en la cónica

Observemos que los valores que toma la excentricidad son $e \in (0, \infty)$. Usando una isometría del plano podemos colocar nuestra cónica de tal forma que uno de sus focos este en $(p, 0)$ para $p \in (0, \infty)$ y que su eje focal sea el eje x.

Más aún, es posible escribir la tal cónica como

$$e = \frac{+\sqrt{(x-p)^2+y^2}}{\sqrt{x}^2}$$

elevando al cudrado y depejando

$$\{(1-e^2)\,x^2+y^2-2px+p^2=0\} := \mathcal{C}_{(e,p)}\ .$$

Teorema 6.1. *Las funciones determinadas por la excentricidad y la distancia al foco, de cónicas*

$$I_1(\mathcal{C}) = e(\mathcal{C})\quad ,\quad I_2(\mathcal{C}) = p$$

son funciones invariantes en el espacio de todas las cónicas bajo la acción del grupo $Iso(\mathbb{R}^2)$.

Es bien sabido que dichas funciones determinan la forma de la cónica, por ejemplo:

Corolario 6.2. *Existen cuatro casos:*
1) $e=0$ *si y solo si* $\mathcal{C}_{(e,p)}$ *es un círculo.*
2) $e\in(0,1)$ *si y solo si* $\mathcal{C}_{(e,p)}$ *es elipse (no círculo).*
3) $e=1$ *si y solo si* $\mathcal{C}_{(e,p)}$ *es parábola.*
4) $e\in(1,\infty)$ *si y solo si* $\mathcal{C}_{(e,p)}$ *es hipérbola.*

Conviene describir algunos casos particulares:
Para $e=\sqrt{2}$, $p>0$ la cónica es una hipérbola con asíntotas ortogonales.?

¿Dónde están las cónicas degeneradas en el espacio moduli? Haciendo $p\longrightarrow 0$ y que e permanezca constante. Tenemos que existen tres casos para $\{(1-\epsilon^2)\,x^2+y^2-2px+p^2=0\}$.

i) $\epsilon\in[0,1)$, $p\longrightarrow 0$, entonces $\{(1-\epsilon^1)x^2+y^2=0\}\longrightarrow \mathcal{C}_{(e,p)}$ es un punto.

ii) $e=1$ $p\longrightarrow 0$, entonces $\{y^2=0\}\longrightarrow \mathcal{C}_{(e,p)}$ es una línea doble.

iii)$e\in(1,\infty)$, $p\longrightarrow 0$, entonces $\{(1-\epsilon^2)x^2+y^2=0\}\longrightarrow \mathcal{C}_{(e,p)}$ son dos líneas que se cruzan.

Resumiendo, tenemos la región

$$\mathcal{M} = \{(e,p)\ /\ e\geq 0,\ p\geq 0\}\subset\mathbb{R}^e$$

tenemos que

$$\pi := (I_1,I_2) : \mathcal{O}\longrightarrow \frac{\mathcal{O}}{Iso(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{M}\ ,$$

describe el espacio moduli de cónicas. En particular se cumple que

$$dim(\mathcal{M}) = dim(\mathcal{O}) - dim(Iso(\mathbb{R}^3)) = 5-3 = 2\ .$$

Es divertido observar que la funciones invariantes deben tener una expresión en términos de las coordenadas $[(A, ..., F)] \in \mathbb{RP}^5$. Por ejemplo para la excentricidad I_1 y haciendo la hipótesis de que el centro de la cónica está en el origen (que nos dice que $E = G = 0$ y usando el que estamos es un espacio proyectivo podemos elegir $F = -1$) tenemos que

$$I_1(A, B, C, 0, 0, -1) = \sqrt{\frac{2\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 2AC}}{A + C \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 2AC}}}$$

donde si $A \leq C$ debe usarse $+$ y si $A \geq C$ debe usarse $-$.

Como un ejemplo expeculativo de lo que sucede con estos cálculos digamos una palabras del problema de hallar el espacio moduli de curvas cúbicas en el plano, salvo equivalencia por isometrías del plano, esto es ¿cómo es el espacio cociente ?

$$\frac{\{A_1x^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + J = 0\}}{Iso(R^2)}.$$

El espacio de todos las cúbicas es un subconjunto del espacio proyectivo $\mathbb{RP}^9$. La dimensión esperada para el cociente es $9 - 3 = 6$. Por ello esperamos que existan seis funciones invariantes $I_1, \ldots, I_6$ que describan a la función de proyección π. O si hubiera más funciones invariantes, esperamos que haya relaciones $R_j(I_1, ..., I_\omega) = 0$ entre ellas. Pero como ya hemos dicho antes todo esto es una especulación.

7. Moduli de Matrices.

Consideremos el conjunto de matrices 2×2 con coeficientes en los números reales $\mathfrak{M}(2, \mathbb{R})$ y el grupo *general lineal* ó grupo de matrices invertibles 2×2 con coeficientes en los reales $GL(2, \mathbb{R})$.

Si $M \in \mathfrak{M}(2, \mathbb{R})$, entonces vista como función $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transforma el plano en el plano.
Deseamos describir las distintas formas cualitativas en que M transforma al plano. Para ello necesitamos introducir algunas herramientas que nos permitan atacar y resolver el problema, las herramientas son:

1. El rango de M.
2. Los valores propios y los vectores propios de M.
3. La órbita y el estabilizador de M.

Una primera clasificación de $\mathfrak{M}(2, \mathbb{R})$ usando el rango es:

1. La matriz M transforma el plano en un punto si y sólo si el rango de M es igual a cero.

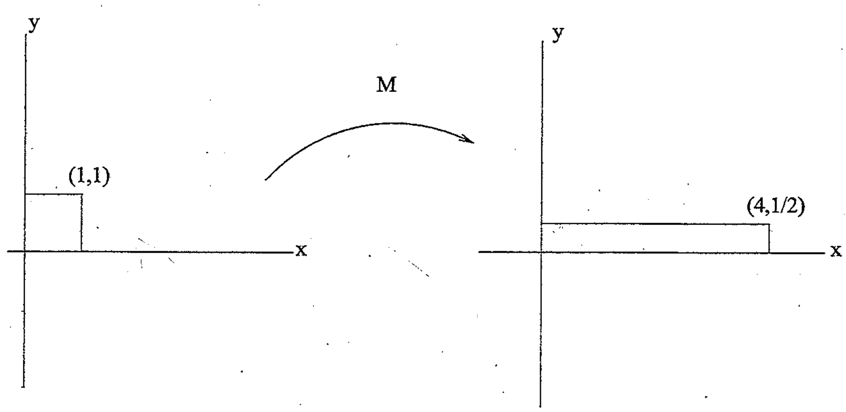
2. La matriz M transforma el plano en una recta si y sólo si el rango de M es igual a uno.
3. La matriz M transforma el plano en el plano de manera biyectiva si y sólo si el rango de M es igual a dos.

El rango resuelve el problema de descripción cualitativa para los casos cero y uno. Para el caso de rango dos es necesario utilizar herramientas más finas puesto que el rango no describe de manera detallada la forma en que M transforma al plano, para ello observemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 7.1. *Consideremos la matriz identidad $I \in \mathfrak{M}(2, \mathbb{R})$, cuenta con rango dos y el plano no sufre cambio alguno bajo esta transformación.*
En segundo término consideremos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

esta matriz también cuenta con rango dos, sin embargo lleva el plano en el plano de manera distinta a la matriz identidad.
La matriz M envía el cuadrado unitario en un rectángulo como en la figura siguiente:



Tranformación del plano mediante M

Ejemplo 7.2. *Consideremos la matriz*

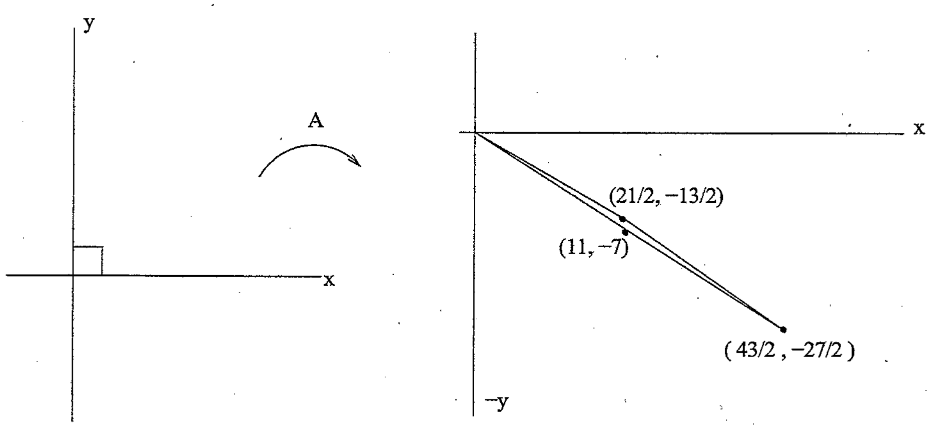
$$A = \begin{pmatrix} 11 & \frac{21}{2} \\ -7 & \frac{-13}{2} \end{pmatrix}.$$

Tomemos en cuenta la base canónica para describir la forma en que A transforma el plano, esto es:

$$\begin{pmatrix} 11 & \frac{21}{2} \\ -7 & \frac{-13}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 11 & \frac{21}{2} \\ -7 & \frac{-13}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{2} \\ \frac{-13}{2} \end{pmatrix}.$$

Si gráficamos como antes, obtenemos la siguiente imagen:



Tranformación del plano mediante M

A primera vista las matrices A y M del Ejemplo 7.2 transforman de manera distinta al plano, ambas matrices son diferentes, sin embargo entre A y M no hay cualitativamente diferencia, para explicarlo,

Ejemplo 7.3. *Consideremos la matriz:*

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

observe que B es una matriz invertible esto es $B \in GL(2, \mathbb{R})$ y además cumple:

$$M = B^{-1}AB.$$

De esta manera $B \in GL(2,\mathbb{R})$ es una matriz que "traduce" la transfomación que M realiza sobre el plano en términos de A y viceversa.

En general si $B \in GL(2,\mathbb{R})$, entonces la matriz $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un cambio de coordenadas lineal de $\mathbb{R}^2$, esto es, B lleva la base canónica $\{e_1, e_2\}$ en una nueva base $\{v_1, v_2\}$ la cual corresponde a los vectores columnas de B.
En el Ejemplo 7.3 $v_1 = (3,-2), v_2 = (-1,1)$.

Ejercicio. Demuestre que entre la matriz M del ejemplo 7.1 y la matriz identidad I no existe una matriz $B \in GL(2,\mathbb{R})$, tal que: $B^{-1}MB = I$.

Para todo $M \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$, las matrices $B^{-1}MB$ y M son cualitativamente la misma transformación puesto que al igual que en el Ejemplo 7.3 el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "B^{-1}MB"] \arrow[d, "B"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R}^2 \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "M"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "B^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Quisieramos distinguir entre dos matrices cualitativamente diferentes (ejemplo 7.1) y no diferenciar entre matrices cualitativamente iguales (ejemplo 7.3) para ello veamos las siguientes:

Definición 7.4. *Si $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$, decimos que M_2 está relacionada con M_1 ($M_2 \sim M_1$) si y sólo si existe un cambio de coordenadas $B \in GL(2,\mathbb{R})$ tal que*

$$B^{-1}M_1B = M_2.$$

Ejercicio. Demostrar que la relación $\sim$, es una relación de equivalencia.

Observación 7.5. *Por lo que se obtiene la siguiente afirmación.*

Dos matrices son cualitativamente iguales si y sólo si son equivalentes.
Nuestro problema es describir

$$\frac{4}{G} = \frac{\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})}{GL(2,\mathbb{R})}$$

Dada la Observación 7.5, en lo que resta de estas notas utilizaremos sólo la palabra equivalentes.

7.1. Clasificación de matrices.

Para toda matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(2, \mathbb{R}),$$

el determinante y la traza de A se definen como:

$$\begin{aligned} det(A) &:= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \\ tra(A) &:= a_{11} + a_{22}. \end{aligned}$$

Si $B \in GL(2, \mathbb{R})$ se tienen las siguientes igualdades:

$$det(A) = det(B^{-1}AB), \tag{1}$$

$$tra(A) = tra(B^{-1}AB). \tag{2}$$

Ejercicio. Verifique las igualdades (1) y (2).

Así mismo, la matriz A cuenta con su *polinomio característico*, el cual se define como:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} \\ &= (\lambda)^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ &= (\lambda)^2 - (tra(A))\lambda + det(A). \end{aligned}$$

Definición 7.6. *Para una matriz $M \in \mathfrak{M}(2, \mathbb{R})$, diremos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor propio de M si α es raíz del polinomio característico de M.*

Hemos mostrado el siguiente:

Teorema 7.7. *Si dos matrices $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}(2, \mathbb{R})$ son equivalentes, entonces la traza, el determinante y el polinomio característico respectivos son iguales.*

Ejercicio. Justificar o dar un contraejemplo a la siguiente afirmación: Si la traza y el determinante de dos matrices $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}(2, \mathbb{R})$ coinciden, entonces son equivalentes.

Dado que el polinomio característico es el mismo para cualesquier par de matrices equivalentes, entonces sus raíces coinciden. Recordemos la importancia de las raíces del polinomio característico de una matriz mediante la siguiente

Definición 7.8. *Un vector $v \in \mathbb{R}^2$, es un vector propio de M asociado al valor propio α si*

$$Mv = \alpha v.$$

Corolario 7.9. *Los valores propios de cualquier par de matrices equivalentes son iguales.*

Todo valor propio cuenta con un vector propio asociado?

Lema 7.10. *¿Todo valor propio $\alpha \in \mathbb{R}$ de una matriz $M \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ tiene al menos un valor propio asociado.*

Demostración. Si α es un valor propio de M entonces

$$det(M - \alpha I) = 0,$$

lo que implica que $M - \alpha I$ es una matriz de rango menor que dos y por lo tanto tiene núcleo de dimensión mayor o igual a uno, de esta forma existe $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$ tal que

$$(M - \alpha I)v = 0.$$

Lo cual equivale a

$$Mv = \alpha Iv = \alpha v,$$

así v es un vector propio asociado a α.
Qué relación existe entre los vectores propios asociados a dos valores propios distintos?

Lema 7.11. *Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$ son valores propios de M entonces sus vectores propios asociados son linealmente independientes.*

Demostración. Si v y w son los vectores propios de α y β respectivamente entonces se cumple

$$Mv = \alpha v,$$

$$Mw = \beta w.$$

Suponga que no son linealmente independientes, es decir, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $v = aw$ entonces

$$\alpha v = Mv = M(aw) = a(Mw) = a(\beta w) = \beta(aw) = \beta v,$$

lo cual es una contradicción, v y w son linealmente independientes.

Corolario 7.12. *Considere $M \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ y α un valor propio de M, entonces α tiene a lo más dos vectores propios asociados linea lmente independientes.*

Hasta este punto los valores propios que hemos tratado han sido reales sin embargo es posible considerar valores propios complejos no reales.

Corolario 7.13. *Toda matriz $M \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ tiene exactamente dos valores propios los cuales son de una de las siguientes posibilidades:*

i) $\alpha \neq \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii) $\alpha = \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

iii) $\alpha \neq \beta, \quad \alpha = \bar{\beta}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Proposición 7.14. *Los valores propios complejos no reales asociados a una matriz $M \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ tienen vectores propios con entradas complejas no reales.*

Demostración. Si v es un vector propio asociado a $\alpha = a + ib$, $b \neq 0$, entonces

$$Mv = (a + ib)v,$$

lo cual implica que M ó v cuentan con entradas complejas no reales, dadas las características de M concluimos que v tiene entradas complejas no reales.
Los vectores propios son la principal herramienta de las secciones posteriores , sin embargo los valores propios no serán suficientes para obtener una clasificación de las matrices.

7.1.1. Clasificación por formas canónicas de Jordan.

La primera clasificación que consideramos para las matrices en el conjunto $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ se basa en comparación de los de valores y vectores propios, veamos la tabla 1

Polinomio Característico.	Valores propios reales de M distintos.	Vectores propios de M, linealmente independientes.	Forma canónica de Jordan.	Nombre.
$(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$	2	2	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$	Diagonal (D)
$(\lambda-\alpha)(\lambda-\alpha)$	1	2	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$	Homotecia (H)
$(\lambda-\alpha)(\lambda-\alpha)$	1	1	$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$	Semisimple (S)
$[\lambda-(a+ib)][\lambda-(a-ib)]$, $b \neq 0$	0	0	$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$	Rotación (R)

Cuadro 1: Clasificación de matrices mediante formas canónicas de Jordan.

Teorema 7.15. *Toda matriz $A \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ es equivalente a una de las siguientes matrices:*

$$\begin{aligned}
D &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq \beta, && \textit{Diagonal;} \\
H &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, && \textit{Homotecia;} \\
S &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, && \textit{Semisimple;} \\
R &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad b \neq 0, && \textit{Rotación.}
\end{aligned}$$

No que, por simplicidad, la matriz 0 es una homotecia.

Demostración. A partir de la fórmula general para raíces de polinomios de grado dos, obtenemos que los valores propios de A están dados por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{tra(A)) \pm \sqrt{(tra(A))^2 - 4det(A)}}{2}.$$

Si $(tra(A))^2 - 4det(A) > 0$, entonces A cuenta con dos valores propios distintos

$\lambda \neq \beta$, por lo tanto A es equivalente a una matriz *Diagonal* D , de la forma

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si $(tra(A))^2 - 4det(A) = 0$, entonces los valores propios de la matriz A coinciden $\lambda = \lambda$, derivandose los dos casos siguientes:

i) La matriz A cuenta con dos vectores propios, entonces A es equivalente a una matriz *Homotecia* H, donde

$$H = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

ii) La matriz A cuenta con un solo vector propio, entonces A es equivalente a una matriz *Semisimple* S, de la forma

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si $(tra(A))^2 - 4det(A) < 0$ entonces $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ con $b \neq 0$, por lo tanto A no tiene valores propios reales y es equivalente a una matriz tipo rotación R, de la forma

$$R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

La clasificación obtenida mediante la Forma Canónica de Jordan nos indica sin *ambigüedad* la clase de equivalencia a la cual pertenece cada una de las matrices en $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$, para ello basta calcular sus valores propios y cantidad de los vectores propios asociados y compararlos según el cuadro (1).

La clasificación dada por (7.15) es una buena clasificación sin embargo no especifíca la forma en que las matrices transforman el plano por ejemplo, si consideramos las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ambas son matrices Homotecias y la transformación que le hacen al plano es claramente distinta, esto nos lleva otra clasificación usando algunos argumentos geómetricos.

Matriz	Valores propios α, β	Vectores propios linealmente ind.	Transformación	Otras características
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha = \beta = 0$	cero	Transforma el plano en un punto.	
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha = \beta = 0$	uno	Transforma el plano en la recta $y = 0$.	El eje x lo envía al origen.
$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha \neq 0$ $\beta = 0$	uno	Transforma el plano en la recta $x = 0$.	El eje y lo envía al origen.
$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$	$\alpha \neq 0$	dos	Transforma el plano en el plano. Envía el cuadrado unitario en el cuadrado de lado α.	Preserva orientación. Si $\|\alpha\| < 1$, contracción. Si $\|\alpha\| > 1$, expansión. Si $\alpha = 1$, preserva distancias.
$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$	$\beta = \alpha \neq 0$	uno	Transforma el plano en el plano llevando el cuadrado unitario en un paralelogramo con base α.	
$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$	$\alpha \neq 0$ $\beta \neq 0$ $\alpha \neq -\beta$	dos	Transforma el plano en el plano enviando el cuadrado unitario en un rectángulo de base α y altura β.	
$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$	$\alpha = a + ib$ $\beta = a - ib$	cero	Transforma el plano en el plano mediante una rotación compuesta de una expansión o contracción.	Si $a^2 + b^2 > 1$, expansión. Si $a^2 + b^2 < 1$, contracción.
$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$	$\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\beta = -\sqrt{a^2 + b^2}$	cero	Transforma el plano en el plano mediante la composición de una rotación y una reflexión.	$\alpha = (-\beta)$

Cuadro 2: Geometría de transformaciones lineales.

7.1.2. Clasificación geométrica.

Para iniciar la clasificación desde el punto de vista geómetrico consideraremos matrices y transforman el plano.

Corolario 7.16. *Toda matriz $A \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ es equivalente a una de las siguientes transformaciones del plano, $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.*

1. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$
4. $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0.$
5. $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$
6. $M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$
7. $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad b \neq 0.$
8. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad b \neq 0.$

$$\frac{tra(A) \pm \sqrt{(tra(A))^2 - 4det(A)}}{2}.$$

Si $(tra(A))^2 - 4det(A) > 0$, entonces $\alpha \neq \beta$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto obtenemos los siguientes casos:

i) Si $\beta = 0$, entonces A es equivalente a la matriz de la forma (3).

ii) Si α y β son distintos de cero y $\alpha = -(\beta)$, entonces A es equivalente a una matriz de la forma (8).

iii) Si α y β son distintos de cero y $\alpha \neq -(\beta)$, entonces A es equivalente a una matriz de la forma (4).

Si $(tra(A))^2 - 4det(A) = 0$, entonces los valores propios de la matriz A coinciden $\alpha = \beta$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Por lo tanto obtenemos los siguientes casos

i) Si A cuenta con dos vectores propios y $\alpha = \beta = 0$, entonces A es equivalente a una matriz de la forma (1).

ii) Si A cuenta con un solo vector propio $\alpha = \beta = 0$, entonces A es equivalente a una matriz de la forma (2).

iii) Si A cuenta con dos vectores propios y $\alpha = \beta \neq 0$, entonces A es equivalente a una matriz de la forma (5).

iv) Si A cuenta con un solo vector propio y $\alpha = \beta \neq 0$, entonces A es equivalente a una matriz de la forma (6).

Si $(tra(A))^2 - 4det(A) < 0$ entonces $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ y $\alpha = \bar{\beta}$, de esta manera A es equivalente a una matriz de la forma (7).

7.1.3. Clasificación de matrices mediante órbitas.

En la sección anterior definimos la clasificación geométrica de las matrices, en ella se destacó la necesidad de diferenciar entre ciertas matrices que a pesar de tener la misma cantidad de valores propios y de vectores propios sus transformaciones geométrica del plano resultaban muy distintas. Estas características nos llevan a formar una clasificación más fina.

Definición 7.17. *La acción por conjugación de $GL(2,\mathbb{R})$ sobre el conjunto $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ es como la función:*

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & \mathfrak{M}(2,\mathbb{R}) \times GL(2,\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathfrak{M}(2,\mathbb{R}) \\ & (M,B) & \mapsto & B^{-1}MB \end{array}$$

Definición 7.18. *La órbita de una matriz $M \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ respecto a la acción de $GL(2,\mathbb{R})$ sobre $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ es el conjunto de matrices en $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ que son la imagen de M bajo la acción Φ al dejar variar $B \in GL(2,\mathbb{R})$, esto es:*

$$\mathcal{O}(M) := \{A \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R}) / B^{-1}MB = A, \text{ para } B \in GL(2,\mathbb{R})\}.$$

De acuerdo a lo anterior si $M, A \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$, entonces A es equivalente con M si y sólo si A pertenece a la órbita de M, es decir

$$A \sim M \text{ si y sólo si } A \in \mathcal{O}(M),$$

deseamos describir cada una de las órbitas, saber cuantas existen. Para lograrlo identificaremos aquellas propiedades o números asociados a las matrices en $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ tales que se conservan bajo la acción de Φ, a estas propiedades las llamaremos *invariantes de la acción,* (ver el glosario).

Corolario 7.19. *La traza, el determinante, el polinomio característico y los valores propios son invariantes bajo la acción por conjugación Φ.*

Ejemplo 7.20. *Considere las matrices*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

ambas matrices pertenecen a órbitas distintas puesto que sus valores propios no coinciden.

Ejemplo 7.21. *Considere*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

ambas matrices tienen los mismos valores propios, sin embargo la órbita de A y la órbita de B no son iguales puesto que no tienen la misma cantidad de vectores propios. Las matrices A y B son un ejemplo de matrices no equivalentes que tienen los mismos valores propios.

Ahora que sabemos como distinguir las órbitas surge de forma natural la siguiente pregunta.

Pregunta. ¿Cuántas órbitas existen?

Para contar las distintas órbitas consideraremos en primer lugar aquellas que se obtienen a partir de las homotecias.
Dado que las órbitas de las homotecias se diferencían entre sí a partir de sus valores propios obtenemos que entre las homotecias existen tantas órbitas como números reales.
Bajo un razonamiento similar observamos que:
Existen tantas órbitas obtenidas a partir de las matrices semisimples como número reales.
Existen tantas órbitas obtenidas a partir de las matrices diagonales como puntos en el plano menos una recta, esto es el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}$.
Existen tantas órbitas obtenidas a partir de las matrices de rotación como números complejos no reales.

7.1.4. Características de las órbitas.

Ahora queremos describir cada una de las órbitas ;en sus aspectos topológico, y, geométrico, etcétera y de esta manera responder las siguientes preguntas:

¿Cuál es la topología de cada una de las órbitas?
¿Las órbitas son conjuntos conexos?
¿Son conjuntos algebraicos?
¿Qué dimensión tienen?

Consideramos las siguientes herramientas:

Definición 7.22. *Para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cuyas derivadas parciales de todos los órdenes son continuas, $y \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular de f si*

$$\mathcal{D}f_x : \mathcal{T}_x(X) \to \mathcal{T}_y(Y)$$

es sobreyectiva en x para todo $x \in f^{-1}(y)$.
Un valor $y \in \mathbb{R}^m$ que no sea un valor regular de f es un valor crítico de f.

La importancia de los valores regulares de una función f se fundamenta en el hecho de que, bajo ciertas coordenadas locales la imagen inversa de un valor regular es un conjunto de características geométricas sencillas.

Teorema 7.23. *Si $y \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces su imagen inversa $f^{-1}(y)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^4$ con dimensión igual a $n - m$.*

Veamos como se aplican los resultados anteriores al problema de órbitas de matrices.

Existe una identificación natural entre el conjunto $\mathfrak{M}(2, \mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^4$ tal que: a cada matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(2, \mathbb{R}),$$

le asocia el punto $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$.

A partir de la traza y determinante las siguientes funciones en $\mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z,w) & \mapsto & x+w. \\ D: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z,w) & \mapsto & xw-yz. \end{array}$$

A su vez estas funciones definen una nueva función (T, D) de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rccc} (T,D): & \mathbb{R}^4_{(x,y,z,w)} & \to & \mathbb{R}^2_{(t,d)}, \\ & (x,y,z,w) & \mapsto & (x+w, xw-zy). \end{array}$$

Quisieramos saber para que puntos en $\mathbb{R}^4$ la función (T, D) es una submersión, para ello calculamos su derivada obteniendo

$$\mathcal{D}(T,D)|_{x,y,z,w} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ w & -z & -y & x \end{pmatrix}.$$

(T, D) es una sumersión en aquellos puntos $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tales que $\mathcal{D}(T, D)$ sea sobreyectiva, esto es, en los puntos $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ donde $\mathcal{D}(T, D)$ es una matriz de rango dos.

El rango de la matriz $\mathcal{D}(T, D)$ no es cero y para las otras posibilidades obtenemos las siguientes condiciones:

$$Rango[\mathcal{D}(T,D)] = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \quad z = 0, y = 0, w = x. \\ 2 & \quad \text{de otra forma.} \end{cases}$$

El caso en que el rango de la matriz $\mathcal{D}(T, D)$es uno se obtiene en los puntos $(\lambda, 0, 0, \lambda) \in \mathbb{R}^4$. Los puntos con estas características forman una recta por el origen $\mathcal{S}$ en $\mathbb{R}^4$, esto es

$$\mathcal{S} = \{(\lambda, 0, 0, \lambda)\}.$$

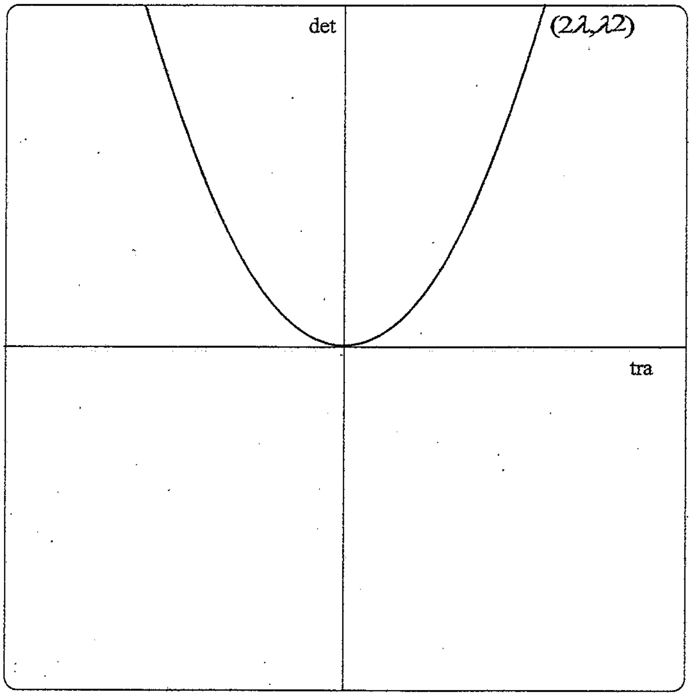
La recta $\mathcal{S}$ corresponde al subconjunto de $\mathfrak{M}(2, \mathbb{R})$ de las matrices de la forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

De acuerdo a la definición 7.22, un punto en $\mathbb{R}^2$ es un valor regular de (T, D) si su imagen inversa no intersecta al conjunto $\mathcal{S}$ y los valores críticos de (T, D) corresponden a la imagen de la recta $\mathcal{S}$ bajo la función (T, D), esto es

$$(T, D)(\lambda, 0, 0, \lambda) = (2\lambda, \lambda^2),$$

que forman una parábola en $\mathbb{R}^2$.



Valores regulares de $T \times D$

La imagen inversa de los valores regulares forman variedades diferenciales dimensión dos.
Quienes son estos "objetos geométricos" ¿Qué relación tiene con las órbitas de la acción Φ?

Ejemplo 7.24. *Considere las siguientes matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Las matrices A y B se representan en $\mathbb{R}^4$ por $(3,2,1,2),(1,0,0,4)$ respectivamente, además se cumple que

$$(T \times D)(3,2,1,2) = (T \times D)(1,0,0,4) = (5,4).$$

Observemos que $(5,4) \neq (2\lambda, \lambda^2)$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo que $(5,4)$ es un valor regular de la función $(T \times D)$ y de acuerdo al teorema (7.23) la dimensión de la imagen inversa$\{(T \times D)^{-1}(5,4)\}$ es dos.

La imagen inversa $\{(T,D)^{-1}(5,4)\}$ *coincide con la órbita de las matrices, esto es*

$$\{(T\times D)^{-1}(5,4)\} = \mathcal{O}(A)$$

Entonces la órbita de la matriz A *es una variedad diferenciable de dimension dos.*

Ejemplo 7.25. *Cosideremos las matrices*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Las matrices B, C, *están representadas en* $\mathbb{R}^4$ *repectivamente por* $(2,1,0,2)(2,0,0,2)$. *Las imágenes de los tres puntos en* $\mathbb{R}^4$ *bajo* (T,D) *son iguales a* $(4,4)$, *esto es*

$$= (T,D)(\boldsymbol{a}) = (T,D)(\boldsymbol{b}) = (T,D)(\boldsymbol{c}) = (4,4).$$

Entonces como $\boldsymbol{c} \in \mathcal{S} \cap (T,D)^{-1}(4,4)$, *se tiene que* $(4,4)$ *no es regular lo que se confirma si consideramos* $\lambda = 2$ *y observamos que* $(2\lambda, \lambda^2) = (4,4)$.

Es posible mostrar que la imagen inversa $(T,D)^{-1}(4,4)$ *se compone de dos órbitas esto es*

$$(T,D)^{-1}(4,4) = \mathcal{O}(B) \cup \mathcal{O}(C).$$

En los ejemplo anteriores se cumple lo siguiente:
La imagen inversa de un valor regular de la función (T,D) se compone de una sola órbita.
La imagen inversa de un valor crítico de la función $(T \times D)$ se compone de dos órbitas diferentes.
¿Se cumple en general? para responder a esta pregunta es necesario determinar lo siguiente.

¿Cómo es la órbita de las matrices diagonales en $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$?
¿Cómo es la órbita de las matrices homotecias en $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$?
¿Cómo es la órbita de las matrices semisimples en $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$?
¿Cómo es la órbita de las matrices de rotación en $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$?

7.1.5. Órbita de matrices homotecias.

Para cada $\lambda \neq 0$ obtenemos una homotecia H de la forma:

$$H = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

y cada matriz H genera una órbita distinta.

Si $A \in \mathcal{O}(H)$ entonces existe una matriz $B \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que

$$A = BMB^{-1}$$

y entonces $A = M$.

Obtenemos que cada matriz H definida como antes genera una órbita formada únicamente por H la cual se representa en $\mathbb{R}^4$ por el punto $(\lambda, 0, 0, \lambda)$.
Las órbitas de las homotecias en $\mathbb{R}^4$ siempre tienen $z = 0$, por lo que podemos interpretarlas como puntos en $\mathbb{R}^3$ con coordenadas (x, y, w), obteniendo la siguiente figura:

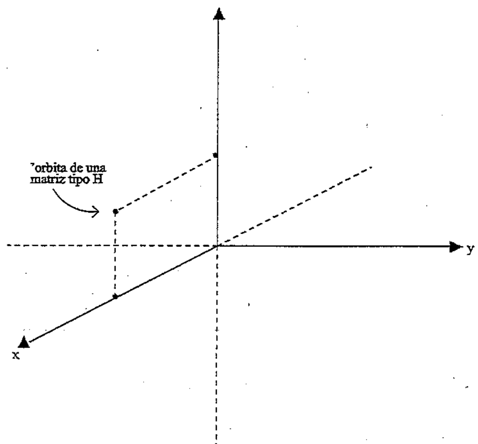


Fig.1 Una órbita del tipo H.

7.1.6. Órbita de matrices diagonales.

Por valores $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ tal es que $\lambda \neq \beta$, obtenemos una matriz diagonal D.

¿Como es la órbita de D?
Responder a la pregunta anterior equivale a determinar todas las matrices M tales que $B^{-1}MB = D$, es decir, si

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

entonces se cumple

$$xw - zy = \lambda\beta, \tag{3}$$

$$x + w = \lambda + \beta. \tag{4}$$

A partir de la ecuación (4) obtenemos

$$w = \lambda + \beta - x$$

y sustituyedo en (3) obtenemos

$$x(\lambda + \beta - x) - zy = \lambda\beta$$

la cual es equivalente a

$$-x^2 + (\lambda + \beta)x - zy - \lambda\beta = 0\ . \tag{5}$$

Para cada par de valores λ, β la ecuación (5) determina la órbita de la matriz diagonal D. Si eliminamos el término mixto podremos determinar su topología, esto es:

$$\frac{(x' - \frac{tra(M)}{2})^2}{\frac{Disc(M)}{4}} - \frac{(y')^2}{\frac{Disc(M)}{2}} + \frac{(z')^2}{\frac{Disc(M)}{2}} = 1, \tag{6}$$

donde

$$Disc(M) := (tra(M)^2 - 4det(M)) > 0$$

De esta manera por cada par λ, β se tiene que la órbita definida por la ecuación (6) es como en la figura ?

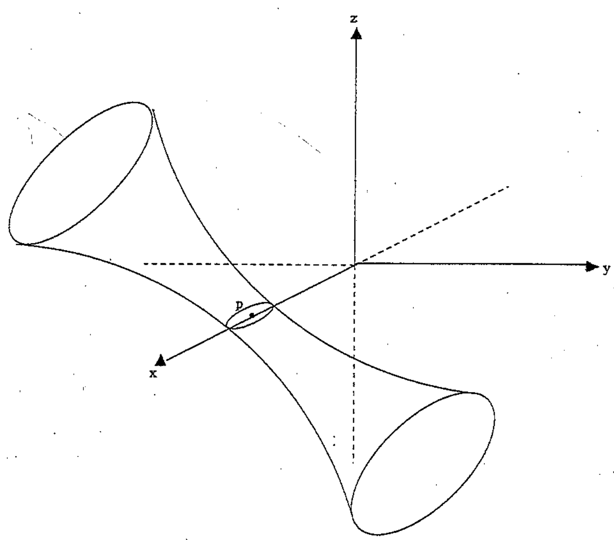


Fig.2 Órbita para D, hiperboloide de un solo manto.

7.1.7. Órbita de matrices de rotación.

Suponga que R es una matriz de rotación de la forma:

$$R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad b \neq 0 .$$

Para encontrar la forma que tienen las matrices que pertenecen a la órbita de R se realiza el mismo cálculo hecho en el caso de las matrices diagonales obteniendo a partir de (6) lo siguiente:

$$\frac{(x' - \frac{tra(M)}{2})^2}{\frac{Disc(M)}{4}} - \frac{(y')^2}{\frac{Disc(M)}{2}} + \frac{(z')^2}{\frac{Disc(M)}{2}} = 1, \tag{7}$$

donde

$$Disc(M) := (tra(M)^2 - 4det(M)) < 0$$

y dado que para las rotaciones el discriminante es negativo se tiene que la órbita de R es como en la figura 3.

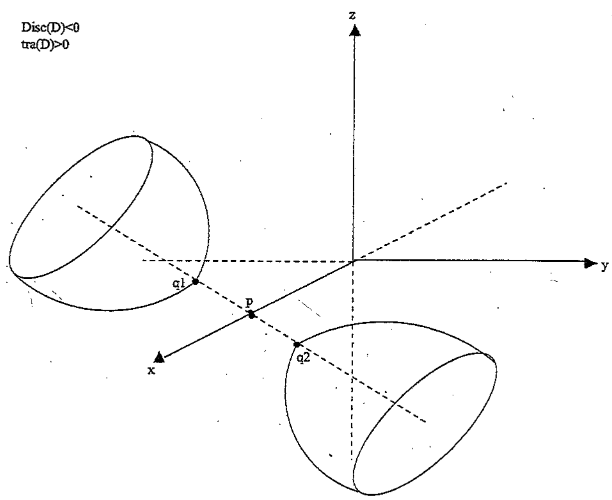


Fig.3 Órbita para R, hiperboloide de dos mantos.

7.1.8. Órbita de matrices semisimples.

Por cada valor $\lambda \in \mathbb{R}$ obtenemos una matriz semisimple S de la forma

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Suponga que hemos fijado una matriz semisimple S y considere $M \in \mathcal{O}(S)$, cómo es M?
Demuestre que si $M \in \mathcal{O}(S)$ entonces M no es diagonal.

La órbita de S se compone de las matrices

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

donde

$$xw - zy = \lambda^2,$$
$$x + w = 2\lambda\ .$$

Como la matriz M a priori no es diagonal entonces no es posible que $z = y = 0$. Si utilizamos el mismo argumento usado en el caso de las matrices diagonales entonces se obtiene:

$$(x' - \lambda)^2 + \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{1}{2}(z')^2 = 0,$$

la cual es equivalente a

$$(y')^2 = z^2 + \frac{(x' - \lambda)^2}{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Por cada valor $\lambda \in \mathbb{R}$ la ecuación (8) determina la órbita de una matriz semisimple S, dicha órbita corresponde a un cono elíptico menos el punto

$$p = (\lambda, 0, 0, 0),$$

este punto no pertence a la órbita de S ya que como se observó antes p representa a la órbita de la matriz diagonal $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$,
La siguiente figura describe la topología de la órbita de S:

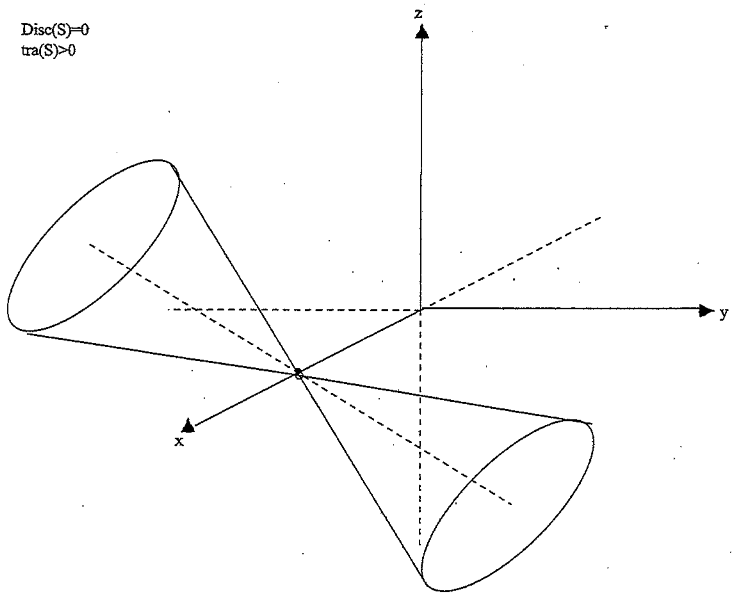


Fig.D Órbita para S.

7.2. Estabilizadores.

En la sección anterior describimos la topología correspondiente a cada una de las órbitas, ahora desearíamos verificar la información que ya conocemos calculando sus respectivas dimensiones, como variedades para ello es necesaria una herramienta nueva.

Definición 7.26. *El estabilizador de una matriz $M \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ respecto a la acción de $GL(2,\mathbb{R})$ sobre $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$, es el conjunto de matrices $B \in GL(2,\mathbb{R})$ que bajo la acción no cambian a M, esto es:*

$$Est(M) := \{B \in GL(2,\mathbb{R}) \ / \ B^{-1}MB = M\}.$$

Las preguntas naturales que surgen a partir de la definición anterior son: ¿Cómo es el estabilizador para una matriz diagonal D , M o S?

7.2.1. Estabilizadores de matrices diagonales.

Si D es una matriz diagonal ¿Qué matrices se encuentran en el estabilizador de D?

Para responder la pregunta observe que si D es de la forma

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \lambda \neq \beta,$$

entonces por definición, el estabilizador de D está formado por las matrices $B \in GL(2,\mathbb{R})$ tales que $B^{-1}DB = D$, esto es:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{det(B)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{det(B)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \beta c & \beta d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{det(B)} \begin{pmatrix} \lambda da - \beta bc & \lambda db - \beta db \\ \beta ac - \lambda ac & \beta ad - \lambda bc \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} det(B)\lambda &= \lambda da - \beta bc, \\ 0 &= \lambda db - \beta db, \\ 0 &= \beta ac - \lambda ac, \\ det(B)\beta &= \beta ad - \lambda bc. \end{aligned}$$

Entonces, de forma equivalente obtenemos

$$\begin{aligned} cb(\lambda-\beta) &= 0, \\ da &= 0, \\ bc &= 0. \\ cb(\lambda-\beta) &= 0, \end{aligned}$$

Es necesario resolver estas ecuaciones tomando en cuenta que B es una matriz de determinante distinto de cero, por lo que no puede ocurrir que a y c sean ambos cero, de igual manera b y d no pueden ser ambos cero, a y b no pueden ser ambos cero, c y d no pueden ser ambos cero.
Observemos que si $a = 0$, entonces $c \neq 0$ y por lo tanto $b = 0$ siendo esto una contradicción, en conclusión $a \neq 0$.
Si $a \neq 0$ entonces $c = 0$ por lo que $d \neq 0$ y $b = 0$, esto implica que B es una matriz diagonal.
De lo anterior se tiene el siguiente:

Lema 7.27. *Para toda matriz diagonal D se cumple que el estabilizador $Est(D)$ se compone de todas las matrices diagonales y tanto el estabilizador como la órbita de D son de dimensión dos.*

7.2.2. Estabilizadores de matrices homotecias.

De manera similar a lo hecho en las matrices diagonales hacemos el cálculo correspondiente para las matrices del tipo H.

Su estabilizador se compone de las matrices $B \in GL(2, \mathbb{R})$ tales que

$$B^{-1}HB = H \, .$$

Sin embargo, por definición $H = \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y así se obtiene que cualquier matriz $B \in GL(2, \mathbb{R})$ se encuentra en el estabilizador de H puesto que para toda $B \in GL(2, \mathbb{R})$ se cumple lo siguiente

$$B^{-1}HB = B^{-1}(\lambda I)B = \lambda B^{-1}IB = \lambda I = H.$$

Hemos demostrado el:

Lema 7.28. *Para toda matriz Homotecia H se cumple que su estabilizador $Est(H)$ se compone de todas las matrices el grupo general lineal, así el estabilizador de H tiene dimensión cuatro y la órbita de H tiene dimensión cero (solo se compone de H).*

7.2.3. Estabilizador de las matrices semisimples.

Para las matrices del tipo S su estabilizador $Est(S)$ se compone de todas las matrices $B \in GL(2,\mathbb{R})$ tales que

$$B^{-1}SB = S.$$

Al igual que en los casos anteriores calculemos la forma de las matrices que lo componen , esto es si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $B \in Est(S)$ entonces se cumple:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{det(B)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{det(B)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda a + c & \lambda b + d \\ \beta c & \beta d \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{det(B)}\begin{pmatrix} \lambda da + dc - \lambda bc & \lambda db + d^2 - \lambda db \\ \lambda ac - \lambda ac - c^2 & \lambda ad - \lambda bc - dc \end{pmatrix}, \\
&= \frac{1}{det(B)}\begin{pmatrix} \lambda det(B) + dc & d^2 \\ -c^2 & \lambda ad - \lambda det(B) - dc \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

entonces $c = 0, d = 1, a = a, b = b$ lo cual equivale a que B sea de la forma

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

De lo cual obtenemos el:

Lema 7.29. *Para toda matriz M semisimple S se cumple que el $Est(S)$ se compone de todas las matrices de la forma*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0,$$

por lo que la dimensión del estabilizador y de la órbita de una matriz semisimple S es dos.

Los anteriores resultados se leen como sigue:

Los conos elípticos y parabólicos de uno y dos mantos cuentan con dimensión dos, así las órbitas correspondientes a las matrices Semisimples, Homotecias y de Rotación es dos.
Los puntos cuentan con dimensión cero, por lo tanto la dimensión de las órbitas correspondientes a las matrices Diagonales es cero.
En símbolos se expresa como.

$dim(\mathcal{O}(D)) = 2,$
$dim(\mathcal{O}(H)) = 0,$
$dim(\mathcal{O}(R)) = 2.$
$dim(\mathcal{O}(S)) = 2.$

7.3. Moduli de matrices.

Ahora que hemos descrito las órbitas posibles para cada tipo así como su topología y dimensión, observamos lo siguiente:

Si M es una matriz tipo D, entonces $\mathcal{O}(M)$ es un cerrado en la topología de Zariski, puesto que si $M \sim D$ entonces $\mathcal{O}(M) = V(xw-zy-\lambda\beta,\ x+w-(\lambda+\beta))$, siendo así un conjunto conexo e irreducible de dimensión dos.

Si M es una matriz tipo H, $\mathcal{O}(M)$ es un cerrado en la topología de Zariski, puesto que si $M \sim H$ entonces $\mathcal{O}(M) = V(x-\lambda, y, z, w-\lambda)$, siendo así un conjunto conexo e irreducible de dimensión cero (su órbita consta de un solo punto).

Si M es una matriz tipo S, $\mathcal{O}(M)$ es un cerrado en la topología de Zariski, puesto que si $M \sim S$ entonces $\mathcal{O}(M) = V(x+w-2\lambda, xw-yz-\lambda^2) \setminus \{\lambda, 0, 0, \lambda\}$. Por lo que su órbita no es un cerrado en la topología de Zariski.

De acuerdo a lo descrito en todo lo anterior se obtiene la siguiente figura:

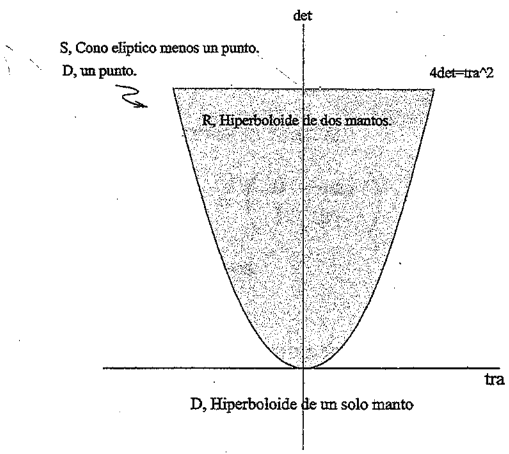


Fig.E Moduli de matrices.

Para cada punto en la párabola surgen dos posibles órbitas:

1. Cono Elíptico, correspondiente a las matrices del tipo S.

2. Un Punto, correspondiente a la matriz del tipo H.

A diferencia de las órbitas de las matrices del tipo H, la órbita de las matrices del tipo S tienen dimensión máxima (dimensión dos).

Si descartamos las matrices del tipo H, se cumple que por cada punto del plano anterior le corresponde una única clase de órbita, esto es:

Suponga que $q = (tra, det) = (a_1, a_2)$ es tal que $a_1 - 4a_2 = 0$ entonces a este punto le asociamos la órbita del tipo S tal que su polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - a_1\lambda + a2$.

Ello implica que:

Si eliminamos las matrices del tipo H, entonces existe una biyección entre los puntos del plano (tra, det) y las clases de matrices (órbitas) y estas matrices cuentan con una órbita de dimensión máxima.

Definición 7.30. *Diremos que $M \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$, es una matriz regular si $\mathcal{O}(M)$ es una matriz cuya órbita bajo la acción del grupo $GL(2)$ cuenta con dimensión máxima.*

Al conjunto de matrices regulares las denotaremos con $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})^{reg}$, el cual es un abierto de Zariski puesto que es el complemento del conjunto cerrado $V(x-w, y, z)$.

Ahora definimos una familia de matrices F parametrizadas por $\mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

A cada punto (a_1, a_2) le asociamos la matriz

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

F cumple las siguientes afirmaciones:

1. A cada punto en $\mathbb{R}^2$ se le asocia una única matriz en F.
2. Sean $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$, entonces $M_a \sim M_b$ si y sólo si $a = b$.

Lo que nos indica que no existen matrices equivalentes dentro de la familia F y que F está compuesta exclusivamente por matrices regulares.

Suponga que contamos con otra familia $\mathcal{C}$ de matrices regulares parametrizada por una variedad $\mathcal{V}$ y sea $v \in \mathcal{V}$ el punto que parametriza a la matriz $C_v \in \mathcal{C}$. Si $p(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda + b$, es el polinomio característico de C_v consideramos la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & a \end{pmatrix} \in F,$$

esta matriz pertenece a la órbita de C_v, por lo tanto esta órbita ya está considerada en la famililа F además lo anterior se cumple para cualquier punto de la variedad $\mathcal{V}$ y por lo tanto para cualquier órbita en $\mathcal{C}$.
A la familia F le llamaremos familia universal para las matrices regulares.

8. Referencias.

V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations.* Springer–Verlag, 1983. [Contiene una discusión amplia del espacio de matrices en todas las dimensiones, ver su capítulo 6.]

A. L. Besse, *Einstein Manifolds.* Springer–Verlag, 1987. [Describe algunso espacios moduli en geometría diferencial, ver su capítulo 12.]

L. Brambila (et al.), *Tópicos de geometría algebraica.* Aportaciones Matemáticas, 2002. [Los artículos de L. Brambila y X. Goméz-Mont, describen varios aspectos en geometría algebrica de espacios moduli.]

H. Kraft, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie.* Vieweg, 1985. [Esposición general de la teoría de invariantes.]

S. Mukai, *An Introduction to Invariants and Moduli.* Cambridge, 2003. [Exposición general de ambos temas.]

P. Newstead, *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces.* Springer–Verlag 1978. [Texto elemental con muchos ejemplos explícitos.]