APORTACIONES MATEMÁTICAS (2002) 151–171

Superficies de Riemann y funciones de Belyi *

Jesús Muciño–Raymundo
Instituto de Matemáticas UNAM,
Campus Morelia
Morelia 58190, Michoacán, MEXICO
muciray@matmor.unam.mx

1 Introducción.

Las funciones meromorfas en una superficie de Riemann determinan su geometría.

El objetivo de este trabajo es presentar una construcción elemental de algunas funciones de Belyi: éstas son funciones meromorfas con tres valores de ramificación, definidas en superficies de Riemann compactas.

En la teoría de "dibujos de niños" (dessins d'enfants) desarrollada por A. Grothendieck a partir de 1984, las funciones de Belyi son objetos centrales.

Con él fin de que un lector con conocimientos básicos de variable compleja y geometría pueda apreciar mejor los objetos de estudio, en la primera parte del trabajo se muestra como una superficie (real compacta y orientable) soporta distintas estructuras que interaccionan entre sí. La segunda parte presenta una construcción de funciones de Belyi. Este trabajo se basa en ejemplos simples: su contenido es como sigue.

*Con el apoyo de PAPIIT–UNAM y CONACYT Proyecto 28492-E. Este artículo está en su versión final y no será publicado en ninguna otra parte.

Parte I: De lo simple a lo estructurado.

2 Topología de superficies.

3 Observadores. Estructuras diferenciables y holomorfas.

4 De curvas algebraicas a superficies de Riemann compactas.

5 Cómo las funciones meromorfas en una superficie de Riemann compacta determinan su geometría.

Parte II: De lo estructurado a lo simple.

6 Cómo la existencia de funciones meromorfas está restringida por la topología.

7 Funciones de Belyi a partir de triangulaciones.

El autor agradece a los árbitros sus comentarios y también desea agradecer a Jorge Luis López López de quien aprendió sobre las funciones de Belyi.

2 Topología de superficies.

Trabajaremos con superficies reales compactas conexas sin frontera y orientables, una superficie así la denotamos por X_{top}. Ejemplos de éstas son: la esfera, el toro, la esfera con dos asas, la esfera con tres asas etc.

Una forma de describir su topología es como sigue: Dada X_{top}, consideramos una triangulación de ella. El *género* de X_{top} es el número entero $\mathrm{g} \geq 0$ que se calcula a partir de la siguiente relación debida a Euler:

$$2 - 2\mathrm{g} = t - l + v \ ,$$

donde t es el número de triángulos en la triangulación, y similarmente para lados l y vértices v. Es un resultado clásico que g no depende de la triangulación y que coincide con el número de asas en X_{top}, ver [Mi] pág. 6.

• *Toda superficie X_{top} compacta conexa y orientable es homeomorfa (como espacio topólogico) a una esfera con* $\mathrm{g} \geq 0$ *asas. Dos superficies X_{top} y Y_{top} como antes son homeomorfas si y sólo si sus géneros son iguales.*

3 Observadores. Estructuras diferenciables y holomorfas.

Consideremos una superficie $X = \{f(x_1, x_2, x_3) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, para $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ una función diferenciable C^∞ adecuada. ¿Cómo estudiar tal X?

Sea $U_i \subset X$ un pequeño abierto, la idea es hallar funciones del tipo

$$\phi_i : U_i \subset X \to V_i \subset \mathbb{R}^2,$$

que llamaremos un *observador* o una *función de coordenadas* para la región U_i. Esto es, ϕ_i es biyección, continua, con inversa ϕ^{-1} continua. Dos características relevantes son:

Todo objeto en $U_i \subset X$ puede "transladarse" mediante el observador ϕ_i a un objeto en $V_i \subset \mathbb{R}^2$, en donde podemos aplicar el cálculo y álgebra usuales.

La existencia de los observadores requiere que X, en pequeñas regiones U_i, sea homeomorfa a discos abiertos $V_i \subset \mathbb{R}^2$.

Ejemplo 3.1. *Observadores en el caso real.* Sea $X = \{f(x_1, x_2, x_3) = 0\}$. Si $p \in X$ es tal que $(\partial f/\partial x_3)(p) \neq 0$; entonces hay una vecindad U de p en X tal que la proyección $\pi : U \to \mathbb{R}^2$, de U al plano x_1x_2, definida por $\pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$, es un observador para X. Observadores similares pueden considerarse para las otras derivadas parciales, cuando éstas no se anulan en p.

Definición 3.2. Una *2–variedad diferenciable* (compacta y conexa) es una terna $X_{dif} = (X_{top}, \{U_i\}, \{\phi_i\})$ tal que:

i) X_{top} es un espacio topológico Hausdorff, compacto y conexo.

ii) $U_i \subset X_{top}$ son conjuntos abiertos que forman una cubierta de X_{top}.

iii) $\phi_i : U_i \subset X_{top} \to V_i \subset \mathbb{R}^2$ son *funciones de coordenadas* continuas con inversa continua (para V_i subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$).

iv) Cada vez que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, las funciones de *cambio de coordenadas* definidas como

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

son diferenciables C^∞.

Ejemplo 3.3. *Observadores en el caso complejo.* Sea $X = \{P(z_1, z_2) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$, para P un polinomio. Si $p \in X$ es tal que alguna $(\partial P/\partial z_i)(p) \neq 0$, entonces hay una vecindad U de p en X tal que la proyección $\pi : U \to \mathbb{C}$, de U al eje z_j, con $i \neq j$ es un observador para X.

Definición 3.4. Una *superficie de Riemann compacta* es una terna $X_{hol} = (X_{top}, \{U_i\}, \{\phi_i\})$ como arriba, donde adicionalmente los cambios de coordenadas $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ son holomorfos (identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, como es usual).

Obsérvese que para una superficie de Riemann X_{hol} compacta, su espacio topológico subyacente X_{top} es siempre una superficie real como las descritas en la sección 2.

Ejemplo 3.5. La *esfera de Rieman* $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es una superficie de Riemann y topológicamente es como una esfera.

Ejemplo 3.6. *Toros como superficies de Riemann.* Consideremos dos vectores: 1 y w en $\mathbb{C}$, que sean $\mathbb{R}$–linealmente independientes. Construimos la retícula

$$\Lambda = \{(a_1 1 + a_2 w) \in \mathbb{C} \mid (a_1, a_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} .$$

El espacio cociente $\mathbb{C}/\Lambda$ es una superficie de Riemann y topológicamente es como un toro.

4 De curvas algebraicas a superficies de Riemann compactas.

Nuestra idea ahora es mostrar una fuente natural de superficies de Riemann compactas. Consideremos un *conjunto algebraico* en $\mathbb{R}^2$ descrito por los ceros de un polinomio

$$X = \{P(x_1, x_2) = 0\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

¿Qué estructura geométrica posee X? Para dar un contexto a esta pregunta, introducimos algunas simplificaciones.

Ejemplo 4.1. El conjunto algebraico $X = \{x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ es vacío (trabajando sobre los números reales).

• *Simplificación 1. Para tener conjuntos no vacíos, trabajamos con los números complejos* $\mathbb{C}$.

Ejemplo 4.2. $Y = \{z_1^2 + z_2^2 + 1 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ no es vacío.

Haciendo $z_1 = c$, para una constante $c \in \mathbb{C}$, por el teorema fundamental del álgebra existe una z_2 adecuada que satisface la ecuación $c^2 + z_2^2 + 1 = 0$. Al intersectar $\{z_1^2 + z_2^2 + 1 = 0\}$ con las rectas complejas $\{z_1 = c\}$ intuímos que Y es un "objeto geométrico".

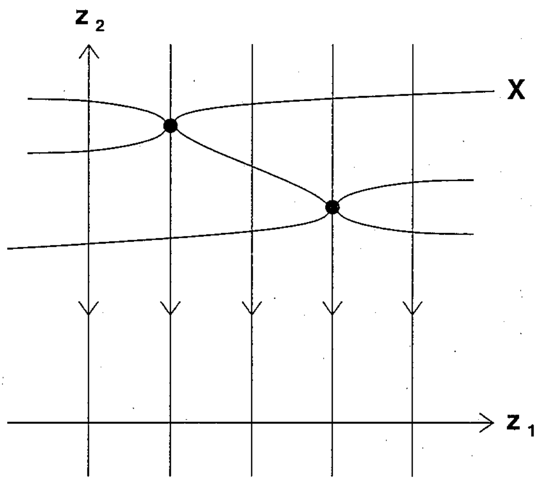

Figura 1.

• *Simplificación 2. Solamente consideramos conjuntos algebraicos con todos sus puntos lisos, para evitar puntos singulares cuya geometría es más intrincada.*

Definición 4.3. Se dice que $p \in X = \{P(z_1, z_2) = 0\} \subset \mathbb{C}$ es un *punto liso de* X si las derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial z_1}(p)$, $\frac{\partial P}{\partial z_2}(p)$ no se anulan simultáneamente; p es *singular* si no es punto liso.

Ejemplo 4.4. $X = \{z_1^2 + z_2^2 + 1 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ tiene todos sus puntos lisos (ya que el sistema $2z_1 = 0$, $2z_2 = 0$, $z_1^2 + z_2^2 + 1 = 0$ tiene solución vacía en $\mathbb{C}^2$).

Ejemplo 4.5. $X = \{z_1 z_2 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ está formado por los ejes coordenados de $\mathbb{C}^2$. Sus puntos distintos de $(0,0)$ son lisos y $(0,0)$ es su único punto singular; patológicamente hay dos rectas tangentes a X en ese punto. En general, dados dos polinomios $P(z_1, z_2)$ y $Q(z_1, z_2)$, si existe $p \in \mathbb{C}^2$ que es cero de ambos, entonces p es un punto singular de $X = \{P(z_1, z_2)Q(z_1, z_2) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$.

Observación. Un conjunto algebraico $X = \{P(z_1, z_2) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ es no compacto:

Por contradicción, suponiendo X compacto, debe ser un subconjunto cerrado y acotado en $\mathbb{C}^2$ ($\cong \mathbb{R}^4$). Imaginémoslo contenido en una bola de radio r. Hay una recta $\{z_1 = \textit{constante}\}$ ajena a la bola, que intersecta necesariamente a X (ver figura 1), ello es una contradicción.

• *Simplificación 3. Para tener conjuntos algebraicos compactos, los consideramos en el espacio proyectivo.*

Consideremos $X = \{P(z_1, z_2) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ y usamos geometría proyectiva. Trazamos X en una pantalla 2–dimensional $\mathcal{P}_0$ ($\cong \mathbb{C}^2$) en el espacio $\mathbb{C}^3$, suponemos que $\mathcal{P}_0$ no contiene al origen $0 \in \mathbb{C}^3$; ver figura 2. Consideramos una fuente luminosa en el origen. Si introducimos otra pantalla $\mathcal{P}_1$ en $\mathbb{C}^3 - \{0\}$, X se proyecta mediante los rayos luminosos de 0 en un nuevo $Y \subset \mathcal{P}_1$.

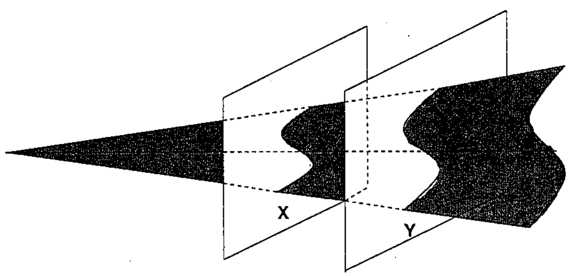

Figura 2.

Si en $\mathbb{C}^3 = \{(z_0, z_1, z_2)\}$ tomamos $\mathcal{P}_0 = \{z_0 = 1\}$ y $\mathcal{P}_1 = \{z_1 = 1\}$, ver figura 3, un fénomeno curioso ocurre: la sombra de X bajo la fuente luminosa en el origen no produce sombras en el plano $\mathcal{P}_1$ con coordenadas $z_0 = 0$. En principio $Y \subset \mathcal{P}_1$ no tiene puntos del tipo $\{(0, 1, z_2)\}$. Sin embargo, se aproxima de manera natural a algunos de esos puntos, i.e. hay puntos que naturalmente "deberían estar" en Y: éstos son *los puntos al infinito de* $X \subset \mathbb{C}^2$.

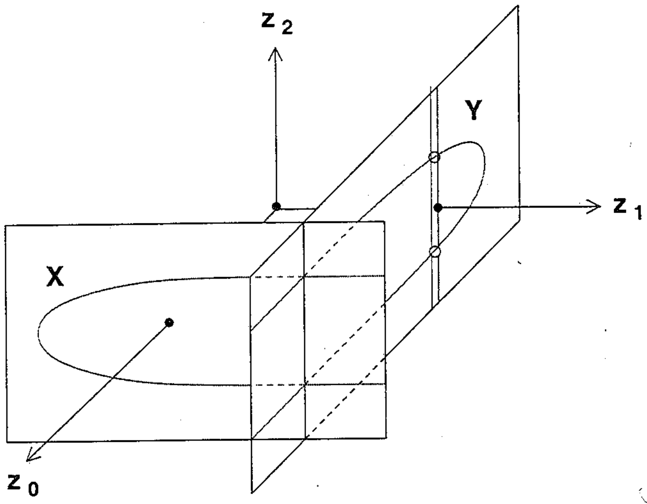

Figura 3.

Si a X se le agregan todos sus puntos al infinto, se obtiene

$$X_{proy} = X \cup \{sus\ puntos\ al\ infinito\} ,$$

un *conjunto algebraico proyectivo*. Para describirlo completamente deben considerarse las proyecciones de X en las tres pantallas $\mathcal{P}_i = \{z_i = 1\}$, para $i = 0, 1, 2$ (ver figura 4);

$$X_{proy} = \{X \subset \mathcal{P}_0\} \cup \{Y_1 \subset \mathcal{P}_1\} \cup \{Y_2 \subset \mathcal{P}_2\} .$$

Ejemplo 4.6. Para $n \in \mathbb{N}$ sea $\{z_0^n + z_1^n + z_2^n = 0\}$ en $\mathbb{C}^3 - \{0\}$, al restringirla a las pantallas obtenemos tres representaciones del mismo

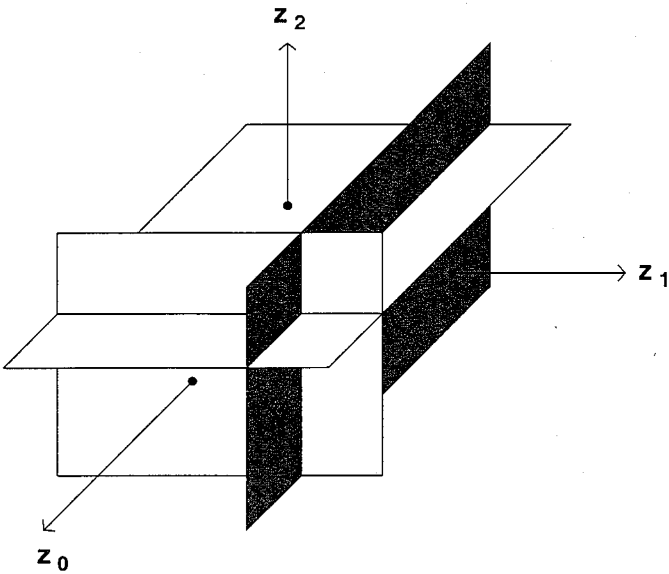

Figura 4.

conjunto algebraico proyectivo

$$X_{proy} = \{X = \{1 + z_1^n + z_2^n = 0\} \subset \mathcal{P}_0\} \cup$$
$$\{Y_1 = \{z_0^n + 1 + z_2^n = 0\} \subset \mathcal{P}_1\} \cup$$
$$\{Y_2 = \{z_0^n + z_1^n + 1 = 0\} \subset \mathcal{P}_2\} .$$

Resumiendo:

- *Todo conjunto algebraico $X \subset \mathbb{C}^2$ se extiende de manera natural a un conjunto algebraico proyectivo $X_{proy} = \{P(z_0, z_1, z_2) = 0\} \subset \mathbb{C}P^2$, donde P es un polinomio homogéneo (i.e. todos sus monomios son del mismo grado).*

Es útil introducir *el espacio proyectivo* $\mathbb{C}P^2$ como el espacio de todos los "rayos de luz" que emanan del origen 0 en $\mathbb{C}^3$. Se considera $\mathbb{C}^3 - \{0\}$ provisto de una relación de equivalencia, denotada por $\sim$, tal que: dos puntos $p, q \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ son equivalentes si existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $p = \lambda q$, esto es, si p y q están en el mismo rayo de luz. Tomando clases de equivalencia resulta

$$\mathbb{C}P^2 = \frac{\mathbb{C}^3 - \{0\}}{\sim}\,.$$

Para dar una topología a $\mathbb{C}P^2$, se considera la función $\pi : (\mathbb{C}^3 - \{0\}) \to \mathbb{C}P^2$, que a cada punto lo envía a su clase se equivalencia. Se define que $U \subset \mathbb{C}P^2$ es abierto si su imagen inversa $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}^3 (\cong \mathbb{R}^6)$ lo es con la topología usual. Es un ejercicio mostrar que $\mathbb{C}P^2$ es compacto y que:

Lema 4.7. *Todo conjunto algebraico $X_{proy} \subset \mathbb{C}P^n$ es compacto.*

Ejemplo 4.8. *La recta proyectiva compleja $\mathbb{C}P^1$.* Sea $\{az_1 + bz_2 + c = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ una recta que es topológicamente una copia de $\mathbb{C}$. Ella se extiende a $\mathbb{C}P^2$ como $\{az_1 + bz_2 + cz_0 = 0\} \subset \mathbb{C}P^2$, y ahora es topológicamente como un plano $\mathbb{C}$ con un punto al infinito. Se le llama la recta proyectiva compleja $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y es topológicamente una esfera.

Definición 4.9. Una *curva algebraica X_{proy}* es el conjunto de ceros de un polinomio homogéneo en $\mathbb{C}P^2$; suponemos que todos sus puntos son lisos[1].

Lema 4.10. *Toda curva algebraica lisa X_{proy} es una superficie de Riemann compacta.*[2]

Idea de la demostración: como la curva es lisa, los observadores holomorfos existen (ver ejemplo 3.3). Es un ejercicio verificar las otras condiciones en la definición.

Ejemplo 4.11. *El conjunto algebraico $W = \{z_1 z_2 = 0\} \subset \mathbb{C}P^2$ no es superficie de Riemann o variedad diferenciable.* Esto se debe a que W en una región pequeña cerca de $(1,0,0) \in W$ no es homeomorfo a un

---

[1] No en todos los textos se supone que una curva algebraica es necesariamente lisa, nosotros lo suponemos así por simplicidad.

[2] Citando a D. Mumford [Mu] pág. 229: "Perversamente, los geómetras algebraicos insisten en hablar de curvas y los analistas de superficies, siendo éstos esencialmente los mismos objetos". En efecto; curvas algebraicas complejas (lisas) y superficies de Riemann compactas, son nociones equivalentes, ver [Mi] pág. 195.

disco abierto en $\mathbb{R}^2$. W es la unión de dos rectas proyectivas complejas que se intersectan justo en $(1,0,0) \in \mathbb{C}P^2$. La figura 5 describe la topología (real) de W en $\mathbb{C}P^2$. La dificultad proviene de que $(1,0,0)$ es un punto singular.

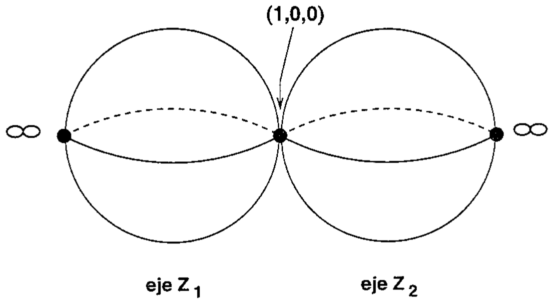

Figura 5.

Diagramáticamente tenemos que:

$$X_{proy} \Rightarrow X_{hol} \Rightarrow X_{dif} \Rightarrow X_{top} \ ,$$

lo que enfatiza como unas estructuras son subyacentes a otras y éso será útil en lo que sigue.

5 Cómo las funciones meromorfas en una superficie de Riemann compacta determinan su geometría.

Sea X_{dif} una variedad diferenciable; un observador $\phi : U_i \to V_i$ permite establecer una biyección:

$$\begin{aligned} \{f : U_i \subset X_{dif} \to \mathbb{R}\} &\longleftrightarrow \{\widetilde{f} : V_i \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\} \ , \\ f \qquad\qquad &\longleftrightarrow \widetilde{f} \doteq f \circ \phi_i^{-1} \ . \end{aligned}$$

¿Cómo decidir cuándo una función f es diferenciable? La dificultad para éllo es que X_{dif} no está en principio contenida en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$.

El observador ϕ_i puede definir que una función f es diferenciable si la correspondiente $\tilde{f}$ lo es en el sentido usual.

¿Depende esa definición del observador ϕ_i? Respuesta: no depende si las funciones de cambio de coordenadas son diferenciables (pues entonces $f \circ \phi_i^{-1}$ es diferenciable si y sólo si $f \circ \phi_j^{-1}$ lo es también para $j \neq i$).

Decimos que $f : X_{dif} \to \mathbb{R}$ es C^∞ si al escribirla para todo observador $\phi_i : U_i \to V_i$, el resultado $f \circ \phi_i^{-1} : V_i \to \mathbb{R}$ es C^∞ en el sentido usual, en consecuencia:

- *En una variedad diferenciable está bien definido el concepto de función diferenciable. Análogamente, en una superficie de Riemann está bien definido el concepto de función holomorfa (o meromorfa).*

Algunas diferencias entre X_{dif}, X_{hol} y X_{proy} siguen en 5.1, 5.2 y 5.4.

Ejemplo 5.1. *Toda 2–variedad diferenciable X_{dif} posee funciones diferenciables no constantes.*

Consideremos un observador $\phi_i : U_i \subset X_{dif} \to V_i \subset \mathbb{R}^2$, siendo V_i un disco abierto de radio 2. Existen funciones $\lambda_j : V_i \to \mathbb{R}$ que son C^∞, nulas fuera del disco de radio 2, pero no nulas en el interior del disco de radio 1 (ver [Mi] pág. 302). Un ejemplo es

$$\lambda(x,y) = \begin{cases} e^{-((x^2+y^2)-1)^{-2}} e^{-((x^2+y^2)+1)^{-2}} & si\ (x^2+y^2) \in [0,1] \\ 0 & de\ otra\ forma. \end{cases}$$

Finalmente se "transplantan" estas λ a funciones en X_{dif}, esto es,

$$f : X_{dif} \to \mathbb{R}, \quad f(p) = \begin{cases} \lambda \circ \phi_i(p) & si\ p \in U_i \\ 0 & si\ p \notin U_i \end{cases}$$

es una función C^∞.

Lema 5.2. *Si X_{hol} es una superficie de Riemann compacta y conexa, entonces toda función holomorfa es constante.*

Idea de la demostración: Si f es holomorfa y no constante, entonces por ser X_{hol} compacto, la norma de $|f(q)|$ alcanza su máximo en un punto p. Al transplantar f mediante un observador, se obtiene $f \circ \phi_i^{-1} : V_i \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que alcanza también el máximo de su norma en un punto interior de V_i, pero esto es imposible para funciones holomorfas, a menos que la función misma sea constante.

Ejemplo 5.3. *Un toro complejo $X_{hol} = \mathbb{C}/\Lambda$ posee funciones meromorfas no constantes.*

Para ello, dado Λ se define la función de Weierstrass

$$\wp : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} , \quad \wp(z) = \frac{1}{z^2} - \sum_{a \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2} \right)$$

que es meromorfa, ver [A], pág. 227.

Ejemplo 5.4. *Una curva algebraica $X_{proy} \subset \mathbb{C}P^2$ posee funciones meromorfas no constantes.*

La idea geométrica es como sigue: Sea un punto $p \in \mathbb{C}P^2 - X_{proy}$ y una recta proyectiva cualquiera $\mathcal{L} = \{az_0 + bz_1 + cz_2 = 0\} \subset \mathbb{C}P^2$ que no contenga a p. Se considera una fuente luminosa en p y se proyecta X_{proy} sobre $\mathcal{L}$ usando todas las rectas proyectivas que pasan por p.

Toda recta proyectiva $\mathcal{L}$ es una copia de $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (ver Ejemplo 4.8); entonces la proyección (ver figura 6) da una función meromorfa

$$\pi : X_{proy} \to \mathbb{C}P^1 .$$

La idea algebraica es también interesante: sean p un punto en $\mathbb{C}P^2 - X_{proy}$ y dos rectas proyectivas $\{az_0 + bz_1 + cz_2 = 0\}$ y $\{dz_0 + ez_1 + fz_2 = 0\}$ que se intersectan en p.

Entonces su cociente define una función

$$R : X_{proy} \subset [\mathbb{C}P^2 - \{p\}] \to \mathbb{C}P^1, \quad R(z_0, z_1, z_2) = \frac{az_0 + bz_1 + cz_2}{dz_0 + ez_1 + fz_2}$$

que es meromorfa. Note que R es tal que $R(z_0, z_1, z_2) = R(\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda z_2)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, por lo que R es una función en $\mathbb{C}^3 - \{0\}$ que permanece constante en lineas $\{\lambda(z_0, z_1, z_2) | \lambda \in \mathbb{C}\}$ por el origen en $\mathbb{C}^3$, y por lo tanto define una función (ver figura 6).

La relación entre la idea geométrica y la algebraica es como sigue: dado un vector $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$, la función R tiene como curvas de nivel $\{R(z_0, z_1, z_2) = \frac{\lambda}{\mu}\} \subset \mathbb{C}P^2$, que son rectas proyectivas:

$$\mu(az_0 + bz_1 + cz_2) - \lambda(dz_0 + ez_1 + fz_2) = 0 .$$

Al variar $(\lambda/\mu) \in \mathbb{C}P^1$ se obtienen todas las rectas proyectivas en $\mathbb{C}P^2$ que pasan por p, mismas que son las fibras de π. Entonces $R = \pi$ en X_{proy}, salvo quizá composición con una función de Möbius en el contradominio $\mathbb{C}P^1 (\cong \mathcal{L})$.

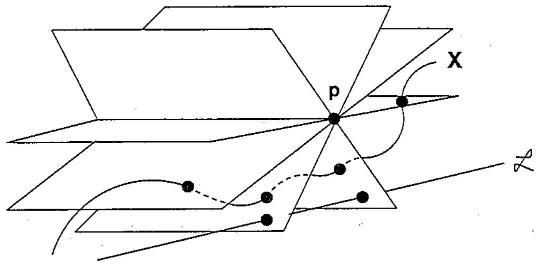

Figura 6.

• *La geometría extrínseca de una superficie de Riemann depende de sus funciones meromorfas.*

Hay una correspondencia entre las formas en que se puede meter "holomorfamente" una superficie de Riemann X_{hol} en un espacio proyectivo $\mathbb{C}P^2$ y parejas de funciones meromorfas $\{(f_1, f_2)\}$ en X_{hol}.

Dado un par se define una función

$$\varphi : X_{hol} \to \mathbb{C}P^2 \ , \ z \mapsto (1, f_1(z), f_2(z)) \ ,$$

donde los polos de las funciones f_i son precisamente los puntos que "van al infinito" bajo la aplicación. Inversamente, si tenemos $X_{hol} \subset \mathbb{C}P^2$ y localmente está definida por ecuaciones polinomiales, entonces al restringirla a la pantalla $\mathbb{C}^2 = \{z_0 = 1\} \subset \mathbb{C}P^2$, las proyecciones $\pi_j : X_{hol} \cap \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, definidas como en la figura 1, al j–ésimo eje, producen pares de funciones meromorfas f_j en X_{hol}.

Ejemplo 5.5. *Un toro complejo $X_{hol} = \mathbb{C}/\Lambda$ aparece como una curva algebraica cúbica $X_{proy} \subset \mathbb{C}P^2$.*

Consideramos su función de Weierstrass $\wp : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (ver ejemplo 5.3) y su derivada $\wp'$. Es posible definir una aplicación inyectiva

$$\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}P^2 \ , \ z \mapsto (1, \wp(z), \wp'(z)) \ ,$$

cuya imagen es una curva cúbica no singular, pues satisface una ecuación polinomial

$$(\wp')^2 - 4\wp^3 + g_2\wp - g_3 = 0,$$

donde $g_1, g_2 \in \mathbb{C}$ son constantes adecuadas, ver [A] pág. 277. Dicho de otra forma, haciendo $(1, \wp, \wp') = (z_0, z_1, z_2)$, la ecuación algebraica para $\varphi(\mathbb{C}/\Lambda)$ en $\mathbb{C}P^2$ es

$$z_0 z_2^2 - 4z_1^3 + g_2 z_0^2 z_1 - g_3 z_0^3 = 0 \ .$$

6 Cómo la existencia de funciones meromorfas está restringida por la topología.

De acuerdo a la sección 2 para describir la topología de una curva algebraica o una superficie de Riemann compacta X_{hol}, debemos calcular su género g.

Definimos que una función entre dos superficies de Riemann $f : X_{hol} \to Y_{hol}$ es *holomorfa* si $\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1}$ es holomorfa cada vez que ella está bien definida para ϕ_i un observador en X_{hol} y ψ_j un observador de Y_{hol}.

Sea $f : X_{hol} \to Y_{hol}$ una función holomorfa, asumimos que conocemos el género de Y_{hol}, el problema es estimar el género de X_{hol}.

La idea para hacerlo usa los siguientes ingredientes:

Primero, una función holomorfa f no constante puede asumir los siguientes comportamientos cualitativamente distintos desde un punto de vista topológico, ver [Rem] pág. 284. Existen un observador ϕ_i^{-1} cerca de $z \in U \subset X_{hol}$ tal que alguna de las siguientes posibilidades ocurre:

1) $f \circ \phi_i^{-1}$ se escribe como $z \mapsto z$, i.e. es un homeomorfismo de $U \subset X_{top}$ en $V \subset Y_{hol}$, o

2) $f \circ \phi_i^{-1}$ se escribe como $z \mapsto z^k : U \to V$, con $k \geq 2$; en este caso $z \in X$ se llama un punto de ramificación de orden k.

Hay un número finito de puntos en X_{hol} donde f tiene puntos de ramificación. Sea $\Lambda \subset Y$ la imagen de esos puntos bajo f.

Tomamos una triangulación $\mathcal{T}$ de Y_{hol} tal que Λ está contenido en los vértices de esa triangulación. Supongamos que para $\mathcal{T}$ en Y_{hol} se tiene $2-2\text{g}=t-l+v$.

Calculamos ahora la relación de Euler para el género de X_{hol}, para ello observamos que la triangulación $\mathcal{T}$ en Y_{hol} induce una triangulación $f^*\mathcal{T}$ en X_{hol}, mediante f. Ya que casi en todos sus puntos existen inversas locales $f^{-1}: V \subset Y \to U \subset X$, lo que permite copiar triángulos en Y_{hol} a triángulos en X_{hol}. Sean t', l', v' los números correspondientes en esta triangulación de X_{hol} y sea d el número de preimagenes de $\{f^{-1}(q)\}$ cuando $q \notin Y - \Lambda$. Es un ejercicio de topología mostrar que d no depende de q, sólo de f misma.

Ejemplo 6.1. *El comportamiento cualitativo de una proyección entre curvas algebraicas.* Sea una función $f: X_{proy} \to \mathcal{L}$, como en el ejemplo 5.4. Su comportamiento cualitativo es similar al esquematizado en la figura 1. Para ello observemos primero que la función ilustrada en la figura 1, $f : X_{hol} \to \{\text{eje } z_1\} = \mathcal{L}$, puede entenderse como dada por la proyección desde el punto $(0,0,1) \in \mathbb{C}P^2$ (en el sentido del ejemplo 5.4).

En la figura 1 aparecen dos puntos de ramificación de orden 2 y el número de preimagenes es $d=3$.

En el caso general, para la nueva triangulación en X_{hol} se tiene

$$t' = dt \ , \ l' = dl \ , \quad \text{pero } v' \leq dv. \qquad (*)$$

Veamos las relaciones anteriores explícitamente:

Ejemplo 6.2. *Una función entre dos curvas algebraicas.* Tomamos por simplicidad $X_{proy} = \{z_1 - z_2^2 = 0\}$ en $\mathbb{C}^2 = \{z_0 = 1\} \subset \mathbb{C}P^2$. Consideramos una fuente luminosa en el punto al infinito $(0,1,0) \in \mathbb{C}P^2$ y proyectamos X_{proy} desde ese punto sobre la recta proyectiva $Y_{proy} = \{z_2 = 0\}$, obteniendo una función $\pi : X_{proy} \to Y_{proy}$.

Un punto de ramificación es $(1,0,0) \in X_{proy}$; describamos como se comporta una triangulación de X cerca de ese punto.

En este caso $d=2$. La topología real de X_{proy} cerca de $(1,0,0)$ se describe como en la figura 7; X_{proy} es homeomorfo a un disco con "dos niveles" y se proyecta en Y_{proy} mediante π. En particular, la aparente autointersección dibujada en X_{proy} sólo consta efectivamente del punto en el centro (X_{proy} se conoce en análisis complejo como la "superficie de Riemann de $z_2 = \sqrt{z_1}$").

Para un disco contenido en $Y_{proy} = \{z_2 = 0\}$ triangulado mediante 3 triángulos, 6 aristas y 4 vértices; como en la figura 7, la triangulación inducida por π en X_{proy} consta de 6 triángulos, 12 aristas, pero sólo 7 vértices.

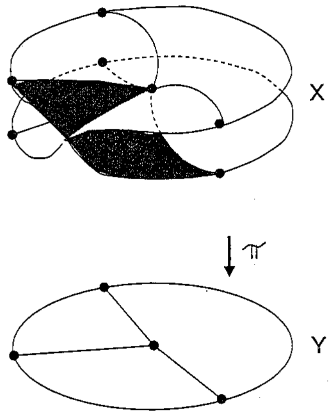

Figura 7.

Volviendo al caso general y aplicando las relaciones (∗) para calcular el género g′ de X_{proy}, es fácil obtener que

$$2g' - 2 \geq d(2g - 2) .$$

(un cálculo mucho más preciso es posible; ver la fórmula de Riemann–Hurwitz en [Mi] pág. 52).

Sorprendentemente concluimos que este resultado topológico tiene consecuencias en el mundo holomorfo.

Corolario 6.3. *Sea $f : X_{hol} \to Y_{hol}$ una función holomorfa entre superficies de Riemann compactas.*

i) Si f no es constante, entonces género$(X_{hol}) \geq$ género(Y_{hol}).

ii) Si género$(X_{hol}) = 0$, entonces género$(Y_{hol}) = 0$.

iii) Si género$(X_{hol}) \leq$ género(Y_{hol}), entonces f es constante.

7 Funciones de Belyi a partir de triangulaciones.

Definición 7.1. Una *función del Belyi* $f : X_{hol} \to \mathbb{C}P^1$ es una función meromorfa tal que sus valores de ramificación son exactamente $\{0,\ 1,\ \infty\} \subset \mathbb{C}P^1$.

Observe que si $g : X_{hol} \to \mathbb{C}P^1$ tiene exactamente tres valores de ramificación cualquiera, entonces esos valores siempre pueden enviarse a $0,\ 1,\ \infty$ mediante una función de Möbius h en $\mathbb{C}P^1$ y por lo tanto $h \circ g$ es de Belyi.

Considemos por simplicidad $T \subset \mathbb{R}^2$ $(\cong \mathbb{C})$ un triángulo equilátero; denotaremos a sus vértices por v, b, r.

Si pegamos dos copias de T por sus fronteras mediante la función identidad en dichas fronteras, obtenemos una superficie S_{top} que es topológicamente como una esfera con tres puntos marcados $v,\ b,\ r$.

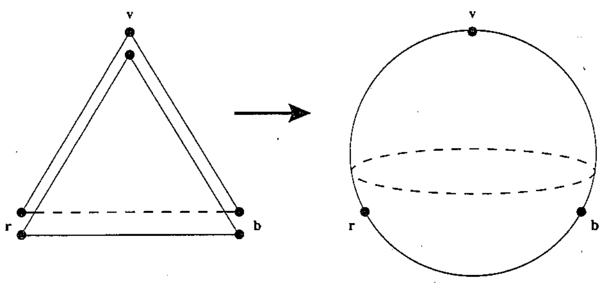

Figura 8.

Lema 7.2. *Existe en S_{top} una estructura de superficie de Riemann que la hace $\mathbb{C}P^1$.*

Idea de la demostración. Primero: construimos los observadores para $S_{top} - \{v,\ b,\ r\}$. Cada triángulo define un observador $\phi_i : T^0 \subset S_{top} \to T^0 \subset \mathbb{C}$, mediante la identidad (donde T^0 es el interior). Es posible verificar que existen observadores ϕ_j que cubren la frontera común de los triángulos en S_{top}.

Segundo: construimos los observadores para los puntos v, b, r. Si se toma una vecindad U del punto $v \in S_{top}$, $U - \{v\}$ es biholomorfa a $V - \{0\}$, donde V es una vecindad de $0 \in \mathbb{C}$ (esto es, existe una función holomorfa con inversa holomorfa entre $U - \{v\}$ y $V - \{0\}$). Usando ese biholomorfismo se construye un observador que cubre a $v \in S_{top}$. Similarmente se procede para los otros puntos b y r.

Tercero: reconocemos la S_{hol} resultante como $\mathbb{C}P^1$. Esta parte requiere un resultado profundo, el que toda superficie de Riemann compacta X_{hol} topológicamente como una esfera es de hecho biholomorfamente equivalente a la esfera de Riemann $\mathbb{C}P^1$, ver [Mi] pág. 196.

Consideremos ahora una superficie topológica X_{top} compacta y orientable. Dibujemos sobre ella una triangulación $\mathcal{T}$. Para hacerlo más comprensible, suponemos que podemos colorear sus vértices usando tres colores: verde, blanco y rojo; de tal forma que dos vértices unidos por una arista en $\mathcal{T}$ tienen colores distintos.

Ejemplo 7.3. *Una función de Belyi en un toro.* Consideremos el toro $X_{hol} = \mathbb{C}/\Lambda$ que proviene de tomar la retícula

$$\Lambda = \{a_1 + a_2(\frac{1}{2} + \sqrt{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})) \in \mathbb{C} \mid (a_1, a_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} .$$

Visualizamos $\mathbb{C}/\Lambda$ a partir del paralelepípedo en la figura 9, cuyos lados son los vectores 1, $\frac{1}{2} + \sqrt{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) \in \mathbb{C}$, donde, como es usual, lados opuestos en la frontera están identificados. El dibujo describe una triangulación coloreada $\mathcal{T}$ del toro como se pide arriba.

Ahora observemos que existe una función de Belyi $f : X_{hol} \to \mathbb{C}P^1$ asociada a la triangulación $\mathcal{T}$. Para describirla pensamos a $\mathbb{C}P^1$ como la unión de dos triángulos: $T_A \cup T_B$ (isométricos a los triángulos en la figura 9) y donde hay tres puntos especiales marcados 0, 1, ∞.

Entonces f satisface que $f(v) = 0$, $f(b) = 1$ y $f(r) = \infty$ para todo punto en la triangulación de X_{hol} marcado con v, b o r.

Con ese dato combinatorio f se extiende al interior de cada triángulo como una isometría, pues cada triángulo en X_{hol} tiene el mismo tamaño que los dos triángulos T_A y T_B en $\mathbb{C}P^1$.

De hecho es posible membretar los triángulos en X_{hol} (figura 9) mediante letras A y B alternadamente. Esto es, alrededor de cada

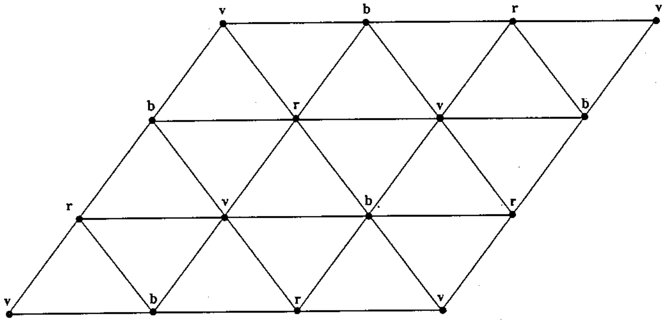

Figura 9.

vértice en la figura hay tres triángulos con membrete A y tres triángulos con membrete B y están alternados. La función f envía:

los triángulos con membrete A en X_{hol}, isométricamente en el triángulo $T_A \subset \mathbb{C}P^1$, y

los triángulos con membrete B en X_{hol}, isométricamente en el triángulo $T_B \subset \mathbb{C}P^1$.

Es un ejercicio verificar la continuidad de f en todo X_{hol}. Para mostrar que resulta función meromorfa se procede como sigue.

Note que por construcción $f : X_{hol} \to \mathbb{C}P^1 - \{0, 1, \infty\}$ es una isometría local, salvo en puntos de X_{hol} que son vértices de la triangulación. Para ello consideramos las distancias euclidianas en X_{hol} y $\mathbb{C}P^1 - \{0, 1, \infty\}$ que hacen a todos los triángulos equiláteros.

Como toda isometría local euclidiana (que preserva orientación) es localmente holomorfa, se sigue que f es holomorfa fuera de los vértices de la triangulación.

Más aún, la función se extiende de manera holomorfa a los vértices de la triangulación en X_{hol} por un argumento similar al usado en el teorema de singularidad removible de Riemann, [A] pág. 124.

Ejemplo 7.4. *No toda triangulación se puede colorear con tres colores como antes.* Consideremos un sub–paralelepípedo de la figura 9. Es imposible colorear los vértices como se pide y que siga representando una triangulación en un toro.

Ejemplo 7.5. *Una función de Belyi en una superficie de Riemann* Y_{hol} *de género* $\mathrm{g} \geq 2$. Tomemos dos copias disjuntas del toro X_{hol} como en el ejemplo 7.3. Removemos de cada copia el interior de un triángulo respectivamente, y obtenemos dos superficies X^1, X^2, cuya frontera es en cada caso un triángulo de aristas donde aparecen los tres colores v, b, y r en los vértices de ese triángulo.

Finalmente pegamos ambas superficies, identificando sus fronteras (mediante la función identidad), haciendo corresponder los vértices v de ambas, y lo mismo para b y r.

La superficie resultante $Y_{top} = X^1 \cup X^2$ es de género 2. Usando ideas similares a las del lema 7.2, es posible mostrar que admite una estructura compleja Y_{hol}. Si $f : Y_{hol} \to \mathbb{C}P^1$ se define de tal forma que; $f(v) = 0$, $f(b) = 1$ y $f(r) = \infty$ para todo punto en la triangulación de Y_{hol} marcado con v, b o r respectivamente, y se extiende como isometría al interior de los triángulos, se obtiene una función de Belyi en Y_{hol}.

El caso de género $\mathrm{g} \geq 3$ es similar.

Corolario 7.6. *Sea* X_{top} *una superficie topológica que posee una triangulación* $\mathcal{T}$ *con tres colores en sus vértices de tal forma que dos vértices unidos por una misma arista siempre tienen distinto color, entonces existe una estructura de superficie de Riemann* X_{hol} *asociada a* $\mathcal{T}$ *y una función de Belyi* $f : X_{hol} \to \mathbb{C}P^1$.

Un resultado recíproco es el siguiente:

Corolario 7.7. *Toda función de Belyi* $f : X_{hol} \to \mathbb{C}P^1$ *induce una triangulación por triángulos equiláteros en* X_{hol}.

En efecto, si consideramos la triangulación $\mathcal{T}$ en $\mathbb{C}P^1$ formada por exactamente dos copias de un triángulo equilátero cuyos vértices sean 0, 1, ∞, entonces podemos considerar la imagen inversa de la triangulación $f^*\mathcal{T}$ en la superficie de Riemann X_{hol}. Si introducimos en X_{hol} una forma de medir de tal manera que f sea isometría local, entonces la triangulación $f^*\mathcal{L}$ es por triángulos equiláteros.

Nuestra construcción de funciones de Belyi es distinta de la que se halla en la literatura, ver [Sch] o [CIW].

El siguiente resultado relaciona la geometría de una curva proyectiva con la existencia de funciones de Belyi en ella.

Teorema 7.8. G. V. Belyi, [B]. *Una curva algebraica* $X_{proy} = \{P(z_0, z_1, z_2) = 0\} \subset \mathbb{C}P^2$ *es isomorfa (i.e. birracionalmente equivalente) a una curva algebraica definida por una ecuación polinomial homogénea cuyos coeficientes son números algebraicos si y sólo si la superficie de Riemann subyacente* X_{hol} *admite una función meromorfa con exactamente tres valores de ramificación.*

Este resultado ha sido uno de los puntos de partida de lo que ahora se conoce como la teoría de dibujos de niños de A. Grothendieck. Para este tema y sus aplicaciones el lector puede consultar [Sch] y [CIW].

Referencias

[A] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill (1979).

[B] G. V. Belyi, *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Math. USSR Iveztija, vol. 14, no. 2 (1980) 247–256.

[CIW] P. Beazley Cohen, C. Itzykson, J. Wolfart, *Fuchsian triangle groups and Grothendieck dessins*, Commun. Math. Phys. 163, (1994) 605–627.

[Mi] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society (1997).

[Mu] D. Mumford, *Curves and their Jacobians*, Appendix en; The Red Book of Varieties and Schemes, Second Expanded Edition, Springer Lecture Notes in Mathematics 1358, Springer–Verlag (1999).

[Rem] R. Remmert, *Theory of Complex Functions*, Springer (1991).

[Sch] L. Schneps (ed.), *The Grothendieck Theory of Dessins d' Enfants*, London Math. Society. Lecture Note Series 200, Cambridge Univ. Press (1994).