Las teorías de Gauge

Leticia Brambila Paz*, Jesús Muciño Raymundo†

Introducción

En la antigüedad se consideraba que toda la materia del universo estaba compuesta por cuatro elementos básicos: tierra, aire, fuego y agua. Realmente no era la única teoría, pero sí la más aceptada. También se aceptaba que había ciertas interacciones o fuerzas en la naturaleza que actúan entre los elementos.

En la actualidad, nuestras ideas al respecto han cambiado y aceptamos que toda materia está formada por partículas elementales o subatómicas. La pregunta ahora es: ¿cuáles son todas las partículas elementales? Esto es, ¿cuáles son los ladrillos básicos con los que todas las cosas están hechas y cuál es la interacción entre ellos?

Hoy en día se considera que en la naturaleza actúan cuatro fuerzas o interacciones básicas: la fuerza de la gravitación, la fuerza del electromagnetismo, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte. A las dos primeras las conocemos intuitivamente, y las dos últimas más difíciles de observar, intervienen en las interacciones de las partículas elementales, su alcance es apenas del diámetro del núcleo átomico. La fuerza nuclear fuerte mantiene unidos a los protones y neutrones, mientras que la fuerza nuclear débil interviene en la desintegración de ciertas partículas. Realmente las cuatro fuerzas intervienen en las interacciones de las partículas elementales, aunque con distintos grados de importancia. La fuerza gravitacional, usualmente, se suprime en estos procesos, pues es mucho más débil que las otras tres. Sin embargo, la fuerza electromagnética no se puede despreciar, porque de hecho ésta es más intensa que la fuerza débil.

Lo ideal sería tener una teoría que unificara las fuerzas existentes en la naturaleza. Esto es, que las cuatro fuerzas sean manifestaciones de un mismo fenómeno. Expliquemos con un ejemplo. Consideremos el juego de la ruleta, si como los observadores sólo vemos la pelotita de la ruleta en uno de los 37 casilleros de la ruleta, pensaríamos que puede haber 37 tipos diferentes de pelotitas. Sin embargo, si observamos la ruleta desde que empieza a girar podemos saber que es la misma pelotita que por distintos efectos puede caer en cualquiera de los 37 lugares.

En este sentido, se busca crear un modelo donde las cuatro fuerzas de la naturaleza sean manifestaciones de un mismo fenómeno. Esto es, un modelo donde haya un sólo tipo de fuerza actuando en ellas y que bajo ciertas condiciones permita recuperar las fuerzas conocidas. Para esto se requiere una teoría central única que incorpore todas las fuerzas conocidas y establezca las conexiones entre los distintos tipos de fuerzas sin perder su diversidad. Esto permitirá una mayor comprensión de cómo está constituido el universo. La construcción de tal teoría es lo que en física se conoce como el problema del campo unificado [6,7]. Recordemos brevemente algunos aspectos históricos sobre este problema.

Durante el período anterior al siglo XIX, se consideraban el campo eléctrico y magnético como distintos. A principios del siglo XIX A. Ampere y M. Faraday, entre otros, realizaron experimentos donde demostraban que estos campos estaban relacionados. En 1868 J. Maxwell desarrolló una teoría para unificar los campos, en el sentido de que ambos son una manifestación del mismo fenómeno: una carga eléctrica está rodeada por un campo eléctrico que se extiende infinitamente, y el movimiento de una carga eléctrica da origen a un campo magnético, éste también se extiende infinitamente. En este sentido Maxwell inició lo que más tarde se llamarán Teorías de Gauge o Teorías de Norma. H. Weyl, en 1920 presentó una teoría para combinar el electromagnetismo y la teoría de la relatividad. C. Yang y Mills en 1954, lograron expresar relaciones subyacentes

*Apoyada por *CONACyT*, Proy 0412-E9107. Depto. de Matemáticas, UAM-Iztapalapa, AP 55-534, México 09340, D. F.

†Instituto de Matemáticas, *UNAM,* C. U. , México 04510, D. F.

entre estas fuerzas como estructuras más abstractas, lo que para los matemáticos son conexiones en fibrados. Las teorías de gauge, como tal, se empezaron a desarrollar en los años cincuentas con el trabajo de Yang y Mills. Esta teoría llamada de Yang-Mills empieza como un modelo de las interacciones fuertes. Sin embargo, sus aplicaciones a las interacciones de las fuerzas débiles hacen que S. Weinberg, A. Salam, J. Ward y Glashow (en 1967) definan un nuevo modelo. Éste abarcó tanto la fuerza nuclear débil como la del electromagnetismo, pero no la fuerza nuclear fuerte.

Cabe señalar que ha habido otros intentos de unificar las cuatro fuerzas de la naturaleza, como las teorías de Kaluza-Klein y las de supersimetría y supergravedad. Sin embargo, aquí sólo nos ocuparemos de las teorías de gauge [6,9].

A través de la historia de la matemática y la física vemos ejemplos en donde los problemas físicos han servido de estímulo al pensamiento matemático. I. Newton crea el cálculo integral para formular la ley de la gravitación para cuerpos no puntuales. En la actualidad los modelos abstractos matemáticos se siguen basando, aunque algunas veces de modo remoto, en esquemas reales que presenta el universo. Una teoría creada por los matemáticos para tratar cuestiones propias resulta ser muchas veces lo que los físicos necesitaban para su análisis y predicciones de la naturaleza. Por ejemplo, el desarrollo del cálculo tensorial y la geometría riemanniana sirvieron para la formulación de la teoría general de relatividad.

Recientemente los físicos que estudian las fuerzas de la naturaleza, en particular los campos de la mecánica cuántica que intervienen en las interacciones de las partículas elementales, están utilizando conceptos matemáticos conocidos desde el siglo pasado, como son: la teoría de fibrados vectoriales, conexiones, curvatura, etc., para entender mejor el comportamiento de las partículas elementales. A mediados de este siglo, E. Cartan, C. Ehresmann, A. Grothendieck, entre otros, formalizan estos conceptos de manera rigurosa. Lo interesante es que ahora estos temas están jugando un papel esencial en la descripción de las leyes básicas de la naturaleza. Estos objetos abstractos son los conceptos que Yang y Mills utilizaron en sus teorías para relacionar las fuerzas.

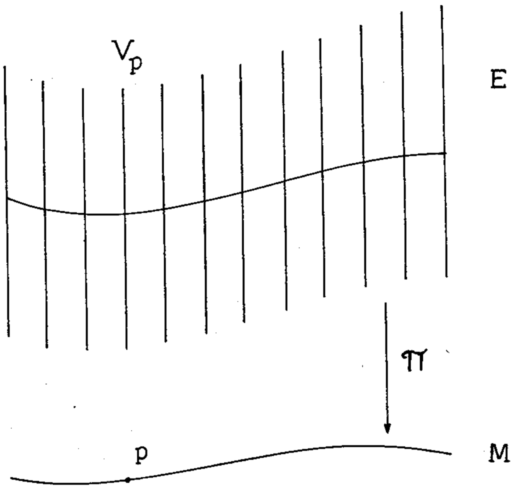
Las teorías de gauge forman actualmente una corriente importante de investigación, tanto en física como en matemáticas. En este trabajo queremos hacer una breve descripción de dichas teorías, mostrando a grandes rasgos sus elementos e ideas. También daremos algunos resultados que se obtienen a partir de estas teorías, en física y en matemáticas. En la sección 2 explicaremos ciertos conceptos matemáticos utilizados por los físicos para la unificación de las fuerzas. En la sección 3 veremos cómo pueden ser atacados problemas partículares mediante el principio de acción mínima y daremos algunos ejemplos aplicación de las teorías de gauge en física y matemáticas. En la sección 4 trataremos de resumir algunos de los resultados más importantes obtenidos en matemáticas mediante las teorías de gauge en los últimos años.

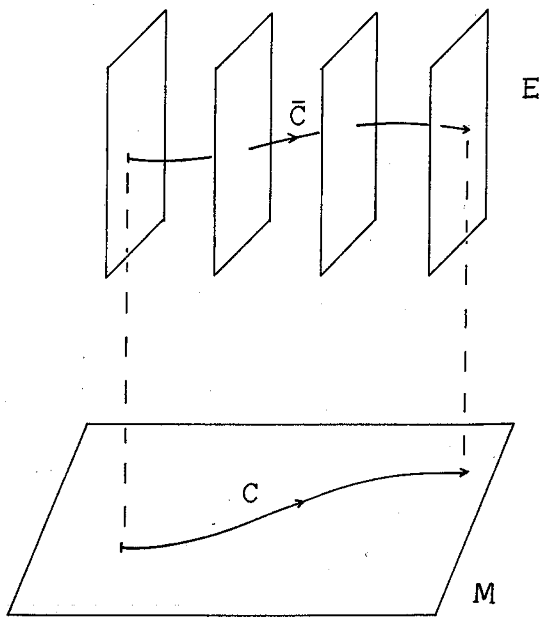
Descripción de la teoría de fibrados y partículas

En esta sección describiremos brevemente los objetos matemáticos utilizados en las teorías de gauge. Entre paréntesis y con letras itálicas señalaremos los conceptos formales. Nuestro tratamiento es muy simplista (un tratamiento riguroso de todos estos conceptos, desde el punto de vista físico y matemático puede hallarse en [1,4]).

Sentimos especial interés en modelar partículas,(matemáticamente estas partículas las interpretamos como puntos en un espacio ambiente M). El número de grados de libertad con que se mueven las partículas se llama: dimensión del espacio. Por ejemplo, una partícula en el mundo real está en un espacio de dimensión cuatro, las tres dimensiones usuales y el tiempo. Usaremos como espacio M una *variedad diferenciable* real o compleja, esto es, un espacio que localmente se parece a $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$.

Supongamos que estamos interesados en alguna "propiedad interna" específica de las partículas; por ejemplo queremos estudiar la velocidad o la energía cinética o el spin. Para esto, a cada partícula p en M le asignamos un valor $v(p)$ que mide la propiedad interna en la cual estamos interesados. Supongamos, por simplicidad, que el valor $v(p)$ es un elemento de un espacio vectorial V (esto es, $v(p)$ está en un espacio donde podemos sumar dos valores y multiplicar los valores por un número real o complejo). El espacio vectorial V donde se van a representar los valores de una partícula p, se llama la fibra de p y se denota por V_p.





Para visualizar lo anterior pondremos sobre cada punto de M una copia del espacio vectorial V. Tenemos entonces una colección de espacios vectoriales $E = \{V_p : p \in M\}$, a esta colección la llamamos un haz vectorial. Cada elemento r de V_p en el fibrado E representa dos datos: la posición p de la partícula en M y el valor $v(p)$ de su propiedad interna, esto es, r representa una pareja $(p, v(p))$. A la función natural $\pi : E \rightarrow M$ definida como $\pi(r) = p$ se le llama proyección del haz vectorial E. En general, un *haz vectorial* E de rango n sobre una variedad M es una familia $\{V_p : p \in M\}$ de espacios vectoriales de dimensión n parametrizados por los puntos p en M.

Ejemplo. Supongamos que de cada partícula de M lo único que nos interesa es la velocidad que tiene en cierto punto de su recorrido por M. Entonces el espacio vectorial que le asociamos a una partícula p, a saber: la fibra, es el espacio T_pM de vectores tangentes a M en el punto p. En este caso el haz vectorial se llama el haz tangente.

Algunas veces es útil considerar también los cambios de marco de referencia en la forma de medir la propiedad interna. Consideraremos el conjunto de transformaciones admisibles que actúan en el haz E, preservando las fibras del haz. A este conjunto se le conoce como el *grupo estructural de* E y lo denotaremos por G.

Por ejemplo, si V es de dimensión dos y queremos medir ángulos en cada fibra V_p, en principio no hay un marco de referencia privilegiado. Si dos observadores del fenómeno tienen forma de hacer la medición, ésta podrá diferir a lo más por una transformación admisible, esto es, una transformación en el grupo G.

Tenemos ahora una partícula p en M y supongamos que se mueve a lo largo de una curva C en M. Conforme la partícula se mueve en C puede suceder que los valores de su propiedad interna $v(p)$ cambien. Este cambio describe una curva $\overline{C}$ en el haz E llamada el levantamiento de C. Este cambio está dado por las pareja de posición de la partícula y los valores de su propiedad interna en esas posiciones.

Para describir cómo cambia la propiedad interna debemos ser capaces de describir el comportamiento de todas las posibles partículas que se mueven en M a lo largo de curvas C y todos sus posibles estados internos. Esto es, para cualquier curva C en M tenemos que describir la infinidad de curvas en el haz E, que sean posibles levantamientos de C. Para describir cómo cambia la propiedad interna, introducimos lo que en matemáticas se llama una conexión y en física el potencial.

Imaginemos de momento que nuestro espacio ambiente es un plano de dimensión dos con la geometría usual, esto es, el espacio euclidiano $M = \mathbb{R}^2$. Supongamos que la propiedad interna toma valores en los números reales $\mathbb{R}^1$. Entonces el haz fibrado vectorial es $E = \mathbb{R}^3 = \{(p, v) \in \mathbb{R}^3\}$, donde p está en $\mathbb{R}^2$ y v está en $\mathbb{R}^1$. Una conexión en E será una colección de planos asociados al haz vectorial E de la siguiente manera:

1. Para cada punto (p, v) en las fibras V_p hay un plano $Q_{(p,v)}$ de dimensión igual a la de M.

2. Cada plano $Q_{(p,v)}$ intersecta a la fibra V_p en un sólo punto.

3. Al "mover un poco" el punto p en M varía, "a lo más un poco", la inclinación de los planos $\{Q_{(p,v)}\}$ (al decir "un poco" nos referimos a un cambio diferenciable).

4. Si aplicamos una transformación de G a E entonces la colección de planos permanece invariante (esto es, tales transformaciones envían planos de la colección en planos de la colección).

Una conexión la denotamos por $\omega = \{Q_{(p,v)}\}$. Para una definición rigurosa de conexión ver [1,8].

Supongamos que una partícula p en M recorre el espacio ambiente a lo largo de una curva C. También supongamos que en el punto inicial el valor de su propiedad interna es $v(p)$. Dada una conexión $\omega = \{Q_{(p,v)}\}$ definimos el levantamiento $\overline{C}$ como la única curva en E tal que satisface las siguientes condiciones:

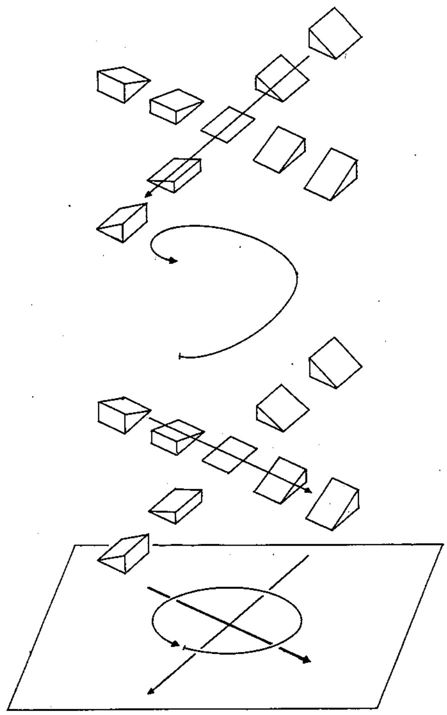
1. Pasa por el punto $v(p)$ en E.

2. Al considerar la proyección $\pi : E \longrightarrow M$ se tiene que $\pi(\overline{C}) = C$.

3. Los vectores tangentes de $\overline{C}$ están siempre contenidos en los planos $Q_{(p,v)}$ dados por ω.

Nótese que al variar el valor de la propiedad interna, el levantamiento que describe puede "cambiar de altura" de $\overline{C}$ en E.

En la siguiente figura representaremos levantamientos de una curva cerrada y de rectas en el plano que pasan por el origen, así como de planos que representan a la conexión ω.



Si conocemos cómo se mueve la partícula en M y conocemos el valor de su propiedad interna en un punto, una conexión ω nos permitirá describir el comportamiento de la propiedad interna y su valor para cualquier movimiento de la partícula en alguna curva.

Ejemplo. Sea $E = \mathbb{R}^3$ como antes y la conexión ω como la figura 3. Observemos que para esta conexión, una partícula que se mueve en círculos con centro en el origen, tiene como levantamientos curvas espirales. Esto nos dice que su propiedad interna siempre está cambiando. Observemos también que, en este caso, el levantamiento de una curva cerrada en M no es siempre una curva cerrada en E. (Si consideramos que una partícula viaja por una recta que pasa por el origen, entonces se tiene el levantamiento a una recta de altura constante).

Decimos que una conexión es globalmente plana si cualquier levantamiento de una curva cerrada en M es siempre una curva cerrada en E. En nuestro ejemplo anterior, la conexión w no es globalmente plana. Si en el caso anterior elegimos como planos de la conexión los planos horizontales en $\mathbf{R}^3$ entonces tendríamos una conexión globalmente plana. De hecho, existe una forma de medir qué tanto una conexión deja de ser globalmente plana. Esta medida es conocida como *la curvatura de la conexión.* La curvatura es una *dos-forma diferencial* en M con valores en el *álgebra de Lie de G.* Denotamos a la curvatura de una conexión ω por F_ω, y si la conexión es globalmente plana decimos que su curvatura es cero.

Quisiéramos que estas construcciones resultaran invariantes bajos ciertos cambios de coordenadas (en general, un cambio de coordenadas en E será una función diferenciable de E en E con inversa diferenciable). Dadas, las propiedades que se quieren estudiar, el tipo de cambios de coordenadas que nos interesa es el de cambios de coordenadas que dejan invariantes las fibras V_p de E y conmutan con las transformaciones de G en E. Estas son conocidas como *transformaciones de gauge.* Forman un grupo bajo la composición denotada por $\mathcal{G}(E)$.

El grupo de gauge actúa en el espacio de conexiones. Si una conexión tiene curvatura cero, entonces sus transformadas bajo el grupo de gauge también tienen curvatura cero. Esto es que la propiedad de una conexión tenga curvatura cero es una propiedad invariante bajo el grupo de gauge.

Este grupo de transformaciones $\mathcal{G}(E)$ juega en el estudio de la teoría de los fibrados vectoriales un papel similar al que juegan los grupos de isometrías en el estudio de la geometría euclidiana. El nombre "gauge" viene del inglés y se puede traducir como escala o calibre. Podemos justificar su nombre diciendo que debemos entender estas transformaciones que no cambian esencialmente el calibre o la escala o la norma con la cual medimos la propiedad interna en E.

Decimos que las teorías de gauge son el estudio de las propiedades de los haces vectoriales E, o bien sus objetos asociados, como conexiones, curvaturas, etcétera, tales que no cambian bajo transformaciones de gauge.

Invariantes del grupo de gauge

En esta sección veremos cómo son utilizadas las teorías de gauge en física. Primero, veamos que desde el punto de vista de matemáticas se tienen los siguientes elementos:

a) Una variedad M diferenciable. Real o compleja (en general se pide una variedad C^∞ riemanniana o pseudo-riemanniana).

b) Un grupo G (por lo general se pedirá un grupo de Lie compacto).

c) Un haz vectorial E sobre M tal que G puede ser visto como un grupo de transformaciones en E.

d) El grupo gauge $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ asociado a E (es generalmente un grupo de Lie de dimensión infinita).

f) Una conexión ω del haz. El espacio de todas las conexiones en E lo denotamos por $\mathcal{A}(E)$ (generalmente es un espacio de dimensión infinita).

Dados estos ingredientes, en matemáticas, uno se puede hacer preguntas topológicas, algebraicas, geométricas, etcétera. Por ejemplo:

¿Cuántos haces vectoriales distintos pueden construirse sobre una variedad M ?

¿Cuándo un haz vectorial admite una conexión de curvatura cero?

¿Es posible conocer todas las conexiones de un haz, salvo equivalencia bajo transformaciones de gauge?

¿Qué diferencias hay entre dos conexiones que tienen curvatura cero?

En física, con estos ingredientes uno puede hacerse las siguientes preguntas:

De entre todas las posibles conexiones en $\mathcal{A}(E)$ sobre un haz vectorial E, ¿cuáles son aquéllas que modelan la naturaleza y cómo hallarlas?

Para plantear correctamente este problema debemos, primero, aceptar que dos conexiones en $\mathcal{A}(E)$ están relacionadas bajo una transformación de gauge, si representan los mismos campos de partículas y potenciales. Desde el punto de vista de las teorías de gauge, tales conexiones son indistinguibles, ya que en las teorías de gauge se identifican aquellas que estén relacionadas por transformaciones de gauge.

El problema de buscar aquellas conexiones que modelan la naturaleza, podemos plantearlo ahora usando el principio de acción mínima. El principio de acción mínima nos dice que hay ciertas cantidades asociadas a muchos fenómenos en la naturaleza, éstos se llevan a cabo de tal forma que esas cantidades toman valores mínimos. Por ejemplo, se acepta que un rayo de luz atraviesa el universo por trayectorias de longitud mínima, o bien, el área formada por una película de jabón que encierra un volumen de aire, es el mínimo posible.

Utilizando teorías de gauge se ha visto que ciertas ecuaciones que aparecen en forma natural, por ejemplo en termodinámica, superconductividad, teoría de relatividad, etcétera, se pueden expresar como condiciones necesarias y suficientes para minimizar cierta funcional.

Para explicar mejor el principio de acción mínima en teorías de gauge llevaremos a cabo el siguiente esquema, al cual lo llamaremos el esquema A:

Esquema A:

i) Definir una funcional en el espacio de las conexiones $\mathcal{A}(E)$. Esto es, una función que a cada conexión le asocie un número real. Esta función intuitivamente mide la cantidad que deseamos minimizar. En ciertos casos a la funcional se le llama "el Lagrangiano".

ii) Requerir que la funcional sea invariante bajo el grupo gauge. Esto es, si dos conexiones están relacionadas bajo una transformación de gauge entonces la funcional les debe asociar el mismo número real.

iii) Dar condiciones para obtener las conexiones en las cuales la funcional toma valores mínimos (o en general los llamados puntos críticos). Este problema, en general, se traduce en sistemas de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son las conexiones buscadas. En mecánica clásica, por ejemplo, las ecuaciones que aparecen se llaman las ecuaciones de Euler-Lagrange.

iv) Probar la existencia de conexiones que sean puntos críticos de la funcional.

v) Generalmente, si las soluciones existen, son una infinidad y es deseable contarlas o parametrizarlas mediante un conjunto de parámetros.

El conjunto de parámetros para las soluciones recibe el nombre de espacio moduli de soluciones. El espacio moduli depende del problema particular. La importancia de tener un espacio moduli es que ahí vamos a tener toda la información sobre las soluciones. ¿Cuándo una solución está cercana a otra?, ¿cuándo se puede deformar una en otra?, etcétera.

La variedad o espacio ambiente M, el grupo estructural G y el haz E generalmente están determinados únicamente por el problema que se desea estudiar. Por ejemplo, si estamos interesados en gravitación M será una variedad pseudo-riemanniana de dimensión cuatro. Si se consideran las fuerzas del electromagnetismo, el grupo estructural será $U(1)$ (formado por los números complejos de norma uno, que geométricamente forman un círculo). Si se considera la fuerza nuclear débil, el grupo de simetrías será $SU(2)$. Si consideramos conjuntamente la fuerza nuclear débil y la del electromagnetismo el grupo estructural será el grupo (no-abeliano) $U(2)$, etcétera.

Dados M y G podemos ver que lo más importante para hacer trabajar el esquema A es la elección de la funcional. Naturalmente el problema en el que estamos interesados nos deberá sugerir qué funcional usar. Veamos algunos ejemplos de cómo trabajan estas ideas.

Ejemplo 1. El electromagnetismo como una teoría de gauge

Consideremos el caso particular de la teoría del electromagnetismo. Desde el siglo pasado Lorenz y Maxwell consideraron el espacio-tiempo con cierta estructura. Poincaré, Einstein y Minkowski consideraron el espacio tiempo como $\mathbb{R}^{3,1}$ con una estructura, *métrica pseudo-riemanniana*. Este será nuestro espacio ambiente M. Consideramos el haz trivial $E = \mathbb{R}^{3,1} \times \mathbb{R}^2$ con grupo estructural $U(1)$. Una conexión ω en este caso se llama el potencial electromagnético. La curvatura de ω está dada por la derivada exterior $d\omega = F_\omega$. En este caso representa el campo electromagnético. La funcional será

$$\mathcal{LM}(\omega) = 1/2 \int_M (F_\omega, F_\omega),$$

donde (F_ω, F_ω) es el producto escalar de formas diferenciables en M (ver [4]).

La condición para obtener valores mínimos de la funcional $\mathcal{LM}$, se reduce precisamente de las ecuaciones de Maxwell

$$d\omega = 0, \qquad \delta\omega = 0.$$

donde $\delta = *d*$ es la codiferencial en M y $*$ es el operador de Hodge (ver [1 ,10]).

De hecho, estas ecuaciones son también invariantes bajo isometrías lineales de $\mathbb{R}^{3,1}$. El grupo de estas isometrías se llama el grupo de Lorentz de las isometrías lineales. (Realmente estas transformaciones son invariantes bajo transformaciones más generales y son llamadas las llamadas transformaciones conformes). Se podría decir que Lorentz fue el primero en observar ciertos fenómenos en física que son invariantes bajo un grupo. Por lo general, estos grupos serán grupos de simetría.

Ejemplo 2. Las teorías de Yang-Mills

En los años setenta, A. Salam, J. C. Ward, S. Weinberg y Glashow [10], definen un nuevo modelo en donde se abarcará tanto la fuerza nuclear débil como la del electromagnetismo. Analizaremos este caso siguiendo el esquema A, pero desde un punto de vista más cercano a las matemáticas.

Dada una variedad M, un grupo G y el haz E, definimos la funcional de Yang-Mills de la siguiente manera:

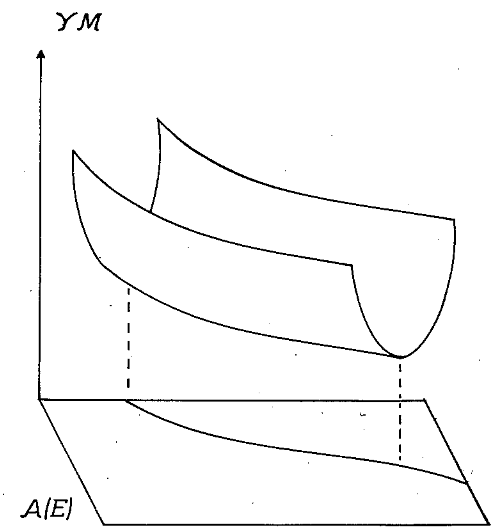
$$\mathcal{YM}(\omega) = k \int_M ||F_\omega||$$

donde $||F_\omega||$ es la nomal usual para las formas diferenciales en el haz y k es una constante que depende del grupo G.

Podemos preguntarnos, de entre todas las conexiones en E ¿cuáles son de curvatura mínima? No todo haz fibrado E admite una conexión de curvatura cero, el haz tangente de una esfera de dimensión dos es un ejemplo. La conexión se llama en este caso el potencial y la funcional, físicamente, representa una fuerza. Los mínimos de esta funcional serán las conexiones con menor curvatura sobre M. Por lo que buscar los mínimos de la funcional es lo mismo que buscar "los potenciales de menor fuerza global". Se puede ver que la funcional de Yang-Mills es invariante bajo transformaciones de gauge.

Los puntos críticos de esta funcional serán llamados conexiones (o potenciales) de Yang-Mills, y la curvatura F_ω el campo de Yang-Mills.

En la siguiente figura representaremos la gráfica de una funcional. La parte marcada representa los puntos correspondientes a la minimal.



Las condiciones para obtener los valores mínimos de la funcional de Yang-Mills se reducen a la siguiente ecuación

$$D^*_\omega F_\omega = 0,$$

donde D^*_ω es un operador asociado a la derivada covariante de conexión. Estas ecuaciones se llaman las ecuaciones de Yang-Mills.

En particular, si M es de dimensión 4 y $G = SU(2)$, las conexiones donde la funcional de Yang-Mills toma valores mínimos se llaman instantones o anti-instantones. Desde fines de los años setenta M. Atiyah, N. Hitchin, I. Singer y Y. Main (entre otros) mostraron que existen instantones para familias muy amplias de variedades M. También calcularon la dimensión del espacio de parámetros de instantones, es decir, la dimensión del espacio de moduli. Por ejemplo, para una variedad orientable, simplemente conexa, de dimensión cuatro, la dimensión del espacio de moduli es cinco.

Siguiendo esta línea se tienen otras funcionales, como sería la de Yang-Mills-Higgs. En este caso, las ecuaciones obtenidas son llamadas ecuaciones de vórtices [4].

Las teorías de Yang-Mills tienen muchas aplicaciones en física y matemáticas, independientemente de la dimensión de la variedad. La construcción teórica de monopolos magnéticos, la homología de Floer, etcétera. Sin embargo, la dimensión de M en la mayoría de las teorías físicas que usan espacio-tiempo es cuatro (aunque hay teorías en donde se supone que la dimensión es mayor, por ejemplo, las teorías de Kaluza-klein).

El valor mínimo para la funcional de Yang-Mills es siempre mayor o igual a un número que depende de la forma en donde E está torcido topológicamente. Estos números se llaman números característicos o clases características en matemáticas, mientras en física se les llama cargas topológicas. Las ecuaciones de Yang-Mills son invariantes bajo transformaciones de M que preservan ángulos, esto es, son invariantes conformes. En particular, la curvatura se puede dividir en dos partes y se dan las ecuaciones llamadas de autodualidad

$$*F_\omega = F_\omega.$$

Se sabe que sobre una *variedad, orientable, simplemente conexa* de la dimensión cuatro, una conexión sobre un haz con clase característica positiva, es instantón si y sólo si cumple con la ecuación de autodualidad.

Algunos problemas matemáticos resueltos mediante teorías de gauge

Uno de los aspectos sorprendentes de todas estas ideas ha sido que algunas resultados en matemáticas, han traído consecuencias inesperadas en otras.

Uno de los problemas principales en varias ramas de matemáticas, es el problema de clasificación de ciertos objetos. Se considera una colección de objetos y una relación de equivalencia entre los objetos. El problema de clasificación consiste en dar una descripción del conjunto de las clases de equivalencia de los objetos. Por lo general, para solucionar el problema se consideran, primero ciertos invariantes asociados, como sería la dimensión, el grado, el género, etcétera. Esto permite dividir el problema en un conjunto numerable de subconjutos.

Por ejemplo, en topología se tienen los objetos llamados variedades topológicas a las cuales nos hemos referido (toda variedad diferenciable es una variedad topológica). Decimos que dos variables son topológicamente equivalentes si existe una función continua entre ellas, de tal manera que la inversa existe y es continua también. El invariante considerado aquí es la dimensión de la variedad. Los subconjuntos estudiosos son los formados por clases de equivalencia de variedades de una dimensión fija.

En topología diferencial o geometría analítica se puede considerar también el problema de clasificación considerando ahora variedades diferenciables u holomorfas; esto es, variedades en las que las funciones involucradas son diferenciables u holomorfas. Cada problema es distinto, así como su solución.

Por ejemplo, se sabe que hay variedades diferenciables de dimensión siete no equivalentes diferenciablemente entre sí, pero sí topológicamente equivalentes (de hecho esas variedades son topológicamente como la esfera de dimensión siete en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^8$). Para variedades topológicas compactas el problema de clasificación es conocido para dimensiones uno y dos. Para dimensión tres el conocimiento actual es muy restringido. En este caso, se imponen más condiciones sobre las variedades para simplificar el problema, por ejemplo, que sea compacta, conexa, simplemente conexa, orientable, etcétera.

Poincaré a principios de este siglo conjeturó que la única variedad topológica de dimensión tres, compacta, conexa y simplemente conexa es la esfera de dimensión tres. Muchos matemáticos han tratado de demostrar esta conjetura y se han establecido muchas equivalencias. Sin embargo, la respuesta a esta pregunta es aún desconocida.

La pregunta análoga para la dimensión cuatro ha sido respondida en forma negativa. M. Fredmann en 1982 ha dado una clasificación de 4-variedades topológicas simplemente conexas. Tal lista naturalmente contiene a la esfera de dimensión cuatro. También ha mostrado que existen variedades topológicas de dimensión cuatro que no pueden ser vareidades diferenciables. Un problema en esta dirección es traducir la clasificación de Freedmann (topológica) para variedades diferenciables.

Ahora veamos que podemos obtener resultados en los problemas de clasificación de variedades diferenciables, usando espacios moduli de instantones. Cuando se estudian los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$, se determinan cuáles son las funciones diferenciables y con estas funciones se hace cierto tipo de cálculo diferencial e integral al cual llamamos: cálculo usual. En este caso, decimos que $\mathbb{R}^n$ tiene la estructura diferencial usual y lo llamaremos $\mathbb{R}^n$-usual. Una pregunta que siempre ha surgido es si se puede hacer otro tipo de cálculo diferencial e integral en $\mathbb{R}^n$ distinto del usual. La pregunta se traduce a que si se le puede dar a $\mathbb{R}^n$ una estructura diferenciable distinta de la usual.

Si $\mathbb{R}^n$ tiene una estructura diferencial distinta de la usual decimos que tiene una estructrura exótica y será llamada $\mathbb{R}^n$-exótico. También se quiere saber cuántas estructuras exóticas hay.

S. Donaldson, R. Kirby y M. Freedman demostraron en 1985 que existen exóticos si y sólo si $n = 4$. De hecho demuestran que hay una infinidad de ellos, no diferenciablemente equivalentes entre sí. Queda abierto el problema de clasificar todos los posibles $\mathbb{R}^4$-exóticos.

Para demostrar el teorema, Donaldson, Kirby y Freedman utilizan el espacio moduli de instantones. Y trabajan sobre una variedad M de dimensión cuatro un haz vectorial E con grupo estructural $SU(2)$, con clase característica uno y la funcional de Yang-Mills [3].

Un problema que queda abierto es interpretar los espacios moduli cuando las clases características del haz son distintas de uno, o bien para otras funcionales. Otro de los problemas que surgen ahora es: deteminar cuál de todas las estructuras exóticas en $\mathbb{R}^4$ es la que da una mejor interpretación del mundo físico.

Veremos ahora otro aspecto donde las teorías de gauge han influenciado en el desarrollo de las matemáticas puras. En geometría algebraica se tienen los objetos llamados haces holomorfos sobre una variedad holomorfa (son haces vectoriales donde las funciones que intervienen en su construcción son holomorfas). El problema de clasificar estos objetos, cuando la variedad M es una superficie de Riemann, fue resuelto por M. Narasimhan y C. Seshadri en 1965. Éstos demostraron que si se consideran cierto tipo de haces, los llamados haces estables, entonces existe un espacio moduli para ellos.

Cuando consideramos la funcional de Yang-Mills consideramos un haz vectorial E sobre una variedad M. Las condiciones para obtener los valores mínimos de la funcional nos llevan a las ecuaciones de Yang-Mills. Cuando la variedad M satisface ciertas condiciones, esto es, que sea Kähler y compacta, K. Uhlembeck y S. Yau en 1983 demostraron que el tener una solución de las ecuaciones de Yang-Mills es equivalente a que el haz E sea holomorfo y que tenga una métrica riemanniana especial: la métrica de Yang-Mills o Einstein-Hermitiana. También demostraron que existe esta métrica si y sólo si el haz es estable y construyeron el espacio moduli para haces estables. Utilizando estas equivalencias Donaldson, en 1985, generaliza estos resultados para variedades algebraicas [3].

Para finalizar, debemos hacer notar que las teorías de gauge no constituyen (al menos hoy en día) una solución al problema del campo unificado, pero han permitido solucionar muchos problemas en física y matemáticas, dando origen a nuevas corrientes de investigación en ambas ciencias.

Agradecimientos

Agradecemos a Fausto Ongay y Óscar Adolfo Sánchez Valenzuela sus sugerencias y comentarios a versiones previas a este artículo.

Referencias

[1] D. Bleecker: *Gauge Theory and Variatonal principles.* Addison Wesley. 1981.

[2] G. H. Berntein, A. V. Phyllips: "Fibrados y teoría cuántica". *Investigación y ciencia* núm. 60 Sept. 1981, pp 90-106.

[3] S. K. Donaldson, P. B. Kronheimer. *The Geometry of four Manifolds.* Claredon Press. Oxford. 1990.

[4] A. Jaffe, C. Taubes: *Vortices and Monopoles.* Birkhaüser. 1980.

[5] M. Freedman, L. Luo. *Selected Applications of Geometry to Low-Dimensional Topology.* American Mathematical Society. 1989.

[6] S. Hawking. *Una breve historia del tiempo.* Grupo Editorial Grijalvo. Crítica. 1988.

[7] G. t'Hooft. "Teorías de gauge de las fuerzas entre partículas elementales" en: *Partículas elementales*, Libros de Investigación y ciencia (*Scientific American*), 1984.

[8] H. B. Lawson. *The Theory of Gauge Fields in Four Dimensions.* American Mathematical Society. 1985.

[9] M. Moreno, A. Zepeda. "Gran unificación y supercuerdas" en *Perspectivas en Biología y la Física.* Segunda parte. UNAM. 1989.

[10] Ch. Quigg. "Gauge theories of Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions". *Frontiers in Physics.* Benjamín Cummings. 1983.

[11] O. A. Sánchez Valenzuela. "Aplicaciones de la Geometría Diferencial". *Tesis de Licenciatura,* Facultad de Ciencias, UNAM. 1980.

[12] O. A. Sánchez Valenzuela. *Teoría de Grupo y Partículas Elementáles.* CIMAT. Comunicaciones Técnicas. 1991.

Recibido: 22/05/92

Aceptado: 18/09/92

cs

ContactoS

Revista de educación en ciencias básicas e ingeniería.

Núm. 8 Nueva Época. 1993.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo