Miscelánea Matemática **65** (2018) 69-83 SMM

La teoría de modulaciones *In Memoriam.* Antonmaria Minzoni Alessio†

Luis A. Cisneros-Ake
Departamento de Matemáticas, ESFM,
Instituto Politécnico Nacional
cisneros@esfm.ipn.mx

Resumen

En el tiempo que pude interactuar con el Dr. Minzoni, durante mi estancia en la UNAM como su estudiante y durante la parte última de su vida como su colega, le pude aprender una diversidad de matemáticas entre la que se encuentra la teoría de modulaciones, la cual es útil para describir la evolución de estructuras localizadas viajeras en medios no lineales. Dicha teoría de modulaciones fue originalmente desarrollada por el que fuera asesor doctoral del profesor Minzoni, el profesor Gerald Beresford Whitham quién también lamentablemente falleció recientemente en el año 2014, y fue herramienta ampliamente usada en gran parte del trabajo científico del Dr. Minzoni. En reconocimiento, pues, a la trayectoria no solo científíca y académica sino humana del profesor Minzoni me permito desarrollar el tema de la teoría de modulaciones y aprovecho la oportunidad para compartir algunas cosas que viví con él. Finalmente, y no menos importante, sirva también el presente trabajo como agradecimiento de la revista Miscelánea Matemática a la valiosa contribución que hizo el Dr. Minzoni durante su época como editor de la revista en los periodos 1977-1982 y 1992-1998.

1. El Dr. Minzoni desde mi perspectiva

Tuve la fortuna de encontrarme con el Dr. Minzoni en febrero del año 2002, cuando estaba buscando un asesor para mis estudios graduados en la UNAM. Debido a mi formación previa en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, tenía un desconocimiento de la figura del profesor Minzoni. Sin embargo, una búsqueda rápida en la red sobre matemáticas aplicadas en el país me dio idea del tipo de matemático que era él, así que inmediatamente emprendí camino en dirección sur.

Era de todos conocido en la UNAM la postura del Dr. Minzoni, pues así lo externaba públicamente él, sobre que todo estudiante bueno que deseara estudiar un posgrado en matemáticas debería de hacerlo en el extranjero, y en particular en los Estados Unidos. Con mi desconocimiento de esto tuve el atrevimiento de pararme en la oficina del profesor Minzoni y pedirle que fuera mi tutor en el programa del posgrado en Ciencias Matemáticas de la UNAM. Mi único argumento era mi deseo expreso de estudiar matemáticas aplicadas con alguien como él. La posición del profesor Minzoni, creo, fue de disuadirme en tal propósito para lo cual hizo dos cosas: la primera, me mandó a que platicara con sus otros colegas de su departamento y la segunda, a cuestionarme sobre el tipo de matemáticas y aplicaciones de la física que conocía. A la primer opción planteada no le hice mucho caso pues yo deseaba trabajar específicamente con él y para la segunda situación me planteó tres problemas. Los problemas en cuestión fueron sobre resolver analítica y numéricamente por diferencias finitas la ecuación de Laplace en el cuadrado unitario con condiciones de Dirichlet prescritas, además del problema de un flujo planar sobre una superficie rolliza en ausencia de viscosidad. En retrospectiva entiendo la postura del Dr. Minzoni, tanto que, ahora como profesor, suelo aplicarla para detectar perspectivas de éxito académico en estudiantes que no conozco de primera mano. Al tercer día le llevé y le expliqué mis resultados al profesor Minzoni, y fue entonces que accedió a firmar mis requisitos.

Durante mis estudios de posgrado tuve la oportunidad de aprender la asintótica y la teoría de modulaciones directamente del profesor Minzoni, con lo cual pude escribir mi trabajo terminal de maestría sobre la *Asintótica para la Propagación de Solitones en la Cadena de Toda con Impurezas*, mientras que para mi tesis doctoral desarrollé a los *Solitones en Cadenas Unidimensionales y Retículas Bidimensionales.* Para mí fueron maravillosas las discusiones matutinas con el Dr. Minzoni, antes de que él se fuera a enseñar su clase o a trabajar con algunos de sus colegas, acerca de cómo aproximar asintótica y numéricamente la propagación de solitones en diversos medios discretos. Tales discusiones comenzaban a las siete de la mañana, que era la hora habitual de su llegada al Instituto, ya que él solía estar en la UNAM mayormente por las mañanas, debido a sus compromisos familiares. Algo que siempre me sorprendió del profesor Minzoni, en relación al tratamiento numérico de los sistemas diferenciales, fue que, a pesar de no haber él

Figura 1. Con el Dr. Minzoni, en el año 2004.

nunca hecho un código numérico como tal, tenía un sentimiento muy fino para saber si un programa computacional estaba funcionando bien o si no para opinar en dónde podría estar fallando, debido a que en su amplia cultura matemática tenía bastante conocimiento de diversos temas del análisis numérico. De mi interacción, pues, con el profesor Minzoni durante este tiempo de estudiante suyo pude aprenderle diferentes perspectivas para atacar los problemas que nos interesaban y ver a la matemática un poco en su visión, esto es, desde el punto de vista aproximativo.

En 2007 llegué a ser el primer estudiante doctorado en matemáticas en México bajo la dirección del profesor Minzoni para después, en gran medida debido a su apoyo, hacer una estancia postdoctoral en los Estados Unidos. Desde allá continué mi colaboración con el Dr. Minzoni y a mi regreso, ya como profesor establecido en el IPN, continué visitandolo en el Instituto de manera regular, hasta antes de su lamentable fallecimiento. Puedo decir que mi desarrollo como estudiante y mi evolución como profesor atestiguan el afecto y el apoyo que el profesor Minzoni brindaba desinteresadamente a todos aquellos a quienes él estimaba, muy especialmente a sus estudiantes, a los cuales de cariño se refería como sus *conejos*, y de los cuales decía son nuestra razón de ser como académicos.

No está de más comentar que el Dr. Minzoni tenía un estándar bastante alto en cuestiones científicas y académicas, no solo del ámbito matemático, debido en gran medida a su experiencia adquirida durante sus visitas al Caltech (1977, 1979, 1981), el Tata Institute en Bombay (1978) y en Bangalore (1978, 1981, 1988), la Universidad de Bath

(1986), la Northwestern University (1986), la University of New South Wales (1987), la University of Wollongong (1987), la Southern Methodist University (1989), la University of Delaware (1993) y la University of Edinburgh (1995). Esta experiencia, aunada a su personalidad crítica y extrovertida, le hacían externar públicamente opiniones fuertes en cada uno de los comités internos y externos a la UNAM en que participó y reuniones a las que asistió. Esto le generó muchos amigos y varios enemigos. El Dr. Minzoni siempre mostró un afecto fiel hacía los que consideraba sus amigos. Un afecto que, en palabras suyas, era como el de un canino que quiere proteger a su manada, él decía que si hubiera vivido en la época de las cavernas le deberían de haber apodado el can. El profesor Minzoni comentaba que él era de contrastes: o eras su amigo o eras su enemigo, que para él no había términos medios y que a sus enemigos se los había ganado a pulso.

En la última etapa del profesor Minzoni, y en la cual tuve la oportunidad de continuar tratándolo, me seguí beneficiando de su amplio conocimiento, no solo matemático. Era sorprendente cómo podía argumentar si algo ya estaba hecho dando referencias exactas, hasta del número de página donde uno podría verificar tales cosas. En cada visita mía al Instituto le aprendía algo nuevo, aunque aparentemente no estuviera muy relacionado con las cosas que estábamos estudiando en aquel momento. Recuerdo que en alguno de esos momentos me comentó que a él le hubiera gustado tener cerca a alguien más preparado que él, en el campo de las matemáticas, de quien pudiera también beneficiarse intelectualmente, algo parecido a lo que directamente tuvo la oportunidad de vivir con el mismo Richard Feynman en alguna de sus visitas al Caltech. En alguna otra ocasión le externé mi admiración como el matemático que era, y en su sensatez me respondió, un poco a lo que el mismo G. H. Hardy pensaba de sí mismo, que él no era para causar admiración hasta que tuviera un descubrimiento matemático importante.

Como muestra de agradecimiento a mi profesor, colega y amigo, y a quien fue un apasionado por calcular y aproximar en matemáticas, desarrollaré brevemente a continuación uno de los tópicos que generosamente me heredó el profesor Minzoni, la teoría de modulaciones. Que en palabras suyas, y con las reservas pertinentes, de acuerdo al contexto en que se esté hablando, es uno de los pocos mecanismos para hacer un estudio sistemático de los fenómenos no lineales. Para comprender un poco de manera secuenciada qué es y para qué sirve la teoría de modulaciones desarrollada por el profesor Gerald Beresford Whitham, y trabajada ampliamente por su estudiante doctoral, el profesor Minzoni, en gran parte de sus trabajos científicos, me basaré precisamente en el libro *Linear and Non linear Waves* de G. B. Whitham [20] y empezaré analizando lo que sucede en las ecuaciones diferenciales lineales.

2. Dispersión de ondas lineales

El estudio del movimiento de las ondas generadas por una cuerda, una viga o un campo electromagnético, digamos, queda descrito por ecuaciones no hiperbólicas del tipo dispersivo. Tal clasificación dispersiva esta asociada al comportamiento de las ondas solución y no exactamente al tipo de ecuación que se considere. El Dr. Minzoni estudió, precisamente, a las ecuaciones diferenciales con ondas dispersivas desde su tesis doctoral y en sus primeras publicaciones, relativas a las ondas en agua [14], [16]. Este fue un tema fructífero que siguió investigando hasta sus últimos días, y cuyas contribuciones han motivado muchos avances en el área de las ondas no lineales. Además, a lo largo de su trayectoria científica desarrolló y aplicó las técnicas variacionales y de modulación, las cuales describimos más adelante, en el estudio de varios sistemas físicos que involucran ondas no lineales dispersivas como los solitones ópticos en cristales líquidos (ver, por ejemplo, [3]) y en cadenas de biomoléculas [8]. También usó estas técnicas en otras ecuaciones diferenciales no lineales como los sistemas de difusión no lineal [4], con diversas aplicaciones en las matemáticas biológicas, como en la neurofisiología.

Comencemos, pues, nuestro análisis de ondas dispersivas en el caso de ecuaciones diferenciales parciales lineales, y veamos como un concepto tan simple, como lo es la relación de dispersión asociada a la ecuación diferencial, puede caracterizar a la dispersión de las ondas, cuando ello ocurre.

2.1 Relación de dispersión

Consideremos una ecuación diferencial parcial (EDP) lineal definida por el operador diferencial lineal L, en la forma $L[u] = 0$. Nos preguntamos ahora por la existencia de soluciones elementales de onda plana en la forma de ondas senosoidales del tipo $u(\vec{x}, t) = Ae^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x} - wt\right)}$, donde $\vec{k}$ es el vector de número de onda, w la frecuencia de oscilación y A la amplitud de la onda, todos ellos valores constantes. Puesto que el operador diferencial L es lineal, A sale como factor común y la solución en cuestión resulta depender solamente de $\vec{k}$ y w en términos de una relación, en general, implícita de la forma $G(w, \vec{k}) = 0$. Esta última relación es conocida como la relación de dispersión asociada a la ecuación diferencial definida por $L[u] = 0$.

De esta manera, en ecuaciones diferenciales parciales lineales, conocer la ecuación diferencial o su relación de dispersión asociada son equivalentes. Por otro lado, las diferentes soluciones $w = w(\vec{k})$ de $G(w, \vec{k}) = 0$ se llaman los modos de dispersión de la solución. En el caso lineal los modos se pueden superponer para expresar la solución general completa como una combinación lineal de ellos.

Puesto que la solución u en realidad es de variable real debemos de considerar de hecho $\Re u\,(\vec{x}, t) = |A| \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{x} - wt + \eta\right)$, $\eta = \operatorname{Arg} A$. Se encuentra que las crestas y los valles de las oscilaciones se alcanzan en $\max_{\vec{x}} \Re u\,(\vec{x}, t)$ y en $\min_{\vec{x}} \Re u\,(\vec{x}, t)$, respectivamente. De esta manera, $||\vec{k}||$ representa el número de crestas cada longitud 2π, y por tanto $\lambda = 2\pi/||\vec{k}||$ tiene que ser la longitud de onda y $T = 2\pi/w$ su período de oscilación.

Si definimos $\theta = \theta\,(\vec{x}, t) = \vec{k} \cdot \vec{x} - wt$ como la fase de la onda encontramos que los valores $\theta =$constante dan lugar a planos paralelos, con $\vec{k}$ como su vector normal común. Así, de lo anterior, se puede ver que $\vec{c} = \frac{w}{||\vec{k}||}\hat{k}$ representa la velocidad de la fase (esto es, de un componente individual de la onda) y que $-\theta_t = w$ y $\theta_{\vec{x}} = \vec{k}$ luego, por consistencia, $\vec{k}_t + w_{\vec{x}} = 0$. Sin embargo, de la relación de dispersión $w = w(\vec{k})$ y de la regla de la cadena, la relación anterior entre $\vec{k}$ y w provee una ecuación diferencial para $\vec{k}$ en la forma:

$$\vec{k}_t + W(\vec{k})\vec{k}_{\vec{x}} = 0, \tag{1}$$

donde $W(\vec{k}) = w_{\vec{k}}(\vec{k})$.

Para ejemplificar lo hasta ahora expuesto, consideremos los dos siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.1. La ecuación de ondas queda descrita por $L[u] = u_{tt} - c_0^2\nabla^2 u = 0$, donde la sustitución de ondas planas $u(\vec{x}, t) = Ae^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x} - wt\right)}$ produce los dos modos de dispersión $w = \pm c_0 k$. De esta manera $\vec{c} = \frac{w}{||\vec{k}||}\hat{k} = \pm c_0$, esto es, la velocidad de fase coincide con la velocidad de propagación.

Sin embargo, en general $c = c(\vec{k})$, es decir, distintos vectores de número de onda producen distintas velocidades de fase lo cual contribuye a la dispersión de las ondas pues unas crestas o valles se mueven más rápido o más lento con respecto a las otras, como se muestra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2. Consideremos la ecuación de Airy $L[u] = u_t + u_{xxx} = 0$ para obtener, por medio de las ondas planas, la relación de dispersión $w = w(\vec{k}) = -k^3$. De esta forma $c = \frac{w}{k} = -k^2$, esto es, hay ondas con distinto número de onda que dispersan más que otras.

En términos de Fourier, y debido a la superposición de modos, componentes con diferente número de onda dispersan, en una ecuación diferencial parcial evolutiva, a medida que el tiempo avanza. Esto es, superponiendo todos los modos en las ondas planas:

$$u(\vec{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\vec{k})e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-wt\right)}d\vec{k}. \tag{2}$$

Hacemos notar ahora que si $A(\vec{k})$ es una función muy localizada alrededor de cierto número de onda $\vec{k}_0$ tenemos entonces un paquete de ondas. Analizando la integral (2) para este caso, vemos que esta describe a una función $a(\vec{x},t)e^{i\left(\vec{k}_0\cdot\vec{x}-wt\right)}$, donde ahora $a(\vec{x},t)$ es una función que varía lentamente en $\vec{x}$ y viaja con la velocidad de grupo del paquete de ondas $c_g(\vec{k}_0)$, tal como se describe también un poco más adelante.

De esta manera, la ecuación de onda no dispersa mientras que la ecuación de Airy sí lo hace pues diferentes componentes viajan a diferentes velocidades, por lo que la solución general (2) para una EDP lineal necesariamente dispersa cuando se tiene una relación no trivial $w=w(\vec{k})$, tal como se ve que ocurre en la ecuación de Airy.

Hasta ahora hemos sido capaces de describir en detalle la evolución de cada componente senosoidal individual de las ondas solución en las ecuaciones lineales. Una característica global de las ondas es que se pueden agrupar en paquetes, debido a los distintos modos de oscilación que las componen. La velocidad de tales paquetes de ondas (vistas globalmente como una onda senosoidal envolvente) queda definida por $c_g=\frac{dw}{dk}$, para la relación de dispersión $w=w(k)$. En general se satisface que $c_g\leq c$, además c_g corresponde a la velocidad de propagación de la energía asociada a la ecuación diferencial.

3. Aproximación variacional

La aproximación variacional se desarrolló inicialmente para describir un tren de ondas no lineales y está basado en el principio de mínima acción de Halmilton para el funcional $L(u,u_t,u_{x_j})$, descrito por el Lagrangiano asociado a la ecuación diferencial parcial en cuestión. El principio variacional establece que:

$$\delta J[u]=\delta\int\int_R L(u,u_t,u_{x_j})dtdx=0, \tag{3}$$

esto es, que la integral de acción $J[u]$ sobre cualquier región finita R es estacionaria en $u=u(\vec{x},t)$ suficientemente suave en $\vec{x}$ y t. El teorema fundamental del cálculo de variaciones establece que la variación (3) equivale a las ecuaciones de Euler-Lagrange [11]:

$$\frac{\partial}{\partial t}L_{u_t} + \frac{\partial}{\partial x_j}L_{u_{x_j}} - L_u = 0. \tag{4}$$

El resultado anterior se puede extender para cuando el funcional L depende de derivadas más altas de $u(\vec{x},t)$. Por ejemplo, si $L = L\left(u, u_t, u_{x_j}, u_{tt}, u_{t,x_j}, u_{x_j,x_k}, \dots\right)$ el teorema del cálculo de variaciones establece ahora las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$L_u - \frac{\partial}{\partial t}L_{u_t} - \frac{\partial}{\partial x_j}L_{u_{x_j}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}L_{u_{tt}} + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_j}L_{u_{t,x_j}} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}L_{u_{x_j,x_k}} + \dots = 0. \tag{5}$$

La ecuación (4) o (5) representa una ecuación diferencial parcial para $u(\vec{x},t)$, por lo que el principio variacional (3) traslada el problema de encontrar la solución de tal ecuación diferencial parcial al de encontrar los valores estacionarios correspondientes. En la práctica suele ser complicado encontrar un principio variacional a una ecuación diferencial parcial dada.

Para clarificar ideas de lo que podemos hacer con el principio variacional, estudiemos la evolución de un tren de ondas senosoidales en la forma $u = a(x,t)\cos(\theta(x,t)+\eta)$, las cuales varían lentamente en a, θ y η, para la ecuación lineal de Klein-Gordon $u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u = 0$. De la sección anterior, podemos calcular la relación de dispersión en la forma: $w = \pm\sqrt{\alpha^2 k^2 + \beta^2}$. Además, se puede ver que el Lagrangiano asociado resulta ser $L = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 u_x^2 - \frac{1}{2}\beta^2 u^2$.

Al intentar reemplazar u en L vemos que $u_t^2 = a^2\left(\theta_t + \eta_t\right)^2 \operatorname{sen}^2(\theta + \eta) + \dots$ y $u_x^2 = a^2\left(\theta_x + \eta_x\right)^2 \operatorname{sen}^2(\theta+\eta) + \dots$ Debido a la variación lenta de los parámetros de onda y a que $-\theta_t = w$ y $\theta_x = k$, encontramos que $u_t^2 \approx a^2 w^2 \operatorname{sen}^2(\theta+\eta)$ y $u_x^2 \approx a^2 k^2 \operatorname{sen}^2(\theta+\eta)$. De esta manera $L = \frac{1}{2}\left(w^2 - \alpha^2 k^2 - \beta^2\right) a^2 \operatorname{sen}^2(\theta+\eta)$. Promediamos ahora sobre un ciclo de oscilación para obtener el Lagrangiano *promediado*:

$$\bar{L} = \int_0^{2\pi} L d\theta = \frac{1}{4}\left(w^2 - \alpha^2 k^2 - \beta^2\right) a^2. \tag{6}$$

La relación anterior nos da la variación promedio del Lagrangiano L en términos de los parámetros de onda. Ahora, proponemos el principio variacional promediado $\delta \int\int \bar{L}\left(-\theta_t, \theta_x, a\right) dtdx$, donde, como antes,

$-\theta_t = w$ y $\theta_x = k$. Las variaciones en los parámetros proveen las ecuaciones:

$$\delta a : \bar{L}_a = 0, \tag{7}$$

$$\delta\theta : \frac{\partial}{\partial t}\bar{L}_w - \frac{\partial}{\partial x}\bar{L}_k = 0. \tag{8}$$

Esta última identidad provee la condición de solubilidad para el parámetro θ. Por otro lado, de la ecuación (7) se encuentra precisamente la relación de dispersión $w^2 - \alpha^2 k^2 - \beta^2 = 0$, de esta manera podemos decir que el Lagrangiano promediado se puede reescribir en la forma: $\bar{L} = G(w,k)\,a^2$. Esto último es un fenómeno característico de los sistemas lineales, esto es, que el Lagrangiano promediado $\bar{L}$ es proporcional al cuadrado de la amplitud a. Concluimos pues que para el caso lineal reducido el análisis variacional recupera la información que se obtiene por el análisis de las ondas planas. Esto último ya no ocurre en el caso no lineal, por lo que se requiere de otro tipo de análisis además del variacional, tal como el que se describe en la siguiente sección.

4. La teoría de modulaciones

El efecto fundamental en los sistemas dispersivos no lineales es que las ondas senosoidales dejan de ser solución en dichos sistemas y que la frecuencia de oscilación ya no solo depende del número de onda k sino también de la amplitud de oscilación a, esto es, de acuerdo a lo anteriormente expuesto, $w = w(k,a)$. Aunado a esto, se deja de satisfacer el principio de superposición, el cual permitía generar trenes de onda arbitrarios. Sin embargo, la teoría de modulaciones, que a continuación describiremos, con ayuda de la aproximación variacional, permitirá estudiar directamente el caso dispersivo no lineal.

Uno de los intereses principales en los sistemas no lineales es la posibilidad de que los términos no lineales puedan balancear los efectos dispersivos para que se puedan formar ondas viajeras solitarias que viajen a velocidad constante sin cambiar de forma. En el caso específico en el que además la interacción entre ondas solitarias del mismo tipo sea elástica se le conoce ampliamente en la literatura como solitones (ver por ejemplo [1]). Hay una vasta cantidad de aplicaciones en los que este tipo de ondas tiene lugar [10].

Para clarificar ideas acerca de la teoría de modulaciones, consideremos un modelo para la propagación de dislocaciones en un medio material descritas por la EDP no lineal $u_{tt} - u_{xx} + \alpha u - \beta u^3 = 0$, la cual es conocida en la literatura como el modelo ϕ^4, donde $u = u(x,t)$

es el desplazamiento relativo de la dislocación en la posición x al tiempo t [5]. Buscamos ahora ondas viajeras de la forma $u = f(\theta)$, para $\theta = kx - wt = k\left(x - \frac{w}{k}t\right)$. Reemplazando en la ecuación ϕ^4 se obtiene la ecuación ordinaria $\left(w^2 - k^2\right) f'' + \alpha f - \beta f^3 = 0$. Integrando una vez se obtiene:

$$\frac{1}{2}\left(w^2 - k^2\right) f'^2 + \frac{\alpha}{2} f^2 - \frac{\beta}{4} f^4 = A, \tag{9}$$

donde A es una constante que esta relacionada con la amplitud, de hecho en el caso lineal reducido, $\beta = 0$, $A = \frac{\alpha}{2}a^2$ se alcanza en $f' = 0$, $f = a$. Finalmente, separando las variables e integrando se llega a que:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(w^2 - k^2\right)} \int \frac{df}{\sqrt{A - \frac{\alpha}{2}f^2 + \frac{\beta}{4}f^4}} = \theta - \theta_0, \tag{10}$$

para la constante θ_0.

La integral anterior en el caso general, $\beta \neq 0$, da lugar a las funciones cnoidales y en el caso lineal, $\beta = 0$, se recupera la solución senosoidal $f = a \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{w^2 - k^2}}(\theta - \theta_0)\right)$. En el caso no lineal el constante A no se cancela en (10) dando lugar a la dependencia, en la relación de dispersión, en la amplitud de oscilación a. De esta manera, el término no lineal se puede interpretar que perturba a los modos lineales de oscilación, en la forma: $f = a \operatorname{sen}\theta - \frac{\beta}{32}a^3 \operatorname{sen} 3\theta + \ldots$ para la relación de dispersión $w^2 - k^2 = \alpha - \frac{3\beta}{4}a^2 + \ldots$ y $A = \frac{\alpha}{2}a^2 - \frac{9}{32}\beta a^4 + \ldots$ Así, el término no lineal tiene chance de balancear a la dispersión, cuando esto ocurre la teoría de modulaciones toma una forma más específica.

4.1 Análisis modulacional completo

En la teoría de modulaciones completa de Whitham debemos de suponer que la ecuación de movimiento (en el medio continuo o discreto, según sea el caso) posee una familia de soluciones, llamada función de prueba o ansatz (del alemán ansätz), dependientes de una familia de parámetros, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, que varían lentamente. Esto es, suponemos que $u = u(x,t) = U(x - \xi(t), t, \mathbf{a}(t))$ con $d\mathbf{a}/dt = \dot{\mathbf{a}} \ll 1$.

La teoría de modulaciones desarrollada por Whitham reduce a la aproximación de variables colectivas para cuando se desprecia el acoplamiento entre la estructura coherente (onda viajera localizada) y su radiación lineal emitida. Esta aproximación de variables colectivas provee a primer orden los mismos resultados que la teoría de modulaciones y ha sido empleada ampliamente por diferentes autores en diferentes contextos [19], [18], [6], [7], [2]. Sin embargo, en algunos casos es importante considerar aproximaciones a órdenes más altos para poder obtener interacciones apropiadas entre los parámetros de onda de la

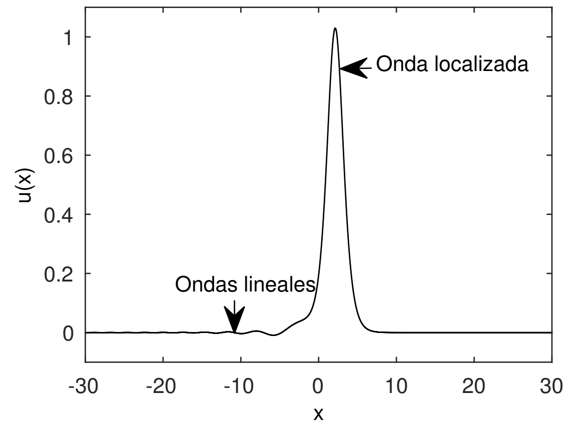

Figura 2. *Perfil de onda localizada típica exhibiendo radiación lineal dispersada en forma de ondas lineales para un medio continuo.*

función de prueba. En la mayoría de las situaciones la radiación lineal en la teoría de modulaciones provee un término de amortiguamiento en las ecuaciones para los parámetros de onda. Sustituimos ahora la función de prueba $u = U(x - \xi(t), t, \mathbf{a})$ en el Lagrangiano que aparece en la relación (3) para obtener:

$$\overline{L} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} L\left(t, U(x,t,\mathbf{a}), U_x(x,t,\mathbf{a}), U_t(x,t,\mathbf{a})\right) dx$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} F\left(t, \dot{\xi}, \mathbf{a}\right) dt, \quad (11)$$

donde el término funcional

$$F\left(t, \dot{\xi}, \mathbf{a}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} L\left(t, U(x,t,\mathbf{a}), U_x(x,t,\mathbf{a})\right) dx$$

provee el promedio espacial del Lagrangiano L.

Después de promediar el Lagrangiano debemos de tomar la variación total $\delta L = 0$, como se especifica en (3), para obtener ecuaciones diferenciales ordinarias para los parámetros que describen a la función de prueba. Estas ecuaciones diferenciales ordinarias corresponden a las ecuaciones de Euler-Lagrange para los parámetros ξ y $\mathbf{a}$ de la función de prueba.

En general, sin embargo, habrá pérdidas de radiación debido a que las soluciones, si las hay, sean integrables o exactas, no coinciden totalmente con las propuestas en la función de prueba. La figura 2 muestra un perfil de onda típico que radía ondas lineales en un medio continuo. Las pérdidas de radiación deben considerarse usando leyes de conservación que balanceen a las cantidades conservadas debidas a la interacción entre las ondas localizadas y la radiación lineal emitida por este. De esta manera debemos incluir la radiación dispersada para obtener relaciones cerradas (completas) para los parámetros de onda [12], [13], [17].

La idea general en este último punto es considerar una cantidad conservada por el Lagrangiano, por ejemplo, la energía total del sistema $E(u, \dot{u})$ y la energía promedio $\overline{E}\left(\xi, \mathbf{a}, \dot{\xi}, \dot{\mathbf{a}}\right)$. Usamos entonces la ley de conservación para el Lagrangiano:

$$\frac{d}{dt}E\left(u, \dot{u}\right) = \frac{d}{dt}E_c\left(u, \dot{u}\right) + \frac{d}{dt}E_r\left(u, \dot{u}\right), \tag{12}$$

donde E_c es la energía de la onda localizada principal y E_r es la energía cuantificada en las ondas lineales dispersadas. Usamos ahora que $E_c\left(u, \dot{u}\right) = \overline{E}\left(\xi, \mathbf{a}, \dot{\xi}, \dot{\mathbf{a}}\right)$ y la cantidad

$$F = \frac{d}{dt}E_r\left(u, \dot{u}\right), \tag{13}$$

correspondiente al flujo de energía transferido entre la estructura coherente y la radiación lineal. Para cerrar las ecuaciones se requiere, finalmente, calcular F. En un sistema mecánico, F está dado por una forma cuadrática correspondiente a un potencial disipado o absorbido en la frontera entre la estructura coherente y la radiación. Sin embargo, para calcular F necesitamos conocer el valor de la radiación en la frontera y entonces resolver las ecuaciones de movimiento para las ondas dispersadas. La condición de frontera se determina usando balances globales de energía y un acoplamiento detallado entre la estructura coherente y la radiación. En principio siempre es posible desarrollar el análisis previo en la aproximación variacional. Es, sin embargo, una cuestión muy dificíl encontrar perfiles de onda y resolver las ecuaciones lineales para las ondas radiadas porque el perfil coherente de onda se debe acoplar a las ondas dispersadas en dominios movibles (véase figura 2).

La propuesta del método modulacional desarrollada por G. B. Whitham a finales de los 60s del siglo pasado fue seguida por los desarrollos que llevaron a un periodo de varias décadas de un avance casi exponencial en el campo de las ondas no lineales. Hacemos notar en especial el descubrimiento de las ecuaciones de ondas dispersivas no lineales integrables por medio del método de la dispersión inversa, desarrollada también hacia finales de los 60s y principios de los 70s, y que fue uno de los puntos de partida para muchos de los avances en la teoría de modulaciones.

Este gran desarrollo se ha observado en todo el campo de las ecuaciones diferenciales no lineales, tanto en medios discretos como continuos, y en la dinámica no lineal. Sin embargo, a pesar del desarrollo de diversos métodos alternativos, tanto analítico-teóricos como numéricos, y a una mayor especialización, el método variacional de Whitham sigue siendo una herramienta muy útil, especialmente cuando se busca una predicción analítica a un problema científico que involucre dispersión no lineal de ondas. Además, existen problemas como las ondas de choque dispersivas, ver por ejemplo [9], en donde el método de modulaciones parece ser la única herramienta general disponible. Esto ha sido apreciado por una nueva generación de investigadores que han hecho algunos nuevos avances técnicos en la teoría de modulaciones. El método, pues, parece especialmente útil en problemas de estados transientes, o la aparente superposición de soluciones especiales, en donde no podemos a priori identificar los mecánismos y en donde no podemos calcular un objeto dinámico que corresponde a una estructura especial de nuestro interés.

Conclusiones

El profesor Minzoni estuvo muy interesado en el desarrollo de técnicas aproximativas (ver, por ejemplo, [15]), y las ventajas que él veía en el método modulacional están muy relacionadas con su visión de la ciencia, en particular de las matemáticas. Visión que cultivó en su entorno científico-matemático y en su experiencia desde sus años formativos. El Dr. Minzoni estudió desde la UNAM no solo matemáticas sino también la física y las ciencias biológicas. En Caltech él estuvo en un ambiente en donde las matemáticas se utilizan en gran medida para plantear y resolver problemas científicos y tecnológicos. Él conoció científicos de la talla de Feynman, quienes usaron su talento matemático para encontrar argumentos plausibles que llevan a una predicción científica cuantitativa. Tuvo además un contacto directo con exponentes de larga tradición en la invención matemática motivada por problemas de la ciencia.

Los métodos de modulación que Whitham introdujo en el estudio de las ondas no lineales dispersivas permiten obtener resultados analíticos aproximados en diversos problemas, y el profesor Minzoni contribuyó en su desarrollo y aplicaciones. Dichos métodos aproximativos se pueden justificar rigurosamente la mayoría de las veces, o son la parte más difícil en una demostración. En otros problemas se han sustituido por técnicas más precisas. El Dr. Minzoni insistió mucho en su desarrollo por la flexibilidad que pueden ofrecer. Además, en muchos tuvo un mayor interés en poder ofrecer predicciones cuantitativas y explicaciones plausibles más que demostraciones. Él era una persona que por convicción, es decir su gran interés por la ciencia, quería usar las matemáticas en problemas de otras áreas de la ciencia. En algunos de sus proyectos logró usar argumentos analíticos para poder calcular cantidades medibles en el laboratorio. Esto último fue muy apreciado por experimentalistas y otros científicos con quienes colaboró, por ejemplo el grupo de Gaetano Assanto de la Universidad de Roma «Roma Tre» y el Dr. Enrique Geffroy del IIM de la UNAM.

La teoría de modulaciones, como vimos, provee de una descripción cuasi analítica de soluciones a problemas donde son considerados los efectos no lineales y en donde técnicas analíticas no existen o dejan de funcionar, esto debido a la no integrabilidad o a la dificultad de tratar directamente a la ecuación diferencial en cuestión. Como discutimos en el texto, la variación lenta de los parámetros de onda para los perfiles de prueba puede permitir genéricamente un análisis de la teoría de modulaciones desde el punto de vista de la teoría de perturbación singular. A esto último se refería, me parece, el profesor Minzoni cuando me comentó que la teoría de modulaciones es uno de los pocos mecanismos disponibles para tratar a los sistemas evolutivos no lineales.

Agradecimientos: Agradezco los valiosos comentarios de los revisores, muy especialmente al profesor Panayotis Panayotaros del IIMAS-UNAM por sus certeras observaciones y comentarios que ayudaron a completar el presente trabajo.

Bibliografía

[1] M. J. Ablowitz y P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, Cambridge university press, 1991.

[2] A. B. Aceves, L. A. Cisneros-Ake y A. A. Minzoni, «Asymptotics for supersonic traveling waves in the Morse lattice», *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, vol. 4, núm. 5, 2011, 975–994.

[3] G. Assanto, ed., *Nematicons: Spatial optical solitons in Nematic Liquid Crystals*, John Willey, 2012.

[4] M. Booty, R. Haberman y A. Minzoni, «The accommodation of traveling waves of Fisher's type to the dynamics of the leading tail», *SIAM Journal of Applied Mathematics*, vol. 53, núm. 4, 1993, 1009–1025.

[5] O. M. Braun y Y. S. Kivshar, *The Frenkel-Kontorova model: Concepts, method and applications*, Springer-Verlag, 2004.

[6] L. A. Cisneros y A. A. Minzoni, «Asymptotics for kink propagation in the discrete Sine-Gordon equation», *Physica D*, vol. 237, 2008, 50.

[7] ______, «Asymptotics for supersonic soliton propagation in the Toda lattice equation», *Studies in Applied Mathematics*, vol. 120:333, 2008, 333–349.

[8] L. A. Cisneros-Ake y A. A. Minzoni, «Effect of hydrogen bound anharmonicity on supersonic discrete Davydov propagation», *Phys. Rev. E*, vol. 85, 2012, 021925.

[9] G. El y N. Smyth, «Radiating dispersive shock waves in nonlocal optical media», *Proc. R. Soc. A*, 2016, , to appear.

[10] A. T. Filippov, *The versatile soliton*, Birkhauser, 2010.

[11] I. Gelfand y S. Fomin, *Calculus of variations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1963.
[12] W. L. Kath y N. F. Smyth, «Soliton evolution and radiation loss for the Korteweg-de Vries equation», *Phys. Rev. E*, vol. 51, 1995, 661.
[13] ———, «Soliton evolution and radiation loss for the nonlinear Schrodinger equation», *Phys. Rev. E*, vol. 51, 1995, 1484.
[14] A. Minzoni, « Nonlinear edge waves and shallow water theory», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 74, 1976, 369–374.
[15] ———, «A review of some recent results in the perturbation theory for solitary waves», *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, vol. 3, núm. 3, 1997, 1–49.
[16] A. Minzoni y G. Whitham, «On the excitation of edge waves on beaches», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 79 part. 2, 1977, 273–287.
[17] N. F. Smyth y A. L. Worthy, «Soliton evolution and radiation loss for the sine-Gordon equation», *Phys. Rev. E*, vol. 60, 1999, 2330.
[18] H. Susanto y P. C. Matthews, «Variational approximations to homoclinic snaking», *Phys. Rev E*, 2011, 035201.
[19] M. Syafwan, H. Susanto, S. M. Cox y B. A. Malomed, «Variational approximations for travelling solitons in a discrete nonlinear Schrodinger equation», *J. Phys. A: Math. Theor*, vol. 45, 2012, 075207.
[20] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, A Wiley-Interscience series of texts, monographs and tracts, 1999.