EL TEOREMA DE VINOGRADOV SOBRE LA CONJETURA DE GOLDBACH

§1. Introducción.

La conjetura de que todo entero impar mayor o igual que 9 es la suma de tres números primos se conoce como la conjetura ternaria de Goldbach o la conjetura débil de Goldbach. En 1937, I.M. Vinogradov probó que todo número entero impar suficientemente grande se puede representar como la suma de tres números primos. En el 2002 Ming-Chit Liu y Tianze Wang probaron que un entero impar mayor que 10^{1347} es suma de tres primos. Por otro lado, J. Richstein ha verificado que la conjetura ternaria de Goldbach se cumple para todo número entero impar mayor que 4×10^{14}.

§2. Los Arcos Mayores y Menores.

Sea $\alpha \in \mathbf{R}$ y sea N un número natural. Sea

$$F(\alpha) \;=\; \sum_{p\leq N} e(p\alpha)\log p \qquad \text{en donde} \qquad e(x) := e^{2\pi i x}.$$

Se cumple entonces que

$$R(N) \;:=\; \int_0^1 F^3(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha \;\;=\; \sum_{p_1+p_2+p_3=N} \log p_1 \log p_2 \log p_3 .$$

Queremos probar que

$$R(N) \;>\; 0$$

se cumple para todo N suficientemente grande. Para este fin, se divide la integral que define a $R(N)$ en dos partes

$$R(N) \;=\; \left\{ \int_{\mathrm{M}} + \int_{\mathrm{m}} \right\} F^3(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha$$

en donde M es el así llamado conjunto de arcos mayores y m el conjunto de arcos menores, que definimos a continuación. Sea $B > 0$ y sea

$$Q \;=\; \log^B N.$$

Sea $1 \leq q \leq Q$ y sea $0 \leq a \leq q$ tal que $(a, q) = 1$. Sea

$$\mathrm{M}(q,a) \;=\; \left\{ \alpha \in [0,1] \;:\; \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{Q}{N} \right\}.$$

Lema 1. *Los arcos mayores* $\mathrm{M}(q,a)$ *son disjuntos dos a dos siempre que* N *sea suficientemente grande.*

Demostración. Supongamos que

$$\alpha \in \mathrm{M}(q,a) \cap \mathrm{M}(q',a') \qquad \text{y que} \qquad \frac{a}{q} \neq \frac{a'}{q'}.$$

Entonces $1 \leq |aq' - a'q|$ y por lo tanto

$$\frac{1}{Q^2} \;\leq\; \frac{1}{qq'} \;=\; \frac{|aq' - a'q|}{qq'} \;=\; \left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right| \leq \left|\frac{a}{q} - \alpha\right| + \left|\alpha - \frac{a'}{q'}\right| \;\leq\; \frac{2Q}{N}.$$

Por lo tanto

$$N \;\leq\; 2Q^3 \;=\; 2\big(\log N\big)^{3B},$$

lo cual es imposible siempre que n sea suficientemente grande. ∎

Definición 2. El conjunto de arcos mayores es

$$\mathrm{M} \;=\; \bigcup_{q=1}^{Q} \;\bigcup_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q} \mathrm{M}(q,a) \;\subset\; [0,1].$$

El conjunto de arcos menores es

$$\mathrm{m} \;=\; [0,1] \setminus \mathrm{M}. \;\square$$

Ejercicio 3. Demuestre que la medida de Lebesgue del conjunto M de arcos mayores tiende a cero cuando $N \to \infty$.

§3. La Integral Sobre los Arcos Mayores.

A continuación estudiamos la integral que define a $R(N)$ sobre el conjunto M de arcos mayores. Será necesario información sobre la distribución de los números primos en las progresiones aritméticas.

Teorema 4. (Siegel-Walfisz). *Sea $q \geq 1$ y $(a,q) = 1$. Sea $C > 0$. Entonces*

$$\vartheta(x;q,a) \;:=\; \sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv a\ (q)}} \log p \;=\; \frac{x}{\varphi(q)} + O\big(\frac{x}{\log^C x}\big)$$

para $x \geq 2$ y $q \leq (\log x)^B$. En particular, la constante implicada depende sólo de C.

Teorema 5. *La suma de Ramanujan*

$$c_q(N) \;:=\; \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e\big(\frac{N}{q}a\big)$$

es una función multiplicativa de q, esto es,

$$(q,q')=1 \qquad \text{implica} \qquad c_{qq'}(N) \;=\; c_q(N)\,c_{q'}(N).$$

Teorema 6. *Para las sumas de Ramanujan se cumple que*

$$c_q(N) \;=\; \sum_{d|(q,N)} \mu\big(\frac{q}{d}\big)d$$

en donde μ es la función de Möbius. En particular

$$(q,N)=1 \qquad \text{implica} \qquad c_q(N)=\mu(q).$$

Lema 7. *Sea*

$$F_x(\alpha) \;=\; \sum_{p\le x} e(p\alpha)\log p.$$

Sean B y C números reales positivos. Si $1 \le q \le Q = \log^B N$ y $(a,q)=1$, entonces

$$F_x\big(\frac{a}{q}\big) \;=\; \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}x + O\big(\frac{QN}{\log^C N}\big)$$

para cada $1\le x\le N$. La constante implicada depende sólo de B y C.

Demostración. Sea $p\equiv r$ módulo q. Entonces $p|q$ si y sólo si $(r,q)>1$. Por lo tanto

$$\sum_{\substack{r=1\\(r,q)>1}}^{q} \sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv r\ (q)}} e\big(\frac{p}{q}a\big)\log p \;=\; \sum_{\substack{p\le x\\ p|q}} e\big(\frac{p}{q}a\big)\log p \ll \sum_{p|q}\log p \;\le\; \log q.$$

Por lo tanto $F_x\big(\frac{a}{q}\big)$ es igual a

$$\sum_{r=1}^{q} \sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv r\ (q)}} e\big(\frac{p}{q}a\big)\log p \;=\; \sum_{\substack{r=1\\ (r,q)=1}}^{q} \sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv r\ (q)}} e\big(\frac{p}{q}a\big)\log p + O(\log q).$$

Si $p \equiv r$ módulo q, entonces $e(pa/q) = e(ra/q)$ y para $F_x\big(a/q\big)$ se obtiene

$$\sum_{\substack{r=1\\ (r,q)=1}}^{q} e\big(\frac{r}{q}a\big) \sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv r\ (q)}} \log p + O(\log Q) \;=\; \sum_{\substack{r=1\\ (r,q)=1}}^{q} e\big(\frac{r}{q}a\big)\,\vartheta(x;q,r) + O(\log Q).$$

Puesto que $c_q(a) = \mu(q)$ siempre que $(a,q) = 1$ vemos entonces que $F_x\big(a/q\big)$ es igual a

$$\sum_{\substack{r=1\\ (r,q)=1}}^{q} e\big(\frac{r}{q}a\big)\Big\{\frac{x}{\varphi(q)} + O\big(\frac{x}{\log^C x}\big)\Big\} + O(\log Q) \;=\; \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} + O\big(\frac{QN}{\log^C N}\big). \;\blacksquare$$

Lema 8. *Sea*

$$u(\beta) \;=\; \sum_{m=1}^{N} e(m\beta).$$

Entonces

$$J(N) \;:=\; \int_{-1/2}^{+1/2} u^3(\beta)\, e(-N\beta)\, d\beta \;=\; \frac{N^2}{2} + O(N).$$

Demostración. Es claro que $J(N)$ es el número de representaciones de N como la suma de tres números naturales. Por lo tanto

$$J(N) \;=\; \frac{1}{2}(N-1)(N-2). \;\blacksquare$$

Lema 9. *Sean B y C dos números reales positivos tales que $C > 2B$. Si*

$$\alpha \in \mathrm{M}(q,a) \qquad y \qquad \beta = \alpha - \frac{a}{q}, \tag{10}$$

entonces

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} u(\beta) + O\Big(\frac{Q^2 N}{\log^C N}\Big), \\ F^3(\alpha) &= \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} u^3(\beta) + O\Big(\frac{Q^2 N^3}{\log^C N}\Big) \end{aligned}$$

en donde las constantes implicadas dependen sólo de B y C.

Demostración. Si β es como en (10), entonces $|\beta| \le Q/N$. Sea

$$\lambda(m) = \begin{cases} \log p & \text{si } m = p \text{ y } p \text{ es primo} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} F(\alpha) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} u(\beta) &= \sum_{p \le N} e(p\alpha) \log p - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{m=1}^{N} e(m\beta) \\ &= \sum_{m=1}^{N} \lambda(m) e(m\alpha) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{m=1}^{N} e(m\beta) \\ &= \sum_{m=1}^{N} \lambda(m) e\Big(\frac{m}{q} a + m\beta\Big) - \sum_{m=1}^{N} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} e(m\beta) \\ &= \sum_{m=1}^{N} \Big\{ \lambda(m) e\Big(\frac{m}{q} a\Big) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \Big\} e(m\beta). \end{aligned}$$

Si $1 \le x \le N$, entonces

$$
\begin{aligned}
A(x) \; :&= \sum_{m\le x} \Big\{ \lambda(m)\, e\big(\frac{m}{q}a\big) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \Big\} \\
&= \sum_{m\le x} \lambda(m)\, e\big(\frac{m}{q}a\big) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}x + O\big(\frac{1}{\varphi(q)}\big) \\
&= F_x\big(\frac{a}{q}\big) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}x + O(1) \\
&\ll \frac{QN}{\log^C N}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
F(\alpha) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} u(\beta) \; &= \int_{1^-}^{N} e(\beta x)\, dA(x) \\
&= A(N)\, e(N\beta) - 2\pi i \beta \int_1^N A(x)\, e(x\beta)\, dx \\
&\ll |A(N)| + |\beta| N \max\big\{ |A(x)| \; : \; 1 \le x \le N \big\} \; \ll \; \frac{Q^2 N}{\log^C N}.
\end{aligned}
$$

Es claro que $|u(\beta)| \le N$. Puesto que $C > 2B$, entonces

$$
\frac{Q^2 N}{\log^C N} \; = \; \frac{N}{\big(\log N\big)^{C-2B}} \; < \; N.
$$

La estimación para $F^3(\alpha)$ se sigue ahora fácilmente. ∎

Definición 11. La serie infinita

$$
\mathrm{G}(N) \; = \; \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\, c_q(N)
$$

se llama la serie singular para el problema de Goldbach. □

Teorema 12. *Para la serie singular, se cumple que*

$$\mathrm{G}(N) \;=\; \prod_{p \nmid N}\Big(1+\frac{1}{(p-1)^3}\Big)\prod_{p|N}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big).$$

Por lo tanto, existen dos constantes positivas c_1 y c_2 tales que

$$c_1 \;<\; \mathrm{G}(N) \;<\; c_2$$

para cada $N \in \mathbf{N}$ impar. Por último, para $Q = \log^B N$ y cada $\epsilon > 0$,

$$\mathrm{G}(N,Q) \;:=\; \sum_{q \leq Q} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} c_q(N) \;=\; \mathrm{G}(N) + O\big(\frac{1}{Q^{1-\epsilon}}\big)$$

en donde la constante implicada depende sólo de ϵ.

Demostración. Es claro que $c_q(N) \ll \varphi(q)$. Puesto que $q^{1-\epsilon} < \varphi(q)$ para cada $\epsilon > 0$ y q suficientemente grande, entonces

$$\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\, c_q(N) \;\ll\; \frac{1}{\varphi^2(q)} \;\ll\; \frac{1}{q^{2-\epsilon}}.$$

Por lo tanto, la serie singular converge absoluta y uniformemente en N. Además

$$\mathrm{G}(N) - \mathrm{G}(N,Q) \;\ll\; \sum_{q>Q} \frac{1}{q^{2-\epsilon}} \;\ll\; \frac{1}{Q^{1-\epsilon}}.$$

Es fácil ver que

$$c_p(N) \;=\; \begin{cases} p-1 & \text{si } p|N, \\ -1 & \text{si } p \nmid N. \end{cases}$$

Puesto que $c_q(N)$ multiplicativa en q, entonces

$$\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\,c_q(N)$$

también es una función multiplicativa en q. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(N) &= \prod_p \Big(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mu(p^j)}{\varphi^3(p^j)}\,c_{p^j}(N)\Big) = \prod_p \Big(1-\frac{c_p(N)}{\varphi^3(p)}\Big) \\ &= \prod_{p\nmid N}\Big(1+\frac{1}{\big(p-1\big)^3}\Big)\prod_{p|N}\Big(1-\frac{1}{\big(p-1\big)^2}\Big). \ \blacksquare\end{aligned}$$

Ejercicio 13. Pruebe que se puede tomar $c_1 = 1$ en el teorema anterior.

Teorema 14. *Para cualesquiera números reales positivos B, C y ϵ tales que $C > 5B$, se cumple que*

$$\begin{aligned}&\int_{\mathrm{M}} F^3(\alpha)e(-N\alpha)\,d\alpha \\ &\qquad = \mathrm{G}(N)\frac{N^2}{2}+O\Big\{\frac{N^2}{\big(\log N\big)^{(1-\epsilon)B}}\Big\}+O\Big\{\frac{N^2}{\big(\log N\big)^{C-5B}}\Big\}\end{aligned}$$

en donde las constantes implicadas dependen sólo de B, C y ϵ.

Lema 15. *Para cada número real α y enteros $A < B$, se cumple que*

$$\sum_{n=A+1}^{B} e(\alpha n) \ll \min\Big\{|B-A|\,,\,\frac{1}{\|\,\alpha\,\|}\Big\}$$

en donde $\| \alpha \| = \min\big\{|\alpha - m| \, : \, m \in \mathbf{Z}\big\}$.

Demostración. Puesto que $|e(\alpha n)| = 1$ para cada entero n, entonces

$$\Big|\sum_{n=A+1}^{B} e(\alpha n)\Big| \;\leq\; \sum_{n=A+1}^{B} 1 \;=\; B - A.$$

Si $\alpha \notin \mathbf{Z}$, entonces $\| \alpha \| > 0$ y $e(\alpha) \neq 1$. Puesto que se trata de una suma geométrica, entonces

$$\Big|\sum_{n=A+1}^{B} e(\alpha n)\Big| \;=\; \left|\frac{e\big(\alpha(B-A)\big) - 1}{e(\alpha) - 1}\right| \;\leq\; \frac{2}{|e(\alpha/2) - e(-\alpha/2)|}$$

$$=\; \frac{1}{\operatorname{sen} \pi\alpha} \;=\; \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi \| \alpha \|)} \;\leq\; \frac{1}{2 \| \alpha \|}. \;\blacksquare$$

Demostración del Teorema 14. La longitud del arco mayor $\mathrm{M}(q,a)$ es Q/N si $q = 1$ y es $2Q/N$ si $q \geq 2$. Por lo tanto

$$\int_{\mathrm{M}} \Big\{F^3(\alpha) - \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} u^3\big(\alpha - \frac{a}{q}\big)\Big\} e(-N\alpha)\, d\alpha$$

$$= \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q} \int_{\mathrm{M}(q,a)} \Big\{F^3(\alpha) - \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} u^3\big(\alpha - \frac{a}{q}\big)\Big\} e(-N\alpha)\, d\alpha$$

$$\ll \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q} \int_{\mathrm{M}(q,a)} \frac{Q^2 N^3}{\log^C N}\, d\alpha$$

$$\ll \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q} \frac{Q^3 N^2}{\log^C N} \;\leq\; \frac{Q^5 N^2}{\log^C N} \;\leq\; \frac{N^2}{\big(\log N\big)^{C-5B}}.$$

Si $\alpha = a/q + \beta \in \mathrm{M}(q,a)$, entonces $|\beta| \leq Q/N$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\sum_{q\leq Q} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \int\limits_{\mathrm{M}(q,a)} u^3\big(\alpha - \frac{a}{q}\big)\, e(-N\alpha)\, d\alpha \\
&= \sum_{q\leq Q} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \int\limits_{\frac{a}{q}-\frac{Q}{N}}^{\frac{a}{q}+\frac{Q}{N}} u^3\big(\alpha - \frac{a}{q}\big)\, e(-N\alpha)\, d\alpha \\
&= \sum_{q\leq Q} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e\big(-\frac{N}{q}a\big) \int\limits_{-Q/N}^{+Q/N} u^3(\beta) e(-N\beta)\, d\beta \\
&= \sum_{q\leq Q} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\, c_q(-N) \int\limits_{-Q/N}^{+Q/N} u^3(\beta) e(-N\beta)\, d\beta \\
&= \mathrm{G}(N,Q) \int\limits_{-Q/N}^{+Q/N} u^3(\beta) e(-N\beta)\, d\beta.
\end{aligned}$$

Por el Lema 15, si $|\beta| \leq 1/2$, entonces

$$u(\beta) \ll \frac{1}{\parallel \beta \parallel}.$$

Por lo tanto

$$\int\limits_{\frac{Q}{N}\leq|\beta|\leq\frac{1}{2}} u^3(\beta) e(-N\beta)\, d\beta \ll \int\limits_{Q/N}^{1/2} \frac{d\beta}{\beta^3} \ll \frac{N^2}{Q^2}.$$

Por el Lema 8, obtenemos

$$\int\limits_{-Q/N}^{+Q/N} u^3(\beta) e(-N\beta)\, d\beta = \int\limits_{-1/2}^{+1/2} u^3(\beta) e(-N\beta)\, d\beta + O\big(\frac{N^2}{Q^2}\big)$$

$$= \frac{N^2}{2} + O(N) + O(\frac{N^2}{Q^2}) \ = \ \frac{N^2}{2} + O(\frac{N^2}{Q^2}).$$

Puesto que

$$\mathrm{G}(N,Q) \ = \ \mathrm{G}(N) + O\big(\frac{1}{Q^{1-\epsilon}}\big),$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{M}} F^3(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha \\
&\quad = \ \mathrm{G}(N,Q) \int\limits_{-Q/N}^{+Q/N} u^3(\beta)\, e(-N\beta)\, d\beta + O\Big\{ \frac{N^2}{\big(\log N\big)^{C-5B}} \Big\} \\
&\quad = \ \mathrm{G}(N) \frac{N^2}{2} + O\big(\frac{N^2}{Q^{1-\epsilon}}\big) + O\Big\{ \frac{N^2}{\big(\log N\big)^{C-5B}} \Big\} \\
&\quad = \ \mathrm{G}(N) \frac{N^2}{2} + O\Big\{ \frac{N^2}{\big(\log N\big)^{(1-\epsilon)B}} \Big\} + O\Big\{ \frac{N^2}{\big(\log N\big)^{C-5B}} \Big\}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

§4. Fórmula Asintótica.

Para la estimación de la integral que define a $R(N)$, tomada sobre el conjunto de los arcos menores, será necesario los siguientes resultados.

Teorema 16. (L. Dirichlet). *Sean α y Q dos números reales, $Q \geq 1$. Existen enteros a y q tales que*

$$1 \leq q \leq Q, \qquad\qquad (a,q) = 1$$

y además

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{qQ}.$$

Teorema 17. (I.M. Vinogradov). *Sean a, q enteros primos relativos, tales que $1 \leq a \leq q \leq N$. Sea α tal que*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Entonces se cumple que

$$F(\alpha) \ll \left\{\frac{N}{q^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{4}{5}} + N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}\right\} \log^4 N.$$

La prueba de este teorema la posponemos hasta la sección §5.

Teorema 18. *Sea $B > 0$. Para la integral sobre los arcos menores, se cumple que*

$$\int_{\mathrm{m}} F^3(\alpha) e(-N\alpha)\, d\alpha \ll \frac{N^2}{\big(\log N\big)^{\frac{B}{2}-5}}$$

en donde la constante implicada depende sólo de B.

Demostración. Por el Teorema de Dirichlet existen enteros a, q, primos relativos, con $1 \leq q \leq N/Q$ y tales que

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{Q}{qN} \leq \min\big(\frac{Q}{N}, \frac{1}{q^2}\big).$$

Si $q \leq Q$, entonces $\alpha \in \mathrm{M}(q,a) \subset \mathrm{M}$. Puesto que esto último es falso, entonces

$$Q < q \leq \frac{N}{Q}.$$

Por el Teorema 17,

$$\begin{aligned} F(\alpha) &\ll \Big\{ \frac{N}{q^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{4}{5}} + N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \Big\} \log^4 N \\ &\ll \Big\{ \frac{N}{\big(\log N\big)^{\frac{B}{2}}} + N^{\frac{4}{5}} + \frac{N}{\big(\log N\big)^{\frac{B}{2}}} \Big\} \log^4 N \\ &\ll \frac{N}{\big(\log N\big)^{\frac{B}{2}-4}}. \end{aligned}$$

Puesto que $\vartheta(N) = \sum_{p \leq N} \log p \ll N$, entonces

$$\int_0^1 |F(\alpha)|^2 \, d\alpha \;=\; \sum_{p \leq N} \log^2 p \;\leq\; \log N \sum_{p \leq N} \log p \;\ll\; N \log N.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{m}} |F(\alpha)|^3 \, d\alpha &\ll \sup_{\alpha \in \mathrm{m}} |F(\alpha)| \cdot \int_{\mathrm{m}} |F(\alpha)|^2 \, d\alpha \\ &\ll \frac{N}{\big(\log N\big)^{\frac{B}{2}-4}} \cdot \int_{\mathrm{m}} |F(\alpha)|^2 \, d\alpha \\ &\ll \frac{N^2}{\big(\log N\big)^{\frac{B}{2}-5}}. \;\blacksquare \end{aligned}$$

Podemos ahora enunciar el principal resultado de este capítulo.

Teorema 19. (I.M. Vinogradov). *Sea* $\mathrm{G}(N)$ *la serie singular de la Definición 11. Sea* $A > 0$. *Sea* $N \in \mathbf{N}$ *un número impar. Entonces,*

$$R(N) \;=\; \mathrm{G}(N) \frac{N^2}{2} + O\big(\frac{N^2}{\log^A N}\big)$$

en donde la constante implicada depende sólo de A.

Demostración. Por los Teoremas 14 y 18,

$$R(N) - \mathrm{G}(N)\frac{N^2}{2} \ll \frac{N^2}{\big(\log N\big)^{(1-\epsilon)B}} + \frac{N^2}{\big(\log N\big)^{C-5B}} + \frac{N^2}{\big(\log N\big)^{\frac{B}{2}-5}}$$

en donde la constante implicada depende sólo de B, C y ϵ. El Teorema se sigue al elegir

$$\epsilon = \frac{1}{2}, \qquad B = 2A + 10 \qquad \text{y} \qquad C = A + 5B. \ \blacksquare$$

§5. Los Arcos Menores.

Sólo resta probar el Teorema 17. La prueba se desarrolla en una serie de lemas.

Lema 20. (R.C. Vaughan). *Para $u \geq 1$, sea*

$$M_u(k) = \sum_{\substack{d|k \\ d\leq u}} \mu(d).$$

Sea $\Phi(k,\ell)$ una función aritmética de dos variables. Entonces

$$\sum_{u<\ell\leq N} \Phi(1,\ell) + \sum_{u<k\leq N} \sum_{u<\ell\leq \frac{N}{k}} M_u(k)\Phi(k,\ell)$$

$$= \sum_{d\leq u} \sum_{u<\ell\leq \frac{N}{d}} \sum_{m\leq \frac{N}{\ell d}} \mu(d)\,\Phi(dm,\ell).$$

Demostración. Vamos a evaluar la suma

$$S := \sum_{k=1}^{N} \sum_{u<\ell\leq \frac{N}{k}} M_u(k)\,\Phi(k,\ell)$$

en dos formas distintas. Puesto que $\mu * \mathbf{1} = e$, entonces

$$M_u(k) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } k=1, \\ 0 & \text{si } 1<k\leq u. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$S \;=\; \sum_{u<\ell\leq N} \Phi(1,\ell) \;+\; \sum_{u<k\leq N} \sum_{u<\ell\leq \frac{N}{k}} M_u(k)\Phi(k,\ell).$$

Por otro lado, cambiando el orden de las sumas, y poniendo $k = dm$, se obtiene

$$S \;=\; \sum_{k=1}^{N} \sum_{u<\ell\leq \frac{N}{k}} \sum_{\substack{d\mid k \\ d\leq u}} \mu(d)\,\Phi(k,\ell) \;=\; \sum_{d\leq u} \sum_{\substack{k=1 \\ d\mid k}}^{N} \sum_{u<\ell\leq \frac{N}{k}} \mu(d)\,\Phi(k,\ell)$$

$$= \sum_{d\leq u} \sum_{m\leq \frac{N}{d}} \sum_{u<\ell\leq \frac{N}{dm}} \mu(d)\,\Phi(k,\ell) = \sum_{d\leq u} \sum_{u<\ell\leq \frac{N}{d}} \sum_{m\leq \frac{N}{\ell d}} \mu(d)\,\Phi(k,\ell). \;\blacksquare$$

Lema 21. *Sea Λ la función de von Mangoldt. Para cada número real α, se cumple que*

$$F(\alpha) \;=\; S_1 - S_2 - S_3 + O\big(N^{\frac{1}{2}}\big)$$

en donde

$$S_1 \;=\; \sum_{d\le N^{\frac{2}{5}}} \; \sum_{\ell \le \frac{N}{d}} \; \sum_{m\le \frac{N}{\ell d}} \mu(d)\,\Lambda(\ell)\,e\big(\alpha d\ell m\big)$$

$$S_2 \;=\; \sum_{d\le N^{\frac{2}{5}}} \; \sum_{\ell \le N^{\frac{2}{5}}} \; \sum_{m\le \frac{N}{\ell d}} \mu(d)\,\Lambda(\ell)\,e\big(\alpha d\ell m\big)$$

$$S_3 \;=\; \sum_{k> N^{\frac{2}{5}}} \; \sum_{N^{\frac{2}{5}}<\ell \le \frac{N}{k}} M_{N^{\frac{2}{5}}}(k)\,\Lambda(\ell)\,e\big(\alpha k\ell\big).$$

Demostración. Vamos a aplicar la identidad de Vaughan con

$$u \;=\; N^{\frac{2}{5}} \qquad \text{y} \qquad \Phi(k,\ell) \;=\; \Lambda(\ell)\,e\big(\alpha\,k\,\ell\big).$$

El primer término en la identidad de Vaughan es

$$\begin{aligned}
\sum_{u<\ell\le N} \Phi(1,\ell) \;&=\; \sum_{N^{\frac{2}{5}}<\ell\le N} \Lambda(\ell)\,e\big(\alpha\,\ell\big) \\
&=\; \sum_{\ell=1}^{N} \Lambda(\ell)\,e(\alpha\,\ell) \;-\; \sum_{\ell\le N^{\frac{2}{5}}} \Lambda(\ell)\,e(\alpha\,\ell)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{p\le N} e(\alpha)\log p + \sum_{\substack{p^k\le N\\ k\ge 2}} e\big(\alpha\,p^k\big)\log p + O\big(N^{\frac{2}{5}}\log N\big)$$

$$= \; F(\alpha) + O\Big\{ \sum_{\substack{p^k\le N\\ k\ge 2}} \log p \Big\} + O\big(N^{\frac{1}{2}}\big)$$

$$= F(\alpha) + O\Big\{ \sum_{p^2 \le N} \Big[\frac{\log N}{\log p} \Big] \log p \Big\} + O\big(N^{\frac{1}{2}}\big)$$

$$= F(\alpha) + O\Big\{ \pi\big(N^{\frac{1}{2}}\big) \log N \Big\} + O\big(N^{\frac{1}{2}}\big)$$

$$= F(\alpha) + O\big(N^{\frac{1}{2}}\big).$$

El segundo término en la identidad de Vaughan es

$$\sum_{k > N^{\frac{2}{5}}} \sum_{N^{\frac{2}{5}} < \ell \le \frac{N}{k}} M_{N^{\frac{2}{5}}}(k)\, \Lambda(\ell)\, e\big(\alpha\, k\, \ell\big) \;=\; S_3.$$

El tercer término en la identidad de Vaughan es

$$\sum_{d < N^{\frac{2}{5}}} \sum_{N^{\frac{2}{5}} < \ell \le \frac{N}{d}} \sum_{m \le \frac{N}{\ell d}} \mu(d)\, \Lambda(\ell)\, e\big(\alpha\, d\, \ell m\big)$$

$$= \sum_{d < N^{\frac{2}{5}}} \sum_{\ell \le \frac{N}{d}} \sum_{m \le \frac{N}{\ell d}} \mu(d)\, \Lambda(\ell)\, e\big(\alpha\, d\, \ell m\big)$$

$$- \sum_{d < N^{\frac{2}{5}}} \sum_{\ell \le N^{\frac{2}{5}}} \sum_{m \le \frac{N}{\ell d}} \mu(d)\, \Lambda(\ell)\, e\big(\alpha\, d\, \ell m\big)$$

$$= S_1 - S_2. \quad \blacksquare$$

Ejercicio. Pruebe que

$$\| \, \alpha + \beta \, \| \;\le\; \| \, \alpha \, \| + \| \, \beta \, \|$$

se cumple para cualesquiera números reales α y β.

Lema 23. *Sea α un número real. Sean q y a enteros primos relativos, tales que $q \geq 1$. Suponga que*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Entonces

$$\sum_{1 \leq r \leq \frac{q}{2}} \frac{1}{\| \alpha r \|} \ll q \log q.$$

Demostración. El lema se cumple cuando $q = 0$, ya que la suma en cuestión es igual a cero. Supongamos que $q \geq 0$. Para cada entero r, existen enteros $s(r) \in [0, q/2]$ y $m(r)$ tales que

$$\frac{s(r)}{q} = \| \frac{ar}{q} \| = \pm\big(\frac{ar}{q} - m(r)\big).$$

Puesto que $(a, q) = 1$, entonces $s(r) = 0$ si y sólo si $r \equiv 0 \bmod q$. Por lo tanto $s(r) \in [1, q/2]$ siempre que $r \in [1, q/2]$. Sea

$$\alpha - \frac{a}{q} = \frac{\theta}{q^2} \qquad \text{en donde} \qquad |\theta| \leq 1.$$

Entonces

$$\alpha r = \frac{ar}{q} + \frac{\theta r}{q^2} = \frac{ar}{q} + \frac{\theta'}{2q}$$

en donde $|\theta'| = |2\theta r/q| \leq 1$. Por lo tanto

$$\| \alpha r \| = \| \frac{ar}{q} + \frac{\theta'}{2q} \| = \| m(r) \pm \frac{s(r)}{q} + \frac{\theta'}{2q} \|$$

$$= \| \frac{s(r)}{q} \pm \frac{\theta'}{2q} \| \geq \| \frac{s(r)}{q} \| - \| \frac{\theta'}{2q} \| \geq \frac{s(r)}{q} - \frac{1}{2q}.$$

Sea $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq q/2$. Mostraremos que $s(r_1) = s(r_2)$ si y sólo si $r_1 = r_2$. Supongamos que

$$\parallel \frac{ar_1}{q} \parallel \; = \; \parallel \frac{ar_2}{q} \parallel .$$

Entonces,

$$\pm\Big(\frac{ar_1}{q} - m(r_1)\Big) \;=\; \pm\Big(\frac{ar_2}{q} - m(r_2)\Big)$$

y por lo tanto $ar_1 \equiv \pm ar_2 \mod q$. Puesto que $(a, q) = 1$ entonces $r_1 \equiv \pm r_2 \mod q$. Puesto que $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq q/2$ entonces $r_1 = r_2$. Se sigue entonces que

$$\left\{ \parallel \frac{ar}{q} \parallel \, : \, 1 \leq r \leq \frac{q}{2} \right\} \; = \; \left\{ \frac{s(r)}{q} \, : \, 1 \leq r \leq \frac{q}{2} \right\} \; = \; \left\{ \frac{s}{q} \, : \, 1 \leq s \leq \frac{q}{2} \right\}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{1 \leq r \leq \frac{q}{2}} \frac{1}{\parallel \alpha r \parallel} \;\leq\; \sum_{1 \leq r \leq \frac{q}{2}} \Big(\frac{s(r)}{q} - \frac{1}{2q}\Big)^{-1}$$

$$= \sum_{1 \leq s \leq \frac{q}{2}} \Big(\frac{s}{q} - \frac{1}{2q}\Big)^{-1} \;=\; 2q \sum_{1 \leq s \leq \frac{q}{2}} \frac{1}{2s - 1} \;=\; 2q \sum_{1 \leq s \leq \frac{q}{2}} \frac{1}{s} \;\ll\; q \log q. \quad \blacksquare$$

Lema 24. *Sea α un número real. Suponga que*

$$\Big|\alpha - \frac{a}{q}\Big| \;\leq\; \frac{1}{q^2}$$

en donde $q \geq 1$ y $(a, q) = 1$. Para cualesquiera número real no negativo V y entero no negativo h, se cumple que

$$\sum_{r=1}^{q} \min\Big\{V \, , \; \frac{1}{\parallel \alpha(hq + r) \parallel}\Big\} \;\ll\; V + q \log q.$$

Demostración. Sea

$$\alpha \;=\; \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2} \qquad\qquad \text{con} \qquad\qquad |\theta| \leq 1.$$

Entonces

$$\alpha\big(hq + r\big) \;=\; ah + \frac{ar}{q} + \frac{\theta h}{q} + \frac{\theta r}{q^2}$$

$$=\; ah + \frac{ar}{q} + \frac{[\theta h] + \{\theta h\}}{q} + \frac{\theta r}{q^2} \;=\; ah + \frac{ar + [\theta h] + \delta(r)}{q}$$

en donde

$$-1 \;\leq\; \delta(r) \;=\; \{\theta h\} + \frac{\theta r}{q} \;\leq\; 2.$$

Para cada $r \in [1, q]$, existe un único $r' \in \mathbf{N}$ tal que

$$\{\alpha(hq + r)\} \;=\; \frac{ar + [\theta h] + \delta(r)}{q} - r'.$$

Sea t tal que

$$0 \;\leq\; t \;\leq\; 1 - \frac{1}{q}.$$

Si

$$t \;\leq\; \{\alpha(hq + r)\} \;\leq\; t + \frac{1}{q},$$

entonces

$$qt \;\leq\; ar - qr' + [\theta h] + \delta(r) \;\leq\; qt + 1.$$

Esto implica que

$$ar - qr' \;\leq\; qt - [\theta h] + 1 - \delta(r) \;\leq\; qt - [\theta h] + 2$$

y también que

$$ar - qr' \;\geq\; qt - [\theta h] - \delta(r) \;>\; qt - [\theta h] - 2.$$

Por lo tanto, $ar - qr'$ yace en el intervalo

$$J \;:=\; \big(qt - [\theta h] - 2\,,\; qt - [\theta h] + 2\big].$$

Este intervalo de longitud cuatro, contiene exactamente cuatro enteros distintos. Si $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq q$ y además

$$ar_1 - qr_1' \;=\; ar_2 - qr_2',$$

entonces, $ar_1 \equiv ar_2$ módulo q. Puesto que $(a, q) = 1$, entonces

$$r_1 \equiv r_2 \pmod{q} \qquad\qquad \text{y también} \qquad\qquad r_1 = r_2.$$

Por lo tanto, para cada $t \in [0, (q-1)/q]$, hay a lo más cuatro enteros $r \in [1, q]$ tales que

$$\big\{\alpha(hq + r)\big\} \;\in\; \big[t\,,\, t + \frac{1}{q}\big].$$

Nótese que $\|\, \alpha(hq + r)\, \| \in\, [t\,,\, t + (1/q)]$ si y sólo si

$$\big\{\alpha(hq + r)\big\} \quad \text{o bién} \quad 1 - \big\{\alpha(hq + r)\big\} \quad \text{yacen en} \quad \big[t\,,\, t + \frac{1}{q}\big].$$

La segunda pertenecia, es equivalente a

$$\big\{\alpha(hq + r)\big\} \;\in\; \big[t'\,,\, t' + \frac{1}{q}\big].$$

en donde

$$0 \;\leq\; t' \;=\; 1 - \frac{1}{q} - t \;\leq\; 1 - \frac{1}{q}.$$

Por lo tanto, para cada $t \in [0, (q-1)/q]$, existen a lo más ocho enteros $r \in [1, q]$ tales que

$$\|\, \alpha(hq + r)\, \| \;\in\; \big[t\,,\, t + \frac{1}{q}\big].$$

Para cada $s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, sea $J(s) = [s/q\,,\,(s+1)/q]$. Entonces

$$\| \alpha(hq+r) \| \in J(s)$$

se cumple para a lo más ocho enteros $r \in [1,q]$. Si $\| \alpha(hq+r) \| \in J(0) = [0,1/q]$, entonces aplicamos la desigualdad

$$\min\left\{V\,,\,\frac{1}{\| \alpha(hq+r) \|}\right\} \leq V.$$

Si $\| \alpha(hq+r) \| \in J(s)$ para algún $s \geq 1$, entonces usamos

$$\min\left\{V\,,\,\frac{1}{\| \alpha(hq+r) \|}\right\} \leq \frac{1}{\| \alpha(hq+r) \|} \leq \frac{q}{s}. \blacksquare$$

Lema 25. *Sea α un número real. Suponga que*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

en donde $q \geq 1$ y $(a,q) = 1$. Para cada número real $U \geq 1$ y entero positivo n, se cumple que

$$\sum_{1 \leq k \leq U} \min\left\{\frac{n}{k}\,,\,\frac{1}{\| \alpha k \|}\right\} \ll \left(\frac{n}{q} + U + q\right) \log 2qU.$$

Demostración. Sea $k = hq + r$ con $1 \leq r \leq q$ y $0 \leq h < U/q$. Entonces

$$S := \sum_{1 \leq k \leq U} \min\left\{\frac{n}{k}\,,\,\frac{1}{\| \alpha k \|}\right\}$$

$$\leq \sum_{0 \leq h < \frac{U}{q}} \sum_{1 \leq r \leq q} \min\left\{\frac{n}{hq+r}\,,\,\frac{1}{\| \alpha(hq+r) \|}\right\}.$$

Si $h = 0$ y $1 \leq r \leq q/2$, entonces, por el Lema 23,

$$\sum_{1 \leq r \leq \frac{q}{2}} \min\left\{\frac{n}{r}\,,\, \frac{1}{\|\, \alpha r \,\|}\right\} \;\leq\; \sum_{1 \leq r \leq \frac{q}{2}} \frac{1}{\|\, \alpha r \,\|} \;\ll\; q \log q.$$

Para los términos que restan, se cumple que

$$\frac{1}{hq + r} \;<\; \frac{2}{(h+1)q}.$$

En efecto, o bien $h \geq 1$ y por lo tanto

$$hq + r \;>\; hq \;\geq\; \frac{(h+1)q}{2},$$

o bien, $h = 0$, $\dfrac{q}{2} < r \leq q$ y por lo tanto

$$hq + r \;=\; r \;>\; \frac{q}{2} \;=\; \frac{(h+1)q}{2}.$$

Entonces tenemos que

$$S \;\ll\; q \log q \;+\; \sum_{0 \leq h < \frac{U}{q}} \sum_{1 \leq r \leq q} \min\left\{\frac{n}{(h+1)q}\,,\, \frac{1}{\|\, \alpha(hq + r) \,\|}\right\}.$$

Nótese que

$$\frac{U}{q} + 1 \;\leq\; U + q \;\leq\; 2 \max\left\{q, U\right\} \;\leq\; 2qU.$$

Podemos estimar la suma interior por el Lema 24 con $V = n/(h+1)q$, para obtener

$$S \;\ll\; q \log q + \sum_{0 \leq h < \frac{U}{q}} \left(\frac{n}{(h+1)q} + q \log q\right)$$

$$\ll q\log q + \frac{n}{q}\sum_{0\le h<\frac{U}{q}} \frac{1}{n+1} + \big(\frac{U}{q}+1\big)q\log q$$

$$\ll q\log q + \frac{n}{q}\log\big(\frac{U}{q}+1\big) + U\log q + q\log q$$

$$\ll \big(\frac{n}{q} + U + q\big)\log 2qU. \ \blacksquare$$

Lema 26. *Suponga que*

$$\Big|\alpha - \frac{a}{q}\Big| \le \frac{1}{q^2}$$

en donde $1 \le q \le N$ *y* $(a,q) = 1$. *Se cumple que*

$$S_1 \ll \Big\{\frac{N}{q} + N^{\frac{2}{5}} + q\Big\}\log^2 N.$$

Demostración. Sea $u = N^{\frac{2}{5}}$. Puesto que $\mathbf{1} * \Lambda = \log$, entonces

$$S_1 = \sum_{d\le u}\sum_{\ell\le\frac{N}{d}}\sum_{m\le\frac{N}{\ell d}} \mu(d)\Lambda(\ell)\,e(\alpha d\ell m)$$

$$= \sum_{d\le u}\sum_{r\le\frac{N}{d}} \mu(d)\,e(\alpha dr)\sum_{\ell|r}\Lambda(\ell) = \sum_{d\le u}\mu(d)\sum_{r\le\frac{N}{d}} e(\alpha dr)\log r$$

$$\ll \sum_{d\le u}\Big|\sum_{r\le\frac{N}{d}} e(\alpha dr)\log r\Big|.$$

Estimamos ahora la suma interior

$$\sum_{r\le\frac{N}{d}} e(\alpha dr)\log r \;=\; \sum_{r\le\frac{N}{d}} e(\alpha dr)\int_1^r \frac{dx}{x} \;=\; \sum_{r=2}^{[\frac{N}{d}]} e(\alpha dr)\sum_{j=2}^{r}\int_{j-1}^{j}\frac{dx}{x}$$

$$= \sum_{j=2}^{[\frac{N}{d}]}\sum_{r=j}^{[\frac{N}{d}]}\int_{j-1}^{j} e(\alpha dr)\,\frac{dx}{x} \;=\; \sum_{j=2}^{[\frac{N}{d}]}\int_{j-1}^{j}\Big\{\sum_{r=j}^{[\frac{N}{d}]} e(\alpha dr)\Big\}\,\frac{dx}{x}.$$

Por el Lema 15, se cumple que

$$\sum_{r=j}^{[\frac{N}{d}]} e(\alpha dr) \;\ll\; \min\Big\{\frac{N}{d}\,,\,\frac{1}{\parallel \alpha d\parallel}\Big\}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{r\le\frac{N}{d}} e(\alpha dr)\log r \;\ll\; \min\Big\{\frac{N}{d}\,,\,\frac{1}{\parallel \alpha d\parallel}\Big\}\log N.$$

Por el Lema 25, tenemos

$$\log N\sum_{d\le u}\min\Big\{\frac{N}{d}\,,\,\frac{1}{\parallel \alpha d\parallel}\Big\} \;\ll\; \Big\{\frac{N}{q}+N^{\frac{2}{5}}+q\Big\}\log^2 N. \;\blacksquare$$

Lema 27. *Suponga que*

$$\Big|\alpha-\frac{a}{q}\Big| \;\le\; \frac{1}{q^2}$$

en donde $1\le q\le N$ *y* $(a,q)=1$*. Se cumple que*

$$S_2 \;\ll\; \Big\{\frac{N}{q}+N^{\frac{4}{5}}+q\Big\}\log^2 N.$$

Demostración. Si $d \leq N^{\frac{2}{5}}$ y $\ell \leq N^{\frac{2}{5}}$, entonces $d\ell \leq N^{\frac{4}{5}}$. Poniendo $k = d\ell$, se obtiene

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{d \leq N^{\frac{2}{5}}} \sum_{\ell \leq N^{\frac{2}{5}}} \sum_{m \leq \frac{N}{\ell d}} \mu(d)\Lambda(\ell) e\big(\alpha d\ell m\big) \\ &= \sum_{k \leq N^{\frac{4}{5}}} \sum_{m \leq \frac{N}{k}} e(\alpha k m) \sum_{\substack{d,\ell \leq N^{\frac{2}{5}} \\ k = d\ell}} \mu(d)\Lambda(\ell). \end{aligned}$$

Nótese primero que

$$\sum_{\substack{d,\ell \leq N^{\frac{2}{5}} \\ k = d\ell}} \Lambda(\ell) \;\leq\; \sum_{\ell | k} \Lambda(\ell) \;=\; \log k \;\ll\; \log N.$$

Por el Lema 25, se obtiene que

$$S_2 \ll \sum_{k \leq N^{\frac{4}{5}}} \min\left\{ \frac{N}{k}, \frac{1}{\| \alpha k \|} \right\} \sum_{\substack{d,\ell \leq N^{\frac{2}{5}} \\ k = d\ell}} \Lambda(\ell) \ll \left\{ \frac{N}{q} + N^{\frac{4}{5}} + q \right\} \log^2 N.$$

Esto termina la demostración del lema. ∎

Ejercicio 28. Sea $d = \mathbf{1} * \mathbf{1}$. Usar el hecho de que $d(mn) \leq d(m)d(n)$ para probar que

$$\sum_{n \leq x} d^2(n) \;\ll\; x \log^3 x.$$

Lema 29. *Suponga que*

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \;\leq\; \frac{1}{q^2}$$

en donde $1 \leq q \leq N$ *y* $(a,q) = 1$. *Se cumple que*

$$S_3 \ll \left\{ \frac{N}{q^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{4}{5}} + N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \right\} \log^4 N.$$

Demostración. Sean

$$u = N^{\frac{2}{5}} \qquad \text{y} \qquad h = \left[\frac{\log N}{5 \log 2} \right] + 1.$$

Entonces $N^{\frac{1}{5}} < 2^h \leq 2N^{\frac{1}{5}}$ y también $h \ll \log N$. Si $j \leq h$, entonces $2^j u \leq 2N^{\frac{3}{5}} \ll N$. Si $N^{\frac{2}{5}} < \ell \leq N/k$, entonces

$$k \leq \frac{N}{\ell} < N^{\frac{3}{5}} = N^{\frac{1}{5}} u < 2^h u.$$

Por lo tanto

$$S_3 = \sum_{k > N^{\frac{2}{5}}} \sum_{N^{\frac{2}{5}} < \ell \leq \frac{N}{k}} M_u(k) \Lambda(\ell) e\big(\alpha k \ell\big)$$

$$= \sum_{j=1}^{h} \sum_{2^{j-1} u < k \leq 2^j u} M_u(k) \sum_{u < \ell \leq \frac{N}{k}} \Lambda(\ell) e\big(\alpha k \ell\big) = \sum_{j=1}^{h} S_{3,j}$$

en donde

$$S_{3,j} = \sum_{2^{j-1} u < k \leq 2^j u} M_u(k) \sum_{u < \ell \leq \frac{N}{k}} \Lambda(\ell) e\big(\alpha k \ell\big).$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos
(**30**)

$$|S_{3,j}|^2 \leq \sum_{2^{j-1} u < k \leq 2^j u} |M_u(k)|^2 \sum_{2^{j-1} u < k \leq 2^j u} \left| \sum_{u < \ell \leq \frac{N}{k}} \Lambda(\ell) e\big(\alpha k \ell\big) \right|^2.$$

Para estimar la primera suma en el lado derecho de (30), nótese que

$$\big|M_u(k)\big| \;=\; \Bigg|\sum_{\substack{d|k\\ d\le u}} \mu(d)\Bigg| \;\le\; \sum_{\substack{d|k\\ d\le u}} 1 \;\le\; d(k).$$

Por el Ejercicio 28,

$$\sum_{2^{j-1}u<k\le 2^j u} |M_u(k)|^2 \;\le\; \sum_{2^{j-1}u<k\le 2^j u} d^2(k) \;\ll\; 2^j u \log^3 N$$

ya que $2^j u \ll N$.

Para estimar la segunda suma en (30), nótese que

$$\sum_{2^{j-1}u<k\le 2^j u} \Bigg| \sum_{u<\ell\le \frac{N}{k}} \Lambda(\ell)\, e\big(\alpha k\ell\big)\Bigg|^2$$

$$= \sum_{2^{j-1}u<k\le 2^j u} \; \sum_{u<\ell\le \frac{N}{k}} \; \sum_{u<m\le \frac{N}{k}} \Lambda(\ell)\,\Lambda(m)\, e\big(\alpha k(\ell-m)\big)$$

$$= \sum_{\ell\in\mathcal{A}} \sum_{m\in\mathcal{A}} \Lambda(\ell)\,\Lambda(m) \sum_{k\in I(\ell,m)} e\big(\alpha k(\ell-m)\big)$$

en donde $\mathcal{A} = \mathbf{N}\cap(u, N2^{1-j}u^{-1})$,

$$I(\ell,m) \;=\; \mathbf{N}\cap\Big(2^{j-1}u\,,\, \min\big\{2^j u, \frac{N}{\ell}, \frac{N}{m}\big\}\Big].$$

Puesto que Card $I(\ell,m) \le 2^{j-1}u$, entonces

$$\sum_{k\in I(\ell,m)} e\big(\alpha k(\ell-m)\big) \;\ll\; \min\Big\{2^{j-1}u\,,\, \frac{1}{\|\,\alpha(\ell-m)\,\|}\Big\}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\sum_{2^{j-1}u<k\le 2^j u}\Bigg|\sum_{u<\ell\le \frac{N}{k}}\Lambda(\ell)\,e\big(\alpha k\ell\big)\Bigg|^2\\
&\qquad\ll \sum_{\ell\in\mathcal{A}}\ \sum_{m\in\mathcal{A}}\Lambda(\ell)\,\Lambda(m)\,\min\Big\{2^{j-1}u\,,\ \frac{1}{\|\ \alpha(\ell-m)\ \|}\Big\}\\
&\qquad\ll \log^2 N\sum_{\ell\in\mathcal{A}}\ \sum_{m\in\mathcal{A}}\min\Big\{2^{j-1}u\,,\ \frac{1}{\|\ \alpha(\ell-m)\ \|}\Big\}.
\end{aligned}$$

Sea $s=\ell-m$ con $\ell,m\in\mathcal{A}$. Entonces $|s|<N/2^{j-1}u$ y el número de estas representaciones de s no excede a $N/2^{j-1}u$. Por el Lema 25, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{2^{j-1}u<k\le 2^j u}\Bigg|\sum_{u<\ell\le \frac{N}{k}}\Lambda(\ell)\,e\big(\alpha k\ell\big)\Bigg|^2\\
&\qquad\ll \log^2 N\,\frac{N}{2^{j-1}u}\sum_{1\le s\le \frac{2N}{2^j u}}\min\Big\{2^{j-1}u\,,\ \frac{1}{\|\ \alpha s\ \|}\Big\}\\
&\qquad\ll \log^2 N\,\frac{N}{2^{j-1}u}\sum_{1\le s\le \frac{2N}{2^j u}}\min\Big\{\frac{N}{s}\,,\ \frac{1}{\|\ \alpha s\ \|}\Big\}\\
&\qquad\ll \frac{N}{2^{j-1}u}\Big(\frac{N}{q}+\frac{N}{2^{j-1}u}+q\Big)\log^3 N.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|S_{3,j}|^2 &\ll 2^j u\log^3 N\,\frac{N}{2^{j-1}u}\Big(\frac{N}{q}+\frac{N}{2^{j-1}u}+q\Big)\log^3 N\\
&\ll N^2\log^6 N\,\Big(\frac{1}{q}+\frac{1}{u}+\frac{q}{N}\Big).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|S_{3,j}| \ll N \log^3 N \left(\frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{N^{\frac{1}{5}}} + \frac{q^{\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Puesto que $h \ll \log N$, entonces

$$S_3 = \sum_{j=1}^{h} S_{3,j} \ll \left\{ \frac{N}{q^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{4}{5}} + N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \right\} \log^4 N. \blacksquare$$