Conexiones de norma y de espacio-tiempo en la formulación de Plebański

Merced Montesinos[1], Mercedes Velázquez[1,2] y Diego González[1]
[1] Departamento de Física, Cinvestav, México
[2] Centre de Physique Théorique, Campus de Luminy, France

MEXI-LAZOS 2012
Morelia, 9 de noviembre de 2012

Plan

- Introducción
- Formulación de Plebanski de la relatividad general compleja
- De la conexión interna a la conexión de espacio-tiempo
- Observaciones finales

Introducción

En ninguna teoría basada en conexiones internas (de norma) existen conceptos como:

- Conexión de espacio-tiempo
- Torsión
- No-metricidad

Principio de acción de Plebański[1]

$$S[A^i, \Sigma^i, C_{ij}] = \int_{\mathcal{M}^4} \left[\Sigma_i \wedge F^i[A] - \frac{1}{2} C_{ij} \Sigma^i \wedge \Sigma^j \right]. \tag{1}$$

Todos los campos son $su(2)$-valuados.

- Métrica de espacio-tiempo

[1] Plebański J F 1977 J. Math. Phys. **18** 2511

Introducción

Ecuaciones de movimiento de Plebański

$\Downarrow$

Ecuaciones de movimiento de Einstein de la relatividad general

En particular:

Conexión de spin $\xleftarrow[\textbf{Hipótesis extra}]{\hspace{4cm}}$ Conexión interna

- **Enfoque usual:** La conexión de spin es introducida a mano[2]

[2] Capovilla R, Dell J, Jacobson T and Mason L 1991 Class. Quantum Grav. **8** 41
Bengtsson I 1995 Class. Quantum Grav. **12** 1581
Krasnov K 2010 Phys. Rev. D **81** 084026

Introducción

Cinvestav

Ecuaciones de movimiento de Plebański

$\Downarrow$

Ecuaciones de movimiento de Einstein de la relatividad general

En particular:

Conexión de spin $\xleftarrow[\textbf{Hipótesis extra}]{\hspace{3cm}}$ Conexión interna

- **Enfoque usual:** La conexión de spin es introducida a mano[2]

Objetivo

Dar la relación exacta entre la conexión interna y la conexión de espacio-tiempo dentro del marco más general permitido por la primera ecuación de estructura de Cartan involucrando torsión no nula y por una conexión de espacio-tiempo con metricidad no nula.

[2] Capovilla R, Dell J, Jacobson T and Mason L 1991 Class. Quantum Grav. **8** 41
Bengtsson I 1995 Class. Quantum Grav. **12** 1581
Krasnov K 2010 Phys. Rev. D **81** 084026

Formulación de Plebański de la relatividad general compleja

Las ecuaciones de movimiento para la teoría son:

$$\delta\Sigma^i : \qquad F^i = C^i{}_j\Sigma^j, \qquad C^i{}_i = 0, \tag{2}$$

$$\delta A^i : \qquad d\Sigma^i + \varepsilon^i{}_{jk}A^j \wedge \Sigma^k = 0, \tag{3}$$

$$\delta C_{ij} : \qquad \Sigma^i \wedge \Sigma^j - \frac{1}{3}\delta^{ij}\Sigma^k \wedge \Sigma_k = 0. \tag{4}$$

Solución de las 2-formas Σ^i

La ecuación (4), módulo las condiciones de realidad

$$\Sigma^i \wedge \overline{\Sigma}^j = 0, \tag{5}$$

$$\Sigma^i \wedge \Sigma_i + \overline{\Sigma}^i \wedge \overline{\Sigma}_i = 0, \tag{6}$$

tiene las soluciones

$$\Sigma^i = \theta^0 \wedge \theta^i + \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^i{}_{jk}\theta^j \wedge \theta^k, \tag{7}$$

$$\overline{\Sigma}^i = \theta^0 \wedge \theta^i - \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^i{}_{jk}\theta^j \wedge \theta^k, \tag{8}$$

donde $\{\theta^0, \theta^i\}$ es un conjunto de cuatro 1-formas reales linealmente independientes.

Formulación de Plebański de la relatividad

Cinvestav

Solución de la conexión interna A^i

$$d\Sigma^i + \varepsilon^i{}_{jk} A^j \wedge \Sigma^k = 0, \tag{9}$$

En términos de las componentes $A^i = A^i{}_J \theta^J$, $\Sigma^i = \frac{1}{2}\Sigma^i{}_{IJ}\theta^I \wedge \theta^J$ y $d\Sigma^i = \frac{1}{3!} d\Sigma^i{}_{IJK}\theta^I \wedge \theta^J \wedge \theta^K$, el sistema es equivalente a

$$M\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{10}$$

donde $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ son vectores columna y

$$M = \begin{pmatrix} 0_{4\times4} & M^3 & -M^2 \\ -M^3 & 0_{4\times4} & M^1 \\ M^2 & -M^1 & 0_{4\times4} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

con

$$M^i = \begin{pmatrix} 0 & -\Sigma^i{}_{23} & -\Sigma^i{}_{31} & -\Sigma^i{}_{12} \\ \Sigma^i{}_{23} & 0 & -\Sigma^i{}_{03} & \Sigma^i{}_{02} \\ \Sigma^i{}_{31} & \Sigma^i{}_{03} & 0 & -\Sigma^i{}_{01} \\ \Sigma^i{}_{12} & -\Sigma^i{}_{02} & \Sigma^i{}_{01} & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Formulación de Plebański de la relatividad

Solución de la conexión interna A^i

$$\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{b}, \tag{13}$$

donde

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \Psi^{11} & \Psi^{12} & \Psi^{13} \\ \Psi^{21} & \Psi^{22} & \Psi^{23} \\ \Psi^{31} & \Psi^{32} & \Psi^{33} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

con

$$\Psi^{ij}{}_{MN} = -8\left(\frac{m^{ij}\,k_{MN}}{\det(m^{ij})} + \frac{1}{4}\varepsilon^{ijk}\,(m^{-1})_{kl}\,\Sigma^{l}{}_{MN}\right), \tag{15}$$

$$k_{MN} := -\frac{1}{12}\varepsilon_{ijk}\,\Sigma^{i}{}_{MI}\,\Sigma^{j}{}_{JK}\,\Sigma^{k}{}_{LN}\,\tilde{\eta}^{IJKL}, \tag{16}$$

$$m^{ij} := \frac{1}{2}\,\Sigma^{i}{}_{IJ}\,\Sigma^{j}{}_{KL}\,\tilde{\eta}^{IJKL}. \tag{17}$$

Finalmente, la solución de conexión interna,

$$A^{i} = -\frac{1}{3!}\,\Psi^{i}{}_{jTR}\,d\Sigma^{j}{}_{IJK}\,\tilde{\eta}^{IJKR}\,\theta^{T}. \tag{18}$$

Formulación de Plebański de la relatividad

Solución de la conexión interna A^i

Con Σ^i dado por (7),

$$(k_{IJ}) = (\eta_{IJ}) = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1) \qquad \text{y} \qquad m^{ij} = 4\mathrm{i}\delta^{\mathrm{ij}} \tag{19}$$

y la solución de la conexión interna es

$$A^i = -\frac{1}{3!}\Psi^i{}_{jTR}\, d\Sigma^j{}_{IJK}\, \widetilde{\eta}^{IJKR}\, \theta^T, \tag{20}$$

$$\Psi^{ij}{}_{MN} = \frac{1}{2}\left(\delta^{ij}\, \eta_{MN} + \mathrm{i}\,\varepsilon^{ij}{}_k\, \Sigma^k{}_{MN}\right). \tag{21}$$

- No surge una conexión de espacio-tiempo sólo por sustituir Σ^k.

De la conexión interna a la conexión de espacio-tiempo

Enfoque usual:

"El sistema de ecuaciones $d\Sigma^i + \varepsilon^i{}_{jk} A^j \wedge \Sigma^k = 0$ es lineal y por lo tanto tiene solución única, y debido a que

$$A^i = \mathrm{i}\omega^{0\mathrm{i}} - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{i}}{}_{\mathrm{jk}}\omega^{\mathrm{jk}}, \tag{22}$$

satisface el sistema, esta es la solución única".

Definición de la conexión de spin $\omega^I{}_J$

$$d\theta^I + \omega^I{}_J \wedge \theta^J = 0, \tag{23}$$

$$d\eta_{IJ} - \omega^K{}_I \eta_{KJ} - \omega^K{}_J \eta_{IK} = 0. \tag{24}$$

Definición de la conexión de espacio-tiempo $\Gamma^I{}_J$

$$D\theta^I := d\theta^I + \Gamma^I{}_J \wedge \theta^J = T^I, \tag{25}$$

$$Dg_{IJ} := dg_{IJ} - \Gamma^K{}_I g_{KJ} - \Gamma^K{}_J g_{IK} = M_{IJ}, \tag{26}$$

- T^I son las 2-formas de torsión.
- $M_{IJ} = M_{IJK}\theta^K$ son las 1-formas de no-metricidad.
- g_{IJ} son las componentes del tensor métrico g con respecto a la base $\{e_I\}$ (donde $\theta^I(e_J) = \delta^I_J$).

Definición de la conexión de espacio-tiempo $\Gamma^I{}_J$

$$D\theta^I := d\theta^I + \Gamma^I{}_J \wedge \theta^J = T^I, \quad (25)$$

$$Dg_{IJ} := dg_{IJ} - \Gamma^K{}_I g_{KJ} - \Gamma^K{}_J g_{IK} = M_{IJ}, \quad (26)$$

- T^I son las 2-formas de torsión.
- $M_{IJ} = M_{IJK}\theta^K$ son las 1-formas de no-metricidad.
- g_{IJ} son las componentes del tensor métrico g con respecto a la base $\{e_I\}$ (donde $\theta^I(e_J) = \delta^I_J$).

Hipotesis 1

Debemos involucrar $\Gamma^I{}_J$ definida por Ecs. (25) and (26). ¿Qué métrica de espacio-tiempo debemos seleccionar?

$$g_{MN} = k_{MN} = -\frac{1}{12}\varepsilon_{ijk}\, \Sigma^i{}_{MI}\, \Sigma^j{}_{JK}\, \Sigma^k{}_{LN}\, \tilde{\eta}^{IJKL}$$

Para $\Sigma^i_{\text{Pleb.}}$

$$(g_{IJ}) = (\eta_{IJ}) = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$$

Hipótesis 2

Qué torsión y no-metricidad seleccionamos?

Dejamos T^I y M_{IJ} arbitrarias.

De la conexión interna a la conexión de espacio-tiempo

Usando la hipótesis 1 y parcialmente la hipótesis 2 a través de (25)

$$\begin{aligned} d\Sigma^i &= \varepsilon^i{}_{jk}\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^j{}_{mn}\tau^{mn} + \mathrm{i}\tau^{0\mathrm{j}}\right)\wedge\Sigma^k - \frac{1}{2}\left(\Gamma^0{}_0 + \Gamma_j{}^j\right)\wedge\Sigma^i \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ij}{}_k\left(\Gamma_{0j} - \Gamma_{j0}\right)\wedge\Sigma^k - \frac{1}{2}\left(\Gamma^i{}_j - \Gamma_j{}^i\right)\wedge\Sigma^j \\ &- \frac{1}{2}\left(\Gamma^0{}_0 - \Gamma_j{}^j\right)\wedge\overline{\Sigma}^i - \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ij}{}_k\left(\Gamma_{0j} + \Gamma_{j0}\right)\wedge\overline{\Sigma}^k \\ &- \frac{1}{2}\left(\Gamma^i{}_j + \Gamma_j{}^i\right)\wedge\overline{\Sigma}^j, \end{aligned} \qquad (27)$$

donde $T^I = \tau^I{}_J \wedge \theta^J$ con $\tau^{IJ} = -\tau^{JI}$.

De la conexión interna a la conexión de espacio-tiempo

Usando la hipótesis 1 y parcialmente la hipótesis 2 a través de (25)

$$
\begin{aligned}
d\Sigma^i \quad = \quad & \varepsilon^i{}_{jk}\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^j{}_{mn}\tau^{mn} + \mathrm{i}\tau^{0\mathrm{j}}\right)\wedge\Sigma^k - \frac{1}{2}\left(\Gamma^0{}_0 + \Gamma_j{}^j\right)\wedge\Sigma^i \\
& + \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ij}{}_k\left(\Gamma_{0j} - \Gamma_{j0}\right)\wedge\Sigma^k - \frac{1}{2}\left(\Gamma^i{}_j - \Gamma_j{}^i\right)\wedge\Sigma^j \\
& - \frac{1}{2}\left(\Gamma^0{}_0 - \Gamma_j{}^j\right)\wedge\overline{\Sigma}^i - \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ij}{}_k\left(\Gamma_{0j} + \Gamma_{j0}\right)\wedge\overline{\Sigma}^k \\
& - \frac{1}{2}\left(\Gamma^i{}_j + \Gamma_j{}^i\right)\wedge\overline{\Sigma}^j,
\end{aligned}
\tag{27}
$$

donde $T^I = \tau^I{}_J \wedge \theta^J$ con $\tau^{IJ} = -\tau^{JI}$.

En particular, haciendo $T^I = 0$ y $M_{IJ} = 0$. Tenemos $\Gamma^I{}_J \rightarrow \omega^I{}_J$ y

$$
d\Sigma^i = -\varepsilon^i{}_{jk}\left(\mathrm{i}\omega^{0\mathrm{j}} - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{j}}{}_{\mathrm{mn}}\omega^{\mathrm{mn}}\right)\wedge\Sigma^k. \tag{28}
$$

De la conexión interna a la conexión de espacio-tiempo

Sustituyendo $d\Sigma^i$ en la ec. (3) o en la ec. (20) y usando la hipótesis 2 a través de la ec. (26)

$$A^i = \mathrm{i}\left(\Gamma^{0i} - \tau^{0i} + \frac{1}{2}M^{0i} + \frac{1}{2}M^0{}_L{}^i\theta^L - \frac{1}{2}M^i{}_L{}^0\theta^L\right) - \frac{1}{2}\varepsilon^i{}_{jk}\left(\Gamma^{jk} - \tau^{jk} + M^j{}_L{}^k\theta^L\right). \quad (29)$$

Usando la solución general de la ecuaciones (25) and (26),

$$\Gamma^{IJ} = \omega^{IJ} + \tau^{IJ} - \frac{1}{2}M^I{}_K{}^J\theta^K + \frac{1}{2}M^J{}_K{}^I\theta^K - \frac{1}{2}M^{IJ}, \quad (30)$$

De la conexión interna a la conexión de espacio-tiempo

Sustituyendo $d\Sigma^i$ en la ec. (3) o en la ec. (20) y usando la hipótesis 2 a través de la ec. (26)

$$A^i = \mathrm{i}\left(\Gamma^{0i} - \tau^{0i} + \frac{1}{2}M^{0i} + \frac{1}{2}M^{0}{}_{L}{}^{i}\theta^L - \frac{1}{2}M^{i}{}_{L}{}^{0}\theta^L\right) - \frac{1}{2}\varepsilon^{i}{}_{jk}\left(\Gamma^{jk} - \tau^{jk} + M^{j}{}_{L}{}^{k}\theta^L\right). \qquad (29)$$

Usando la solución general de la ecuaciones (25) and (26),

$$\Gamma^{IJ} = \omega^{IJ} + \tau^{IJ} - \frac{1}{2}M^{I}{}_{K}{}^{J}\theta^K + \frac{1}{2}M^{J}{}_{K}{}^{I}\theta^K - \frac{1}{2}M^{IJ}, \qquad (30)$$

la ecuación (29) se reduce a

$$A^i = \mathrm{i}\omega^{0\mathrm{i}} - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{i}}{}_{\mathrm{jk}}\omega^{\mathrm{jk}}. \qquad (31)$$

Observaciones finales

Cinvestav

1. Hemos analizado la relación entre Γ^{IJ} y A^i. Nuestro enfoque involucra:
   - Las condiciones de realidad (5) and (6)
   - Las hipótesis 1 y 2.

   La conexión interna A^i no es expresada en términos de la conexión general $\Gamma^I{}_J$, sino que es justo la parte autodual de la conexión de spin $\omega^I{}_J$.
2. Si cualquiera de estas hipótesis se cambia, la teoría resultante puede ser algo diferente de la relatividad general.
3. Estos resultados también son aplicables a la modificación propuesta por Krasnov a la formulación de Plebański[3].
4. La estrategia usada en la formulación de Plebański puede ser también empleada en cualquier otra teoría BF restringida tipo Plebański basado en cualquier grupo de Lie arbitrario.

[3] Krasnov K 2006 arXiv:hep-th/0611182
Krasnov K 2007 *Mod. Phys. Lett.* A **22** 3013

Gracias