

TERMODINÁMICA ESTADÍSTICA DE SISTEMAS CUÁNTICOS POLIMÉRICOS

GUILLERMO CHACÓN ACOSTA

Universidad Autónoma Metropolitana-Cuajimalpa
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas

9 de noviembre de 2012

MEXI-LAZOS 2012, CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM CAMPUS MORELIA



Contenido

- 1 Mecánica cuántica polimérica
- 2 Termodinámica estadística de sistemas cuantizados por lazos
 - Ensamble de N osciladores armónicos cuánticos
 - Termodinámica del gas ideal polimérico
 - Ensamble de átomos de hidrógeno poliméricos
 - Modificaciones poliméricas a la ecuación de Saha
- 3 Discusión




Mecánica cuántica polimérica: Cuantización por lazos

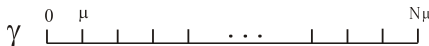
- **Cuantización de Weyl** $L^2(\mathbb{R}, dx)$:

$$\hat{U}(\lambda) = e^{i\lambda\hat{x}}, \quad \hat{V}(\mu) = e^{i\mu\hat{p}}, \quad \hat{U}(\lambda)\hat{V}(\mu) = e^{-i\lambda\mu}\hat{V}(\mu)\hat{U}(\lambda).$$

Teorema Stone-von Neumann \Rightarrow Cond. de representaciones equivalentes.

- **Cuantización por Lazos (o Polimérica)** $L^2(\mathbb{R}_{Bohr}, d\mu_{Bohr})$

Un gráfico $\gamma = \{x_i | x_i \in \mathbb{R}\}$ con condiciones de convergencia . Este puede ser una red regular con distancia μ , que se interpreta como una longitud mínima fundamental.



En esta red los operadores de Weyl actuando en una base ortonormal:

$$\hat{U}(\lambda)|x_i\rangle = e^{i\lambda x_i}|x_i\rangle$$

$$\hat{x}|x_i\rangle = x_i|x_i\rangle$$

$$\hat{V}(\mu)|x_i\rangle = |x_i - \mu\rangle$$

\hat{V} no es débilmente continuo en μ , (dado que el espacio es discreto) $\therefore \nexists \hat{p}$ como generador de traslaciones

- **Hamiltoniano polimérico**

se reemplaza $\hat{p} \rightarrow \frac{1}{\mu_0} \widehat{\sin(\mu_0 p)}$

La ec. $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, es una ec. en diferencias:

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{8m\mu^2} \left[2 - \hat{V}(2\mu) - \hat{V}(-2\mu) \right] + \hat{V}(x).$$

$$\frac{\hbar^2}{8m\mu^2} \left[2\psi(x) - \psi(x + 2\mu) - \psi(x - 2\mu) \right] = [E - \mathcal{V}(x)]\psi(x). \quad (1)$$

Dinámica cuántica polimérica: Oscilador armónico

Utilizando el potencial de oscilador armónico $\mathcal{V}(x) = \hbar\omega x^2/2d^2$ con $d^2 = \hbar/m\omega$ puede calcularse la transformada de Fourier de (1)

$$\frac{d^2\psi(k)}{dk^2} + 2d^2 \left[\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{d^2}{\mu_0^2} (\cos k\mu_0 - 1) \right] \psi(k) = 0, \quad (2)$$

que se identifica con una ecuación de Mathieu que tiene como eigenvalores:

$$E_{2n} = \frac{\hbar\omega}{\lambda^2} \left[1 + \frac{\lambda^4}{8} a_n \left(\frac{4}{\lambda^4} \right) \right], \quad E_{2n+1} = \frac{\hbar\omega}{\lambda^2} \left[1 + \frac{\lambda^4}{8} b_{n+1} \left(\frac{4}{\lambda^4} \right) \right],$$

con $\lambda = \mu_0/d$. Esta ec. describe un péndulo cuántico que tiene dos límites:

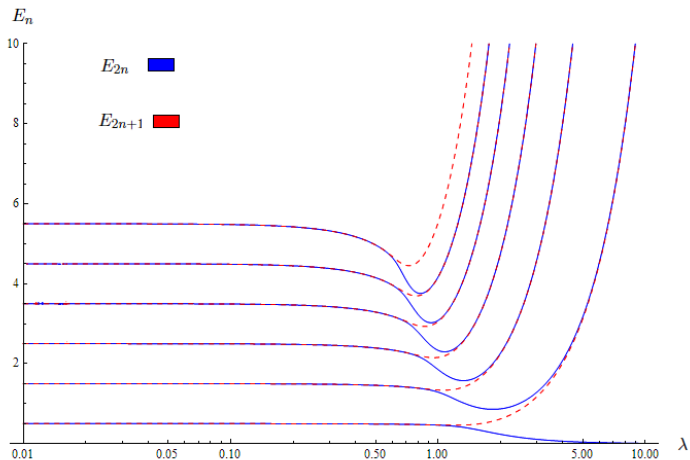
- Para $\lambda \ll 1 \Rightarrow E_{2n} \approx E_{2n+1}$, el espectro se aprox. por el del oscilador armónico

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega - \left(\frac{2n^2 + 2n + 1}{32} \right) \lambda^2 \hbar\omega + \mathcal{O}(\lambda^4).$$

- Para $\lambda \gg 1 \Rightarrow E_{2n} \approx E_{2n-1}$, el espectro va como n^2 como el de un rotor rígido con $I_{\text{eff}} = \frac{(2\hbar/\omega)^2}{m\mu_0^2}$,

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{\lambda^2} + \hbar\omega \frac{\lambda^2}{8} n^2 + \mathcal{O}(\lambda^{-6}).$$

Dinámica cuántica polimérica: Oscilador armónico



Dinámica cuántica polimérica: Partícula en una caja

Una partícula en una caja $L = N\mu_0$, usando la ec. (1) y el potencial

$$W(x_j) = \begin{cases} 0, & x_0 < x_j < x_0 + L; \\ \infty, & \text{de lo contrario.} \end{cases} \quad \text{c.f. } \psi(x_0) = \psi(L + x_0) = 0, \forall x_0 \in [0, \mu_0]. \quad (3)$$

Se reescribe la ec. (1) como

$$\psi(j+2) - \left(2 - \frac{2mE\mu_0^2}{\hbar^2}\right) \psi(j+1) + \psi(j) = 0, \quad (4)$$

De la solución de la ecuación en diferencias se obtiene el espectro de energía

$$E_n = \frac{\hbar^2}{m\mu_0^2} (1 - \cos \lambda n\pi). \quad (5)$$

- Ec. (5) es como el modelo de amarre fuerte de una partícula en un potencial periódico

$$E(\kappa) = E_* - 2\Delta \cos \kappa\mu_0, \quad (6)$$

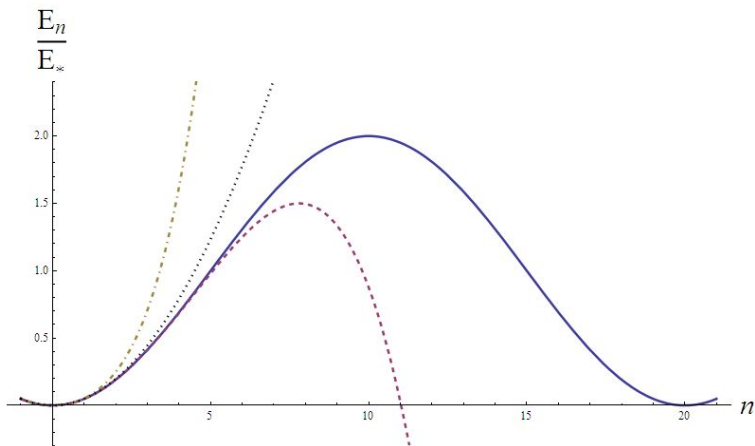
con $E_* = \frac{\hbar^2}{m\mu_0^2}$, la energía de la banda $\Delta = E_*/2$ tiene una zona de Brillouin.

- Para $\lambda \ll 1$, recuperamos el espectro usual con correcciones $\mathcal{O}(\lambda^2)$

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2} - \frac{\hbar^2 n^4 \pi^4}{24mL^2} \lambda^2 + \dots \quad (7)$$

Esto se compara con GUP con término de corrección $+\frac{\ell_{\text{min}}^2}{L^2} \frac{n^4 \pi^4 \hbar^2}{3mL^2}$.

Dinámica cuántica polimérica: Partícula en una caja



Dinámica cuántica polimérica: Cuantización de Bohr del átomo de hidrógeno 1D

Consideremos el Hamiltoniano efectivo para el átomo de hidrógeno polimérico 1D:

$$H_{poly} = \frac{\sin(\mu p)^2}{2\mu^2} - \frac{1}{x} = E^{eff} \quad \Rightarrow \quad x(p) = \frac{E_{eff}^{-1}}{\frac{\sin(\mu p)^2}{2\mu^2 E_{eff}} - 1}. \quad (8)$$

Podemos escribir $x(p)$ e integrar $\oint x dp$:

$$J_{poly} = \frac{1}{|E_{eff}|} \int \frac{dp}{\frac{\sin \mu p^2}{2\mu^2 |E_{eff}|} + 1} = \frac{1}{|E_{eff}|} \frac{\pi}{\mu \sqrt{1 + \frac{1}{2\mu^2 |E_{eff}|}}}. \quad (9)$$

La regla de cuantización de Bohr $J_{poly} = 2\pi n$, obtenemos un espectro de energía polimérico aproximado:

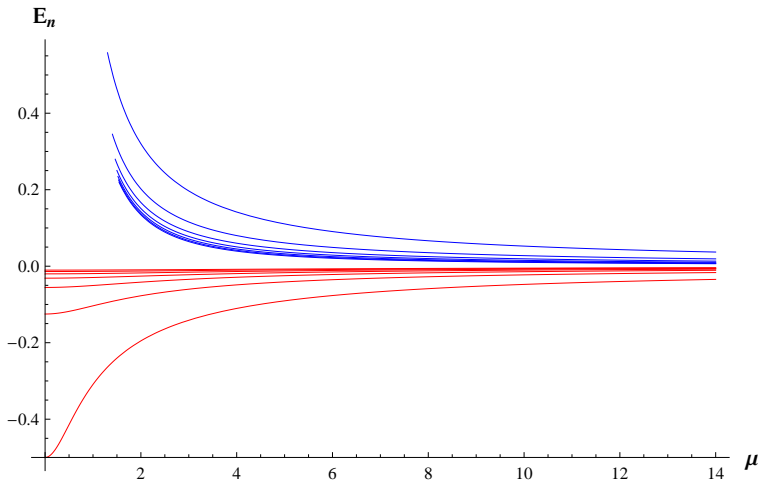
$$E_n^{poly} = \frac{1}{4\mu^2} \left[1 \mp \sqrt{1 + \frac{4\mu^2}{n^2}} \right]. \quad (10)$$

Hay dos sectores distintos correspondientes a (\pm) en (10). En el límite $\mu \rightarrow 0$ el sector $(-)$ nos da correcciones al espectro usual:

$$E_n^{(-)} \approx -\frac{1}{2n^2} + \frac{\mu^2}{2n^4} + \dots, \quad E_n^{(+)} \approx \frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{2n^2} - \frac{\mu^2}{2n^4} + \dots \quad (11)$$

En el límite $\mu \rightarrow \infty$ ambos sectores son $E_n^{(\mp)} \approx \mp \frac{1}{2\mu n}$.

Dinámica cuántica polimérica: Cuantización de Bohr del átomo de hidrógeno 1D

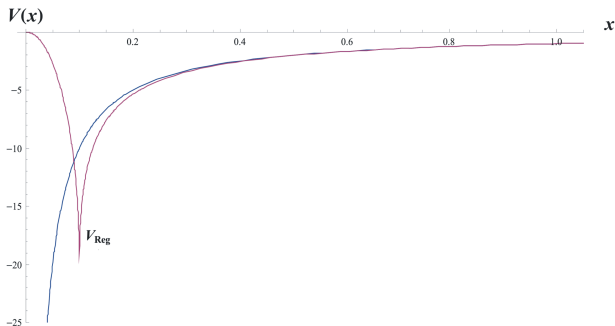


Dinámica cuántica polimérica: Cuantización de Bohr del átomo de hidrógeno 1D

La cuantización polimérica completa para este sistema fue dada numéricamente por Winkler, Hussain y Louko para estudiar la regularización del potencial de Coulomb.

Potencial de Coulomb regularizado

$$\frac{1}{x} \rightarrow \mathcal{V}_{reg}(x) = -\frac{1}{\mu_0^2} \left(\sqrt{|x_0 + (j+1)\mu_0|} - \sqrt{|x_0 + (j-1)\mu_0|} \right)^2,$$



Cerca de $x = 0$ se vuelve repulsivo y es exactamente cero en el origen.

Con la aproximación analítica aquí presentada podemos estudiar los casos límite de μ y el correspondiente sistema térmico.

Termodinámica estadística de sistemas cuánticos por lazos

Para calcular las cantidades termodinámicas utilizamos la función de partición canónica

$$Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n), \quad \text{donde } \beta = \frac{1}{kT} \quad (12)$$

Las variables termodinámicas se obtienen como función de Z o sus derivadas:

$$F = -\frac{\mathcal{N}}{\beta} \ln Z, \quad p = -\frac{\partial F}{\partial L}, \quad S = k\beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta}, \quad U = -\frac{\mathcal{N}}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}, \quad C_V = -k\beta^2 \frac{\partial U}{\partial \beta}.$$

Termodinámica estadística de sistemas cuánticos por lazos

Para calcular las cantidades termodinámicas utilizamos la función de partición canónica

$$Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n), \quad \text{donde } \beta = \frac{1}{kT} \quad (12)$$

Las variables termodinámicas se obtienen como función de Z o sus derivadas:

$$F = -\frac{\mathcal{N}}{\beta} \ln Z, \quad p = -\frac{\partial F}{\partial L}, \quad S = k\beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta}, \quad U = -\frac{\mathcal{N}}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}, \quad C_V = -k\beta^2 \frac{\partial U}{\partial \beta}.$$

Ensamble de N osciladores armónicos cuánticos

La correspondiente función de partición para el oscilador polimérico (péndulo cuántico) es:

$$Z(\beta) = \sum_n \exp \left[-\frac{\beta \hbar \omega}{\lambda^2} \left(1 + \frac{\lambda^4}{8} a_n \left(\frac{4}{\lambda^4} \right) \right) \right] + \sum_{n'} \exp \left[-\frac{\beta \hbar \omega}{\lambda^2} \left(1 + \frac{\lambda^4}{8} b_{n'+1} \left(\frac{4}{\lambda^4} \right) \right) \right]. \quad (13)$$

Con esta expresión pueden obtenerse las cantidades termodinámicas. Sin embargo, es más útil explorar el caso límite.

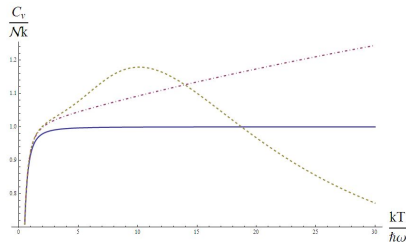
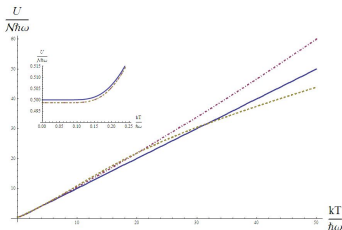
Ensamble de N osciladores armónicos cuánticos. Caso $\lambda \ll 1$

La función de partición, la energía y la capacidad calorífica:

$$Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\lambda^{-2}} e^{-\beta\hbar\omega(\frac{1}{2}+n)} \exp \left[\frac{\lambda^2}{16} \beta\hbar\omega \left(\frac{1}{2} + n(n+1) \right) \right], \quad (14)$$

$$U = N\hbar\omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} - \frac{\lambda^2}{32} \frac{(1 + e^{\beta\hbar\omega})(e^{2\beta\hbar\omega} - 4e^{\beta\hbar\omega}\beta\hbar\omega - 1)}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^3} \right], \quad (15)$$

$$C_V = Nk(\beta\hbar\omega)^2 \frac{e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \left[1 + \frac{\lambda^2}{8} \left(\frac{2 + \beta\hbar\omega(1 + 4e^{\beta\hbar\omega}) + e^{2\beta\hbar\omega}(\beta\hbar\omega - 2)}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \right) \right]. \quad (16)$$



Modelo simple modificado para la Radiación de Cuerpo Negro

Interpretando $U = N\langle E_n \rangle$, $\Rightarrow \langle E_n \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \langle n \rangle$, con $\langle n \rangle$ es el número de ocupación modificado:

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} - \frac{\lambda^2 (1 + e^{\beta\hbar\omega})(e^{2\beta\hbar\omega} - 4\beta\hbar\omega e^{\beta\hbar\omega} - 1)}{32 (e^{\beta\hbar\omega} - 1)^3}. \quad (17)$$

Modelando la radiación como un conjunto de osciladores, se calcula la densidad de energía espectral con correcciones de orden $\mathcal{O}(\lambda^2)$

$$u_\omega \equiv \frac{d}{d\omega} \left(\frac{U}{V} \right) = \langle n \rangle \hbar\omega \frac{g(\omega)}{V}, \quad \text{con la densidad de estados} \quad g(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}. \quad (18)$$

Modelo simple modificado para la Radiación de Cuerpo Negro

Interpretando $U = N\langle E_n \rangle$, $\Rightarrow \langle E_n \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \langle n \rangle$, con $\langle n \rangle$ es el número de ocupación modificado:

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} - \frac{\lambda^2 (1 + e^{\beta\hbar\omega})(e^{2\beta\hbar\omega} - 4\beta\hbar\omega e^{\beta\hbar\omega} - 1)}{32(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^3}. \quad (17)$$

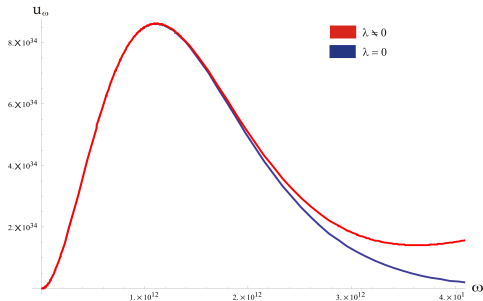
Modelando la radiación como un conjunto de osciladores, se calcula la densidad de energía espectral con correcciones de orden $\mathcal{O}(\lambda^2)$

$$u_\omega \equiv \frac{d}{d\omega} \left(\frac{U}{V} \right) = \langle n \rangle \hbar\omega \frac{g(\omega)}{V}, \quad \text{con la densidad de estados} \quad g(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}. \quad (18)$$

Resultado:

$$\begin{aligned} \frac{U}{V} &= \frac{\pi^2 k^4}{15c^3 \hbar^3} \left[1 + \lambda^2 \frac{135}{4\pi^4} \zeta(3) \right] T^4 \\ &\simeq \frac{\pi^2 k^4}{15c^3 \hbar^3} [1 + \lambda^2 0.416485] T^4, \end{aligned} \quad (19)$$

una modificación de la constante de Stefan-Boltzmann.

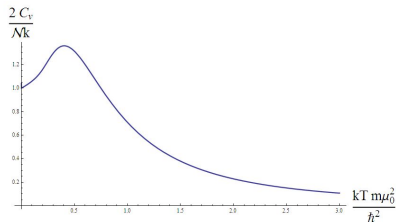
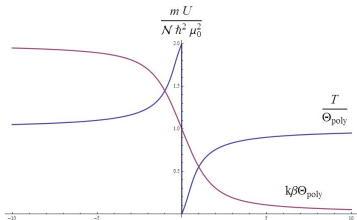


Termodinámica del gas ideal *polimérico*

Para un gas formado por partículas en una caja de tamaño L , la función de partición la función se aproxima como:

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= e^{-\frac{\Lambda^2}{2\pi\mu_0^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{\Lambda^2}{2\pi\mu_0^2} \cos n\pi\lambda\right) \cong e^{-\frac{\Lambda^2}{2\pi\mu_0^2}} \sum_{n=0}^{1/\lambda} \exp\left(\frac{\Lambda^2}{2\pi\mu_0^2} \cos n\pi\lambda\right) \\
 &= l_0 \left(\frac{\Lambda^2}{2\pi\mu_0^2}\right) \frac{e^{-\frac{\Lambda^2}{2\pi\mu_0^2}}}{\lambda} + \frac{1}{2} \left(1 + e^{-\frac{\Lambda^2}{\pi\mu_0^2}}\right). \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$U = \frac{\mathcal{N}\hbar^2}{m\mu_0^2} \left(1 - \frac{l_1}{l_0}\right), \quad C_V = \frac{\mathcal{N}k}{2} \left(\frac{\hbar^2\beta}{m\mu_0^2}\right)^2 \frac{l_0(l_0 + l_2) - 2l_1^2}{l_0^2}.$$



Termodinámica del gas ideal *polimérico* $\lambda \ll 1$

La función de partición se pueden aproximar para $\lambda \ll 1$

$$Z(\beta) \cong \sqrt{\frac{mL^2}{2\pi\beta\hbar^2}} + \lambda^2 \frac{\pi}{4} \left(\frac{mL^2}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2} + \dots \quad (21)$$

En este caso las magnitudes termodinámicas son

$$U = \frac{N}{2\beta} \left(1 + \frac{\lambda^2}{4} \frac{mL^2}{\hbar^2\beta} \right),$$
$$C_V = \frac{kN}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \frac{mL^2}{\hbar^2\beta} \right).$$

Ensamble de átomos de hidrógeno *poliméricos*

En el caso del átomo de hidrógeno 1D los estados tienen degeneración constante. En el caso cuántico en 3D la función de partición canónica diverge debido a la fuerte degeneración de los estados altamente excitados. Existen varios enfoques para evitar este problema, aquí consideraremos únicamente los dos primeros términos en la suma asumiendo bajas temperaturas, así la función de partición polimérica para el sector (-) resulta:

$$Z_{poly} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{4\mu^2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\mu^2}{n^2}} \right]} \simeq e^{-\frac{\beta(1 - \sqrt{1 + \mu^2})}{4\mu^2}} + e^{-\frac{\beta(1 - \sqrt{1 + 4\mu^2})}{4\mu^2}} \quad (22)$$

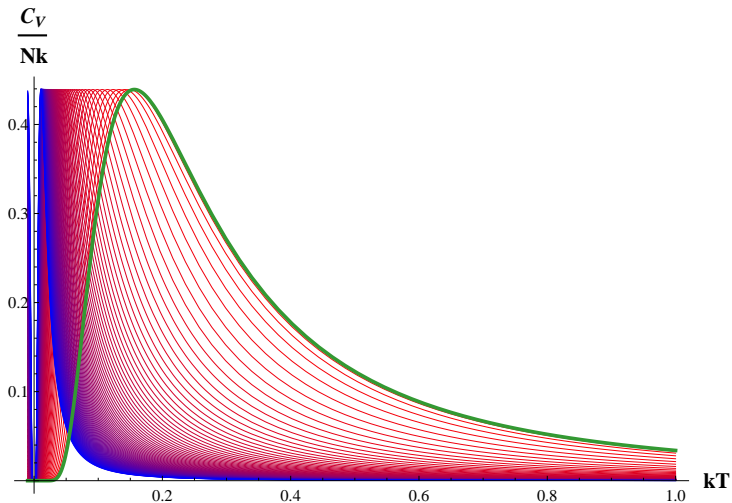
La capacidad calorífica en este caso es:

$$\frac{C_V}{Nk} = \frac{\beta^2 \left(2 + 5\mu^2 - 2\sqrt{1 + \mu^2} \sqrt{1 + 4\mu^2} \right) e^{\frac{\beta(-2 + \sqrt{1 + \mu^2} + \sqrt{1 + 4\mu^2})}{4\mu^2}}}{16\mu^4 \left(e^{\frac{\beta(-1 + \sqrt{1 + \mu^2})}{4\mu^2}} + e^{\frac{\beta(-1 + \sqrt{1 + 4\mu^2})}{4\mu^2}} \right)^2} \quad (23)$$

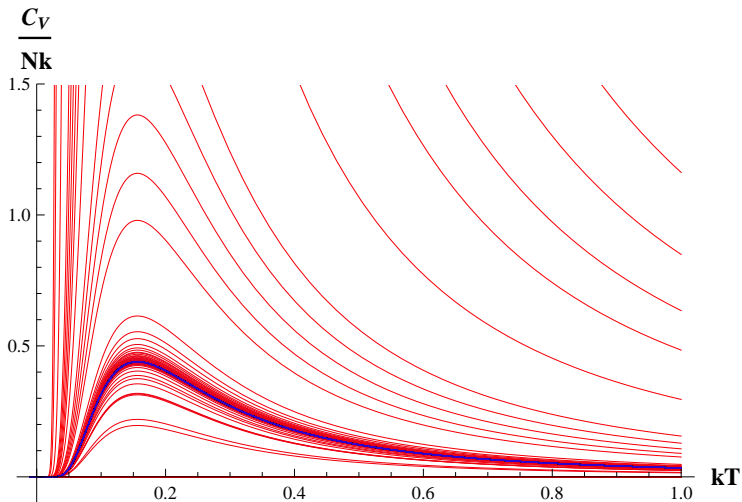
En el caso usual existe una transición de fase que puede verse como un máximo en C_V que separa distintos comportamientos del sistema. Es el llamado efecto Sckottky para un sistema de dos niveles. Para este caso polimérico la transición se mantiene, pero la temperatura a la cual ocurre se modifica por la escala polimérica.

Además, para $\mu \rightarrow 0$, se tiene $C_V \rightarrow C_V$, además en ese límite hay oscilaciones en la amplitud de C_V con la misma temperatura. Si $\mu \rightarrow \infty$ la temperatura de transición decrece, mientras que la capacidad calorífica permanece hasta que se alcanza el límite $C_V = 0$.

Ensemble de átomos de hidrógeno *poliméricos*



Ensamble de átomos de hidrógeno *poliméricos*



Modificaciones *poliméricas* a la ecuación de Saha

Para tener la función de partición de un gas de átomos de hidrógeno, tenemos que considerar, además de la contribución del hidrógeno, la contribución traslacional, es decir, $Z_{H_{gas}} = Z_{gas} Z_H = Z_{gas} e^{\beta R}$, donde se uso sólo el primer término de la contribución del hidrógeno. Restaurando las unidades tales que la constante de Rydberg $R = 13.6 \text{ eV}$. La función de partición polimérica para este gas de átomos de hidrógeno 1D es:

$$Z_{H_{gas}}^{poly} = \frac{L}{\mu} I_0 \left(\frac{\hbar^2 \beta}{\mu^2 m} \right) e^{-\frac{\hbar^2 \beta}{\mu^2 m}} e^{2R\beta \frac{\hbar^2}{4\mu^2 m} \left(-1 + \sqrt{1 + 8\mu^2 \frac{Rm}{\hbar^2}} \right)}. \quad (24)$$

Consideremos la ionización del hidrógeno atómico en equilibrio térmico: $H + \gamma \rightleftharpoons p^+ + e^-$, donde γ es un fotón, p^+ es un hidrógeno ionizado positivamente y e^- es un electrón. Si la temperatura es superior a la energía de ionización (13.6 eV), los átomos de hidrógeno neutro no pueden formarse. Sin embargo, para alguna temperatura suficientemente baja, ya no es posible detener su formación y los átomos de hidrógeno serán abundantes.

Modificaciones *poliméricas* a la ecuación de Saha

Para determinar esta temperatura, llamada de “*recombinación*”, la mecánica estadística da la llamada ecuación de Saha. La ecuación para la fracción de ionización con modificaciones poliméricas para un gas de átomos de hidrógeno 1D es:

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{n\mu} l_0 \left(\frac{\hbar^2 \beta}{\mu^2 m} \right) e^{-\frac{\hbar^2 \beta}{\mu^2 m}} e^{2R\beta} \frac{\hbar^2}{4\mu^2 m} \left(1 - \sqrt{1 + 8\mu^2 \frac{Rm}{\hbar^2}} \right), \quad (25)$$

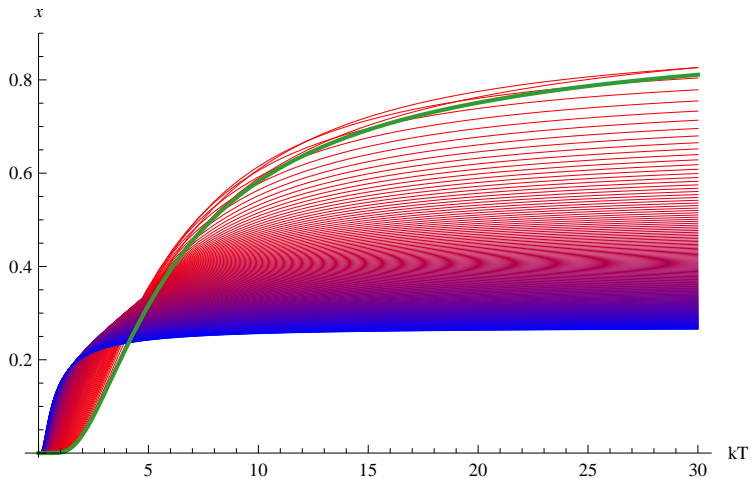
donde $x = n_e/n$ es la fracción de ionización, $n_e = n_p$ es la densidad numérica de electrones y protones dado que el universo es globalmente neutro y $n = n_H + n_p$ es la densidad total de bariones.

En el límite $\mu \rightarrow 0$, consideramos un desarrollo asintótico de l_0 y un desarrollo de la exponencial, obtenemos:

$$\frac{x^2}{1-x} \approx \frac{e^{-R/kT}}{n} \sqrt{\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}} \left[1 + \left(1 + \left(\frac{4R}{kT} \right)^2 \right) \frac{mkT}{8\hbar^2} \mu^2 + \dots \right]. \quad (26)$$

Esto muestra las posibles modificaciones a la fracción de ionización como función de la temperatura y la escala polimérica. Esto cambiaría la temperatura y el corrimiento al rojo de la recombinación, poniendo cotas en la escala polimérica. Podemos ver que la fracción de ionización disminuye a medida que μ aumenta, esto haría difícil definir la temperatura de recombinación.

Modificaciones *poliméricas* a la ecuación de Saha



Conclusiones

- Se consideró la cuantización por lazos de una partícula en 1D. Este modelo incluye la estructura discreta del espacio propia de la cuantización “polimérica”
- Con los espectros de energía modificados, se obtuvieron las funciones de partición que dan lugar a cantidades termodinámicas corregidas por μ . La termodinámica usual se recupera para $\mu \rightarrow 0$.
- μ puede ser una longitud fundamental, como la de Planck, en este caso los efectos resultantes serían muy pequeños. También puede ser un regulador para realizar un procedimiento de renormalización, cuyo límite continuo resulta ser la habitual mecánica cuántica de Schrödinger.
- ENSAMBLE DE OSCILADORES. Hay dos regímenes: $\lambda \ll 1$ Osciladores modificados. $\lambda \gg 1$ rotores análogos
- GAS IDEAL. Se comporta como un sistema de dos niveles separando dos regímenes para $T \sim E_*/2k$ y permite $T < 0$.
- ÁTOMO DE HIDRÓGENO. Existen 2 sectores (\pm) siendo el negativo el físico. Para $\mu \rightarrow 0$, se recupera el espectro usual.
- En los dos primeros sistemas hay un máximo en C_V separando dos regímenes.
- En el caso del Hidrógeno lo que se modifica es la temperatura a la cuál ocurre la transición.

Conclusiones

Las correcciones son similares a las encontradas en *fenomenología de la gravedad cuántica*: GUP's

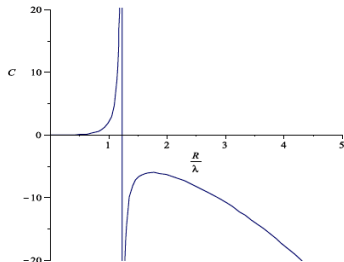
$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \vartheta \Delta p^2), \Rightarrow E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} + \frac{\ell_{min}^2}{L^2} \frac{n^4 \pi^4 \hbar^2}{3mL^2} + \dots$$

Conclusiones

Las correcciones son similares a las encontradas en *fenomenología de la gravedad cuántica*: GUP's

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \vartheta \Delta p^2), \Rightarrow E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} + \frac{\ell_{min}^2}{L^2} \frac{n^4 \pi^4 \hbar^2}{3mL^2} + \dots$$

Este comportamiento se ha estudiado en sistemas gravitacionales tales como los agujeros negros donde el calor específico sufre una transición de fase cerca de la escala de Planck y que depende de la escala de longitud mínima.

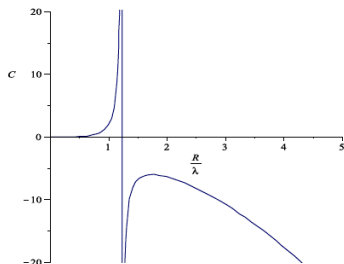


Conclusiones

Las correcciones son similares a las encontradas en *fenomenología de la gravedad cuántica*: GUP's

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \vartheta \Delta p^2), \Rightarrow E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} + \frac{\ell_{min}^2}{L^2} \frac{n^4 \pi^4 \hbar^2}{3mL^2} + \dots$$

Este comportamiento se ha estudiado en sistemas gravitacionales tales como los agujeros negros donde el calor específico sufre una transición de fase cerca de la escala de Planck y que depende de la escala de longitud mínima.



Perspectivas

- Renormalización a escala termodinámica de estos sistemas simples
- Estadísticas cuánticas; \Rightarrow Estadística y estructuras discretas

A graph in polymer quantum mechanics ¹

A graph γ is a numerable set of points $\{x_i | x_i \in \mathbb{R}\}$ with the following properties:

- ① $\{x_i\}$ sequences with no accumulation points.
- ② There is a length l_γ , such that if I is any interval whose length $\ell(I)$ is greater than or equal to l_γ , then the number of points $n(I)$ of γ who are at I satisfy

$$n(I) \leq \rho_\gamma \ell(I), \quad (27)$$

for a constant ρ_γ .

The first condition ensures the convergence of elements in the sum of Cyl_γ .

The second condition implies that all functions in the Schwartz space $\phi \in \mathcal{S}$ are also in Cyl^* .

◀ Back

¹J. L. Willis, PhD Thesis (2004).

Relation between Polymer Quantum Mechanics and Schrödinger Quantum Mechanics

Coherent States

- *Coherent states* are solution to the equation $\hat{a}|\psi_\zeta\rangle = \zeta|\psi_\zeta\rangle$, where \hat{a} is the annihilation operator.
- They are semi-classical states: given a phase point (x_c, p_c) , coherent states are centered in (x_c, p_c) .
- $\{\psi_\zeta\} \in \mathcal{S}_{Sch}$, they form a overcomplete basis of \mathcal{H}_{Sch} .
- As $\mathcal{S}_{Sch} \subset Cyl^*$, the *polymer coherent state* $(\Psi_\zeta | \in Cyl^*$ is defined as the solution to the equation

$$(\Psi_\zeta | e^{\frac{\alpha}{d}\hat{x}} \hat{V}(-\alpha d) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} = e^{\sqrt{a}\alpha\bar{\zeta}} (\Psi_\zeta |. \quad (28)$$

Shadow States

- $|\psi_\gamma^s\rangle \equiv (\Psi | \hat{P}_\gamma$ i.e. the projection $Cyl^* \rightarrow Cyl_\gamma$, with $(\Psi | f) = \langle \psi_\gamma^s | f \rangle$.
- Expectation value:

$$\langle \hat{A} \rangle \equiv \frac{(\Psi | \hat{A} | \psi_\gamma^s \rangle}{\|\psi_\gamma^s\|^2} = A(1 + \tau).$$

Relation between Polymer Quantum Mechanics and Schrödinger Quantum Mechanics

- Fluctuations: $(\Delta\hat{A})^2 := \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2$.
- Shadows of polymer coherent states $|\psi_{\zeta, \gamma}^S\rangle \implies$

$$\langle\hat{x}\rangle = x \left[1 + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\pi^2}{\lambda^2}}\right) \right],$$

$$\langle\hat{K}_{\mu_0}\rangle = k \left[1 + \mathcal{O}(k^2\mu_0^2) + \mathcal{O}(\lambda^2) \right], \quad k = \frac{p}{\hbar}$$

- $\langle\hat{V}(\mu)\rangle = e^{-ik\mu} e^{-\lambda^2/2} \left[1 + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\pi^2}{\lambda^2}}\right) \right]$.
- States differ slightly (if $n \ll 10^7$)

$$|\Delta\psi_n\rangle \equiv |\psi_{\gamma, n}^S\rangle - |\psi_n^{Sch}\rangle \implies \langle\Delta\psi_n|\Delta\psi_n\rangle \simeq (n+1)^{1,35} \lambda^{1,1}.$$

- Polymer Hamiltonian (3) action on the shadows of continuous coherent states $(\Psi|$

$$\hat{H}_{\mu_0} |\psi_n^S\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \left[|\psi_n^S\rangle + \left| \delta\psi(\mathcal{O}(\lambda^2)) \right\rangle \right].$$

Manifestly covariant Statistical Mechanics⁴

Let be a gas \mathcal{S} formed by a large number of equal molecules $s_{(n)}$. They are free almost all the time except during the interaction whose effect will be thermalize the macroscopic system, there are some global quantities \mathcal{O}_I , which are exchanged on the interaction but whose total value is preserved².

- ① An state of the \mathcal{S} , determines a distribution ρ for the components $s_{(n)}$.
- ② That distribution could be calculated assuming that it maximize the number of microstates:

$$\rho = e^{-\theta^I \mathcal{O}_I},$$

with θ^I the intensive thermodynamical parameters that determine the equilibrium respect to the transference of \mathcal{O}_I .

RELATIVISTIC IDEAL GAS

The conserved quantities are the components of 4-momentum p_μ , the probability distribution is:

$$\rho = e^{\theta_\mu p^\mu}, \quad (29)$$

where θ_μ are the intensive parameters that describe the system³.

Although we do not know which functions in the space phase are time or energy, the statistical methods can be applied based on the quantities which are preserved in the thermalizing interaction.

²In the case of *non-manifestly covariant* systems, only the energy is conserved.

³It is called thermal vector Chacón-Acosta, Dagdug, Morales-Técolt (in preparation).

⁴M. Montesinos and C. Rovelli, (2001).

Poisson Resummation Formula

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i y n} dy, \quad (21) \quad (30)$$