Índice general

Introducción

En su libro *An Investigation of the Laws of Thought* [Boo54], George Boole sentó las bases de la lógica moderna. A través de algunas identidades básicas, conocidas como *leyes del pensamiento*, Boole describió la lógica proposicional clásica. Las estructuras que satisfacen estas identidades son las que conocemos como álgebras booleanas.

Huntington [Hun04] fué el primer matemático que trabajó con esta clase de estructuras, y éstas fueron llamadas álgebras booleanas por Scheffer en [Sch13].

La inspiración de las identidades propuestas por Boole es doble: En primer lugar, axiomatizar la lógica proposicional, interpretando a el álgebra $2 = \{0, 1\}$ como los valores de verdad de las proposiciones, y a las operaciones de ésta álgebra como la disyunción, conjunción y negación de fórmulas. En segundo lugar, axiomatizar el álgebra de clases, donde las operaciones se interpretan como la unión intersección y complementación de clases.

En 1921, Emile Post [Pos21] demostró que las identidades de Boole axiomatizan de manera completa a la lógica proposicional, en el sentido de que cualquier verdad a cerca del álgebra 2 es consecuencia de las identidades de Boole.

En 1936, Marshall Stone [Sto36] demostró que toda álgebra Booleana es isomorfa a una álgebra de conjuntos (Teorema de Representación de Stone), es decir, las identidades de Boole axiomatizan de manera completa a las álgebras de clases.

Marshall Stone demostró también la dualidad entre las categorías de álgebras booleanas y espacios booleanos (compactos, Hausdorff y cero-dimensionales). La importancia de esta dualidad radica en la posibilidad de conjugar los lenguajes algebraico y topológico, y hacer que cada una de estas facetas muestre la riqueza de la otra.

Aún más, los resultados de las álgebras booleanas tienen repercusiones en otras áreas de interés matemático como la lógica matemática, donde se han obtenido resultados como las pruebas de los teoremas de completud para las lógicas proposicional y de predicados hechas por Helena Rasiowa y Roman Sikorski[RS70]; el concepto de modelo booleano-valuado, particularmente importante porque la construcción de modelos genéricos para las pruebas de independencia en teoría de conjuntos puede ser vista en el contexto de los modelos booleano valuados.

El presente trabajo pretende mostrar a lector algunos detalles sobre la dualidad de las álgebras booleanas con los espacios topológicos booleanos. En consecuencia, este trabajo se inscribe en las áreas de Álgebra y Topología, aunque hace énfasis en el aspecto topológico. Pero más aún, se inscribe en el proyecto de investigación que el autor desarrolla con el fin de obtener el grado de doctor. La dualidad de las álgebras booleanas en una herramienta muy útil en la investigación sobre las propiedades de los cocientes de las álgebras potencia de ω.

El primer capítulo tiene carácter introductorio. En éste se revisan las generalidades de las álgebras booleanas, se definen las subálgebras, homomorfismos, álgebras cociente, productos y álgebras libres. La última sección está dedicada a las álgebras características de los espacios topológicos en general y de los espacios booleanos en particular.

En el segundo capítulo haremos una prueba de los teoremas de representación y de la dualidad de Stone, y mostraremos las cualidades de los espacios duales de ciertas clases específicas de álgebras booleanas como las álgebras atómicas, las álgebras sin átomos, las álgebras completas, etc.

Capítulo 1

Teoría General de las Álgebras Booleanas

1.1. Álgebras Booleanas: Definición y ejemplos

Definición 1.1.1 *Una tupla* $\mathbb{A} = \langle A, \vee, \wedge, {}^c, 0, 1\rangle$ *es una álgebra booleana si* $\vee, \wedge : A \times A \to A$, ${}^c : A \to A$, $0, 1 \in A$, *y para todos* $a, b, c \in A$

$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$	*conmutatividad*
$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	*asociatividad*
$(a \vee b) \wedge b = b$	$(a \wedge b) \vee b = b$	*absorción*
$a \vee a^c = 1$	$a \wedge a^c = 0$	*complementos*
$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$	$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$	*distributividad*

Ejemplo 1.1.2 *Sea* I *un conjunto. Denotemos al conjunto potencia de* I *con* $P(I)$. *La tupla* $\langle P(I), \cup, \cap, I\backslash, \emptyset, I\rangle$ *es una álgebra booleana.*

Ejemplo 1.1.3 *Sea* I *un conjunto. Sea* $FC(I)$ *la familia de subconjuntos finitos o de complemento finito de* I. $\langle FC(I), \cup, \cap, I\backslash, \emptyset, I\rangle$ *es una álgebra booleana, llamada el álgebra finita-cofinita de* I.

En lo sucesivo, mantendremos la convención de denotar por A, B, etc al conjunto subyacente del álgebra $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, etc.

Una *retícula* es un conjunto parcialmente ordenado $\langle R, \leq\rangle$, en el que para cada par de elementos hay un supremo (mínima cota superior) y un ínfimo (máxima cota inferior). En retículas con elementos máximo y mínimo se define un *complemento* de un elemento a como un elemento a' de la retícula cuyo supremo con a es el máximo de la retícula y cuyo ínfimo con a es el mínimo de la retícula. Una retícula es *complementada* cuando tiene máximo y mínimo y cada elemento tiene un complemento. Es costumbre denotar al supremo (resp. ínfimo) del par $\{a, b\}$ mediante $a \vee b$ (resp. $a \wedge b$). Una retícula es *distributiva* si

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ para todos $a, b, c \in R$. Se demuestra que en las retículas complementadas y distributivas, todo elemento tiene un único complemento.

En cada álgebra booleana $\mathbb{A}$, se define la relación $\leq$ de modo que para todos $a, b \in A$ $a \leq b$ si y sólo si $a \vee b = b$ (o equivalentemente, $a \wedge b = a$). A con esta relación adquiere la estructura de retícula complementada y distributiva.

Análogamente, una retícula complementada y distributiva define una álgebra booleana. Esto es, si se definen las operaciones $\wedge$ y $\vee$ como el supremo e ínfimo respectivamente, y ^{c} como el complemento, entonces la retícula tiene estructura de álgebra booleana.

1.2. Dualidad, filtros e ideales

El lenguaje de las álgebras booleanas, es un lenguaje de primer orden consistente en dos símbolos funcionales binarios (para las operaciones $\vee$ y $\wedge$), un símbolo funcional unitario (para la operación ^{c}), y dos símbolos de constante (para 0 y 1). A cada término de éste lenguaje, corresponde otro, llamado el *término dual*, que se obtiene cambiando los símbolos de operación $\wedge$ por $\vee$ y viceversa, y los símbolos constantes 0 por 1 y viceversa. por ejemplo, el término dual de $x \wedge (y \vee 0)$ es el término $x \vee (y \wedge 1)$. Análogamente, a cada fórmula del lenguaje de las álgebras booleanas corresponde una *fórmula dual* que consiste en reemplazar todos sus términos por los correspondientes términos duales.

Observe que toda fórmula coincide con su doble dual. Observe además que en la lista de axiomas para las álgebras booleanas, cada uno de éstos viene acompañado por su dual. Esto prueba el siguiente:

Lema 1.2.1 (Principio de dualidad) *Para toda fórmula booleana α, si ésta es consecuencia de la teoría de álgebras booleanas, entonces la fórmula dual de α también lo es.*

Para ejemplificar esto, notemos que la noción dual del orden $\leq$ de una álgebra booleana (recordar: $a \leq b$ si y sólo si $a \vee b = b$) es el orden inverso, es decir, el dual de la inecuación $a \leq b$ es la inecuación $a \geq b$.

Si $\mathbb{A} = \langle A, \vee, \wedge, ^c, 0, 1\rangle$ es una álgebra booleana entonces el álgebra opuesta de $\mathbb{A}$ es $\mathbb{A}^{op} = \langle A, \wedge, \vee, ^c, 1, 0\rangle$, que también es una álgebra booleana.

Una noción de gran importancia en las álgebras booleanas es la de filtro.

Definición 1.2.2 (Stone, 1934) *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. Un* filtro *en $\mathbb{A}$ es un subconjunto F de A que satisface las siguientes condiciones:*

1. $1 \in F$, $0 \notin F$

2. $(\forall x, y \in F)(x \wedge y \in F)$

3. $(\forall x \in F)(\forall y \in A)(x \leq y \rightarrow y \in F)$

Observe que la condición 3 puede ser reemplazada por

3'. $(\forall x \in F)(\forall y \in A)(x \vee y \in F)$

Observe además que no es posible que exista $a \in F$ tal que $a^c \in F$, pues al pertenecer ambos a y a^c a F, también $0 = a \wedge a^c \in F$.

La noción dual de filtro es la de ideal.

Definición 1.2.3 (Stone, 1934) *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. Un* ideal *en $\mathbb{A}$ es un subconjunto I de A que satisface las siguientes condiciones:*

1. $0 \in I$, $1 \notin I$

2. $(\forall x, y \in I)(x \vee y \in I)$

3. $(\forall x \in I)(\forall y \in A)(y \leq x \rightarrow y \in I)$

Nuevamente, observe que la condición 3 puede ser reemplazada por

3'. $(\forall x \in I)(\forall y \in A)(x \wedge y \in I)$

Dado un filtro F en una álgebra booleana $\mathbb{A}$, se define el *ideal dual de F* como el conjunto $I_F = \{a \in A : a^c \in F\}$. Análogamente, dado un ideal I en $\mathbb{A}$, se define el *filtro dual de I* como el conjunto $F_I = \{a \in A : a^c \in I\}$.

En lo sucesivo evitaremos dar explícitamente las definiciones de las nociones duales de las nociones definidas, y nos limitaremos a sólo mencionar sus nombres.

Definición 1.2.4 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y F un filtro en $\mathbb{A}$.*

1. *Un subconjunto $B \subset F$ es una* base de filtro *para F si para cada $a \in F$ existe $b \in B$ tal que $b \leq a$.*

2. *Un subconjunto $S \subset F$ es una* subbase de filtro *para F si para cada $a \in F$ existen $a_1, \ldots a_n \in S$ tales que $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \leq a$.*

De manera dual se define *base de ideal* y *subbase de ideal*.

Definición 1.2.5 *Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $a \in A$. Se dice que a es* positivo *si y sólo si $a \neq 0$. A^+ denota al conjunto $A \setminus \{0\}$ de elementos positivos de A.*

Se dice que un filtro F es *principal* cuando este tiene una base que consta de un único elemento, es decir, cuando existe $a \in A^+$ tal que $F = \{x \in A : a \leq x\}$.

Definición 1.2.6 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $B \subset A$. Se dice que B tiene la* propiedad de la intersección finita (pif) *si para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in B$, $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \neq 0$.*

Note que todo filtro es un conjunto con la pif. Más aún, todo conjunto con la pif es subbase de algún filtro. Ésto queda demostrado por los dos siguientes lemas cuyas pruebas son muy simples.

Lema 1.2.7 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $C \subset A$ un conjunto con la pif. Existe un filtro F en $\mathbb{A}$ tal que $C \subset F$.*

Lema 1.2.8 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $\mathcal{C}$ una familia de filtros en $\mathbb{A}$. Entonces, $\cap\mathcal{C}$ es un filtro en $\mathbb{A}$.*

De este modo, dado un conjunto C con la pif, éste es subbase del mínimo filtro que lo contiene. A éste filtro se le llama el *filtro generado* por C.

Definición 1.2.9 *Sea F un filtro en una álgebra booleana $\mathbb{A}$. Entonces F es un* ultrafiltro *si para cualquier $a \in A$, o bien $a \in F$ o bien $a^c \in F$.*

Respecto a esta condición, observe que vale agregar que no ambos, a y a^c pertenecen a F.

Un resultado bien conocido sobre ultrafiltros es el siguiente

Teorema 1.2.10 *Sea F un filtro en una álgebra booleana $\mathbb{A}$. Son equivalentes:*

(i) F es un ultrafiltro.

(ii) F es filtro primo*, es decir, para cualesquiera $a, b \in A$ con $a \vee b \in F$ se tiene que o bien $a \in F$ o bien $b \in F$.*

(iii) F es un filtro maximal*, es decir, para cada filtro G tal que $F \subseteq G$ se tiene que $G = F$.*

Es una consecuencia del Lema de Zorn el siguiente

Teorema 1.2.11 (Teorema del ultrafiltro Ulam, 1929; Tarski, 1930) *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y F un filtro en $\mathbb{A}$. Existe un ultrafiltro U en $\mathbb{A}$ tal que $F \subset U$.*

Es más común encontrar en la literatura la versión dual de este teorema, conocido como el Teorema del Ideal Primo Booleano. Para este teorema tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.2.12 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $S \subset A$. Si S tiene la pif entonces existe un ultrafiltro U en $\mathbb{A}$ tal que $S \subset U$. Particularmente, si $a \in A^+$ entonces existe un ultrafiltro U en $\mathbb{A}$ tal que $a \in U$. Más aún, si $a, b \in A$ y $a \nleq b$ entonces existe un ultrafiltro U tal que $a \in U$ y $b \notin U$.*

1.3. Subálgebras booleanas y completez

Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. Una *subálgebra* de $\mathbb{A}$ es un subconjunto $B \subset A$ que tiene a los elementos 0 y 1 de $\mathbb{A}$, y que está cerrado bajo las operaciones $\vee, \wedge, ^c$.

Hasta aquí, el interés se ha centrado en las operaciones finitarias $\vee, \wedge$ y ^{c}. Sin embargo la faceta de retícula complementada distributiva nos permite pensar en las operaciones infinitarias $\bigvee C$ y $\bigwedge C$ para $C \subset A$.

Definición 1.3.1 *Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $C \subseteq A$. $\bigvee C$ es la mínima cota superior de C y $\bigwedge C$ es la máxima cota inferior de C, cuando éstas existen en C.*

Naturalmente, en una álgebra booleana dada no tiene por qué existir ninguno de éstos términos cuando C es infinito. Por ejemplo, si $\mathbb{A}$ es el álgebra finita-cofinita (ver 1.1.3) de ω entonces la familia de conjuntos $C = \{\omega \setminus \{2n\} : n \in \omega\}$ no tiene ínfimo en $\mathbb{A}$. Sin embargo, las álgebras potencia siempre tienen ínfimos y supremos de cualquier subconjunto. Note que que el dual de $\bigwedge C$ es $\bigvee C$.

Definición 1.3.2 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y κ un cardinal infinito. Decimos que*

(a) $\mathbb{A}$ *es* completa *si para cada subconjunto $C \subseteq A$, $\bigwedge C$ y $\bigvee C$ existen en A.*

(b) $\mathbb{A}$ *es* κ-completa *si para cada subconjunto $C \subset A$ con cardinalidad menor que κ, $\bigwedge C$ y $\bigvee C$ existen en A.*

(c) $\mathbb{A}$ *es* σ-completa *si es $\aleph_1$ completa.*

Note que toda álgebra booleana es $\aleph_0$ completa.

Las nociones de completez y κ completez también se pueden llevar al terreno de las subálgebras y los filtros e ideales. Denotaremos con $\bigvee_{\mathbb{A}}$ (respectivamente $\bigwedge_{\mathbb{A}}$) al operador supremo (resp. ínfimo) en $\mathbb{A}$.

Definición 1.3.3 *Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana, $\mathbb{B}$ una subálgebra de $\mathbb{A}$. $\mathbb{B}$ es una* subálgebra completa *de $\mathbb{A}$ si para cada subconjunto $C \subset B$, $\bigwedge_{\mathbb{B}} C$ y $\bigvee_{\mathbb{B}} C$ existen en B y $\bigwedge_{\mathbb{B}} C = \bigwedge_{\mathbb{A}} C$ y $\bigvee_{\mathbb{B}} C = \bigvee_{\mathbb{A}} C$.*

Definición 1.3.4 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $C \subset \mathbb{A}$. Se dice que C es* denso *en $\mathbb{A}$ si para cualquier $a \in A^+$ existe $c \in C^+$ tal que $c \leq a$.*

Particularmente, una subálgebra $\mathbb{B}$ de $\mathbb{A}$ es densa si para cada $a \in A^+$ existe $b \in B^+$ tal que $b \leq a$

Dado un subconjunto C de una álgebra booleana dada $\mathbb{A}$ es posible encontrar una mínima subálgebra de $\mathbb{A}$ que contiene a C. Ésto queda garantizado por el siguiente

Lema 1.3.5 *La intersección de una familia no vacía de subálgebras de una álgebra booleana dada $\mathbb{A}$ es una subálgebra de $\mathbb{A}$.*

De este modo, la subálgebra $\langle C \rangle$ de $\mathbb{A}$ generada por C queda definida por:

$$\langle C \rangle = \bigcap \{B \subseteq A : \mathbb{B} \text{ es subálgebra de } \mathbb{A} \text{ y } C \subseteq B\}$$

Ahora veremos la apariencia de los elementos de $\langle C \rangle$. Para esto introduciremos notación

Definición 1.3.6 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ Para cada $a \in A$, definimos al elemento εa como:*

$$(+1)a = a \qquad (-1)a = a^c$$

Para cada $C \subseteq B$ llamaremos una conjunción elemental sobre C *a cualquier conjunción finita cuyos conyuntos son de la forma εa con $a \in C$. Esto es, una conjunción elemental tiene la forma $\varepsilon_1 a_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n a_n$ donde $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$ y $a_i \in C$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Un elemento de a de A está en forma normal disyuntiva sobre C *si a es una disyunción finita de conjunciones elementales sobre C. Esto es, a está en forma normal disyuntiva sobre C si $a = c_1 \vee \cdots \vee c_m$, donde c_i es una conjunción elemental sobre C para cada $i = 1, \ldots, m$.*

Ahora bien, tenemos caracterizados a todos los elementos de la subálgebra generada por C mediante el siguiente

Teorema 1.3.7 (de la forma normal disyuntiva) *Los elementos de $\langle C \rangle$ son exactamente todos los elementos de A representables en forma normal disyuntiva sobre C.*

1.4. Homomorfismos y cocientes de álgebras booleanas

Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ álgebras booleanas. Un *homomorfismo* de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ es una función $f : A \to B$ tal que $f(0) = 0, f(1) = 1$ y para todos $x, y \in A$,

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \ \text{ y } \ f(x^c) = f(x)^c$$

Un *monomorfismo* de álgebras booleanas es un homomorfismo inyectivo. Un *epimorfismo* es un homomorfismo suprayectivo. Un *isomorfismo* es un homomorfismo biyectivo.

Definición 1.4.1 *Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de álgebras booleanas. Se define el* núcleo *de f por*

$$nuc(f) = \{a \in A : f(a) = 0\}$$

El dual del núcleo de un homomorfismo f es conocido como la *coraza* de f, y será denotado por $cor(f)$. Es muy sencillo demostrar que el núcleo de un homomorfismo es un ideal en el dominio, la coraza de un homomorfismo es un filtro en el dominio y la imagen de un homomorfismo es una subálgebra del contradominio.

También es sencillo demostrar el siguiente:

Lema 1.4.2 *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ álgebras booleanas y $f : A \to B$ homomorfismo. Son equivalentes:*

I *f es monomorfismo.*

II $nuc(f) = \{0\}$

III $cor(f) = \{1\}$

Dado un ideal I en una álgebra booleana $\mathbb{A}$, se define la *congruencia módulo I* denotada por $\sim_I$ como sigue: Para cualesquiera $a, b \in A$,

$$a \sim_I b \text{ si y sólo si existe } c \in I \text{ tal que } a \vee c = b \vee c$$

Se define la operación *diferencia simétrica*, denotada por $\triangle$ mediante la fórmula:

$$(\forall a, b \in A) \qquad a \triangle b = (a \wedge b^c) \vee (a^c \wedge b)$$

La congruencia módulo I se puede también expresar en los siguientes términos:

$$a \sim_I b \qquad \text{si y sólo si} \qquad a \triangle b \in I$$

puesto que $a \triangle b$ es el mínimo elemento x de A tal que $a \vee x = b \vee x$.

Como es de esperarse, la congruencia módulo I es una relación de equivalencia. Denotaremos a la clase de equivalencia de a módulo I por $[a]_I$. Además, $\sim_I$ es una relación de congruencia, lo cual prueba el siguiente

Lema 1.4.3 *El cociente $A/_{\sim_I}$ es una álgebra booleana dotada con las operaciones definidas por representantes, es decir, $[a]_I \vee [b]_I = [a \vee b]_I$, $[a]_I \wedge [b]_I = [a \wedge b]_I$ y $[a]_I^c = [a^c]_I$ satisfacen los axiomas de las álgebras booleanas.*

Es común denotar al cociente $\mathbb{A}/_{\sim_I}$ con $\mathbb{A}/_I$ y es llamada el *álgebra cociente de $\mathbb{A}$ módulo I*. Como siempre, también es posible definir la congruencia módulo F con F filtro en $\mathbb{A}$, de manera dual a la definición anterior. Las álgebras cociente módulo I y módulo F_I (el filtro dual de I) son isomorfas, desde que para cada $a \in A$, la clase $[a]_I$ es igual a la clase $[a]_{F_I}$.

La proyección canónica $\pi_I : A \to A/_I$ dada por $\pi(a) = [a]_I$ es un epimorfismo de álgebras booleanas.

Teorema 1.4.4 (de isomorfismos) *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ álgebras booleanas, y $f : A \to B$ epimorfismo. Existe un único isomorfismo*
$\bar{f} : A/nuc(f) \to B$ tal que $f = \bar{f} \circ \pi_{nuc(f)}$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{nuc(f)}"'] & & B \\
& A/_{nuc(f)} \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Prueba. Se define $\bar{f} : A/nuc(f) \to B$ como sigue: Para cada $a \in A$, $\bar{f}([a]) = f(a)$. Nótese que la definición de $\bar{f}([a])$ no depende de representantes, puesto que si $b \in [a]$ entonces $f(b) = f(a)$. Es claro que $\bar{f}$ hace conmutar el diagrama y que es epimorfismo. Dado que $[a] \neq [b]$ implica $f(a) \neq f(b)$, tenemos que $\bar{f}$ es monomorfismo. Si $g : A/nuc(f) \to B$ y existe $a \in A$ tal que $g([a]) \neq \bar{f}([a]) = f(a)$, entonces g no hace conmutar el diagrama, lo cual prueba la unicidad de $\bar{f}$. ■

Como siempre, el teorema de isomorfismos es válido en su versión dual, es decir, si cambiamos "nucleo" por "coraza".

Como consecuencia de éste teorema, tenemos que *las imágenes homomórficas de las álgebras booleanas son esencialmente los cocientes* módulo un filtro o un ideal.

El conjunto $2 = \{0, 1\}$ dotado con su orden usual, es una retícula complementada distributiva, en consecuencia una álgebra booleana.

Dado un ultrafiltro F sobre una álgebra booleana $\mathbb{A}$, el cociente $\mathbb{A}/_F$ resulta ser isomorfo al álgebra 2. Llamaremos *homomorfismo característico* a la función $f : A \to 2$ dada por:

$$f(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in F \\ 0 & \text{si } a \notin F \end{cases}$$

1.4.1. Extensión de homomorfismos

Examinaremos algunas circunstancias bajo las cuales queda determinado un homomorfismo de álgebras booleanas de manera única.

Lema 1.4.5 *Sean $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ álgebras booleanas. Si f y g son homomorfismos de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ que coinciden en un conjunto de generadores para $\mathbb{A}$ entonces $f = g$.*

Prueba. Sea C un conjunto de generadores para $\mathbb{A}$ que incluye a C. Sea $A_0 = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$. $\mathbb{A}_0$ es una subálgebra de $\mathbb{A}$ que incluye a C, por tanto $\mathbb{A}_0 = \mathbb{A}$. ■

Teorema 1.4.6 (Criterio de extensión de Sikorski) *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ álgebras booleanas. Supongamos que $C \subset A$ genera a $\mathbb{A}$ y que $f : C \to B$. La siguiente condición es necesaria y suficiente para que sea posible extender f en un homomorfismo de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$: Para cada $n \in \omega$, $c_1, \ldots, c_n \in C$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{+1, -1\}$, si $\varepsilon_1 c_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n c_n = 0$ en $\mathbb{A}$ entonces $\varepsilon_1 f(c_1) \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n f(c_n) = 0$ en $\mathbb{B}$.*

Prueba. La necesidad es obvia. Para la suficiencia empecemos por el caso en que C es finito, digamos $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$. Sea $E = {}^{\{1,\ldots,n\}}\{+1, -1\}$ el conjunto de todas las funciones de $\{1, \ldots, n\}$ en $\{+1, -1\}$. Las conjunciones elementales en $\mathbb{A}$ sobre C quedan descritas mediante la fórmula

$$p_e = e(1)c_1 \wedge \cdots \wedge e(n)c_n$$

con $e \in E$, y los elementos escritos en forma normal disyuntiva tienen la forma

$$s_M = \bigvee_{e \in M} p_e$$

con $M \subseteq E$. Similarmente se define en $\mathbb{B}$ las conjunciones

$$q_e = e(1)f(c_1) \wedge \cdots \wedge e(n)f(c_n)$$

con $e \in E$ y las disyunciones

$$t_M = \bigvee_{e \in M} q_e$$

con $M \subseteq E$. Por el teorema de la forma normal, $A = \langle C \rangle = \{s_M : M \subseteq E\}$. La función $g : A \to B$ dada por

$$g(s_M) = t_M$$

para cada $M \subseteq E$ es el homomorfismo buscado. En primer lugar, veamos que g está bien definida, es decir, si $s_M = s_{M'}$ entonces $t_M = t_{M'}$ para $M, M' \subseteq E$. Observe que para cualesquiera $N, N' \subseteq E$

- $s_N \wedge s_{N'} = s_{N \cap N'}$
- $s_N \vee s_{N'} = s_{N \cup N'}$
- $s_N^c = s_{E \setminus N}$

Éstas propiedades son consecuencia de que si $e \neq e' \in E$ entonces $p_e \wedge p_{e'} = 0$ y de que $\bigvee_{e \in E} p_e = 1$. Además demuestran que la asignación que a cada M lleva en s_M es un homomorfismo de álgebras booleanas de la potencia $P(E)$ en $\langle C \rangle$. De este modo, si $s_M = s_{M'}$ entonces $0 = s_M \vartriangle s_{M'} = s_{M \vartriangle M'}$, es decir, $p_e = 0$ para cada $e \in M \vartriangle M'$. Por hipótesis, también $q_e = 0$ para cada $e \in M \vartriangle M'$, y así $t_M = t_{M'}$. Las tres propiedades anteriores también demuestran que g es un homomorfismo, y finalmente, haciendo para cada $i = 1, \ldots, n$ $M_i = \{e \in E : e(i) = +1\}$, tenemos que $c_i = s_{M_i}$, y así $g(c_i) = t_{M_i} = \bigvee_{e \in M_i} q_e = f(c_i)$, lo cual prueba que g extiende a f.

Ahora veamos el caso en el que C es infinito. Por el caso 1 y por el teorema anterior, para cada subconjunto finito $D \subset C$ existe un único homomorfismo $g_D : \langle D \rangle \to B$ que extiende a $f \restriction D$. Ahora bien, si H es un subconjunto de C que extiende a D entonces la restricción de g_H en $\langle D \rangle$ también extiende a $f \restriction D$, lo cual prueba que g_H extiende a g_D. Así, $\{g_D : D \text{ es subconjunto finito de } C\}$ es una familia dirigida por $\subseteq$ de homomorfismos de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ que exienden a f. Es sencillo ver que la unión de una familia dirigida de homomorfismos es un homomorfismo cuyo dominio es la unión de los dominios de los elementos de la familia. De este modo, la función $g = \bigcup\{g_D : D \text{ es subconjunto finito de } C\}$ es el homomorfismo buscado. ■

1.5. Relativizaciones y productos

1.5.1. Relativizaciones

Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $a \in A$. Se define la *relativización* de $\mathbb{A}$ en a como el conjunto

$$\mathbb{A} \restriction a = \{x \in A : x \leq a\}$$

Lema 1.5.1 *La relativización $\mathbb{A} \upharpoonright a$ con el orden heredado de $\mathbb{A}$ es una álgebra booleana, llamada* el álgebra factor *de $\mathbb{A}$ respecto de a.*

Prueba. $\mathbb{A} \upharpoonright a$ está cerrado bajo las operaciones $\vee$ y $\wedge$. Su elemento máximo ahora es a, y el mínimo es 0. La operación que para cada $x \in \mathbb{A} \upharpoonright a$ le asocia $a \wedge x^c$ es la complementación de $\mathbb{A} \upharpoonright a$. ∎

Claramente, $\mathbb{A} \upharpoonright a$ no es una subálgebra de $\mathbb{A}$ si $a \neq 1$. Sin embargo, el mapeo proyección $p_a : A \to A \upharpoonright a$ dado por

$$p_a(x) = a \wedge x$$

es un epimorfismo que deja fijo a $\mathbb{A} \upharpoonright a$, es decir, si $x \in \mathbb{A} \upharpoonright a$ entonces $p_a(x) = x$.

1.5.2. Productos finitos

Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son álgebras booleanas, el producto cartesiano $A \times B$ puede ser dotado de las operaciones $\vee, \wedge, ^c$ definiendolas por componentes. El siguiente lema explica por qué las álgebras de la forma $\mathbb{A} \upharpoonright a$ se llaman álgebras factor.

Lema 1.5.2 *Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $a \in A$. Entonces*

$$\mathbb{A} \cong (\mathbb{A} \upharpoonright a) \times (\mathbb{A} \upharpoonright a^c)$$

Prueba. Sean $g : A \to (A \upharpoonright a) \times (A \upharpoonright a^c)$ y $h : (A \upharpoonright a) \times (A \upharpoonright a^c) \to A$ las funciones dadas por

$$g(x) = (x \wedge a, x \wedge a^c)$$

y

$$h(y, z) = y \vee z$$

g y h son homomorfismos y son inversas una de la otra. ∎

En general, podemos identificar al producto finito $\prod_{i=0}^{n} \mathbb{A}_i$ de las algebras $\mathbb{A}_0, \ldots, \mathbb{A}_n$ con una álgebra de modo tal que los elementos máximos $1_{\mathbb{A}_i}$ forman una partición de la unidad, es decir,

$$1 = a_0 \vee \cdots \vee a_n$$

con $a_i \wedge a_j = 0$ si $i \neq j$. En tal caso, cada elemento a se factoriza de manera única en la forma:

$$a = b_0 \vee \cdots \vee b_n$$

con $b_i \leq a_i$ para todo $i = 0, \ldots, n$.

1.5.3. Productos arbitrarios

Sea $\{\mathbb{A}_i : i \in I\}$ una familia de álgebras booleanas. El producto cartesiano $\prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$ dotado con las operaciones definidas por componentes es una álgebra booleana. Para cada $i \in I$ el mapeo proyección $pr_i : \prod_{i\in I} A_i \to A_i$ es un epimorfismo. Las notaciones:

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i \quad \text{y} \quad \mathbb{A}^I$$

son autoexplicativas.

Toda potencia 2^I es isomorfa al álgebra potencia $P(I)$. Un isomorfismo está dado por $f \mapsto \{i \in I : f(i) = 1\}$.

El producto de álgebras booleanas tiene la siguiente propiedad universal:

Teorema 1.5.3 *Dada un álgebra booleana $\mathbb{B}$ y una familia $\{f_i : i \in I\}$ de homomorfismos tales que para cada $i \in I$ $f_i : B \to A_i$, existe un único homomorfismo $f : B \to \prod_{i\in I} A_i$ tal que para cada $i \in I$ $pr_i \circ f = f_i$.*

Ésto quiere decir que el producto $\prod_{i\in I} \mathbb{A}_i$ es, salvo isomorfismo, la única álgebra booleana tal que para cada álgebra booleana $\mathbb{B}$ y cada familia $\{f_i : i \in I\}$ de homomorfismos tales que para cada $i \in I$ $f_i : B \to A_i$, existe un único homomorfismo $f : B \to \prod_{i\in I} A_i$ tal que para cada $i \in I$ el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \prod_{i\in I} A_i \arrow[dd, "pr_i"] \\
B \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & \\
& A_i
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Prueba. Sea $f : B \to \prod_{i\in I} A_i$ la función tal que en la i-ésima coordenada $f(b)_i = f_i(b)$. ■

1.6. Álgebras booleanas libres

La inspiración de la construcción de álgebras libres se basa en la generación de éstas a partir de conjuntos algebraicamente independientes, es decir, que no satisfacen más ecuaciones que las consecuencias de los axiomas de álgebras booleanas. Cada una de éstas debe quedar caracterizada salvo isomorfismo por el número de generadores libres.

Definición 1.6.1 *Sea I un conjunto. Un álgebra booleana* libre *sobre I es un par (e, F) tal que F es una álgebra booleana y $e : I \to F$ es tal que para cada función f de I en una álgebra A existe un único homomorfismo $g : F \to A$ tal que $g \circ e = f$.*

Por definición, si $i_1, \ldots i_n$ son elementos distintos de I entonces toda ecuación que se satisfaga por los elementos $e(i_1), \ldots, e(i_n)$ de F será satisfecha también por *cualesquiera* elementos $a_1, \ldots, a_n$ de cualquier álgebra booleana A. Los siguientes teoremas garantizan la existencia y unicidad del álgebra generada libremente por cualquier conjunto I.

Teorema 1.6.2 (Existencia) *Sea I un conjunto. Existe una álgebra libre sobre I.*

La demostración de éste teorema se dará en la subsección 2.3.3

Teorema 1.6.3 (Unicidad) *Supongamos que (e, F) y (e', F') son álgebras libres sobre I e I' respectivamente, y $f : I \to I'$ una biyección. Entonces hay un único isomorfismo $g : F \to F'$ tal que $g \circ e = e' \circ f$, es decir, tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"] & F \arrow[d, dotted, "g"] \\ I' \arrow[r, "e'"'] & F' \end{tikzcd}$$

conmuta.

El crtiterio de extensión de homomorfismos de Sikorski 1.4.6 permite dar una descripción alternativa de la generación libre. Para esto introduciremos una nueva definición.

Definición 1.6.4 *Un subconjunto C de una álgebra booleana A es* independiente *si todas las conjunciones elementales no triviales sobre C son distintas de cero. Es decir, si para cualesquiera subconjuntos finitos ajenos $\{c_1, \ldots, c_n\}$ y $\{d_1, \ldots, d_m\}$ de C sucede que*

$$c_1 \wedge \cdots \wedge c_n \wedge d_1^c \wedge \cdots \wedge d_m^c \neq 0$$

Bajo esta suposición, la subálgebra de A generada por C se dice que es independientemente generada o libremente generada por C.

Teorema 1.6.5 (Caracterización de las álgebras libremente generadas) *Sea e una función que mapea un conjunto C en una álgebra booleana F. El par (e, F) es libre sobre C si y sólo si e es inyectiva y $e[C]$ genera independientemente a F.*

Prueba. Supongamos que (e, F) es libre sobre C. Si f no fuera inyectiva, podríamos tomar $a \neq b \in C$ tales que $e(a) = e(b)$ y tomar cualquier función f de C en el álgebra 2 tal que $f(a) \neq f(b)$. Claramente, no hay $g : F \to 2$ tal que $g \circ e = f$, lo cual quiere decir que (e, F) no es libre sobre C, de donde, e es inyectiva.

Ahora supongamos que $e[C]$ genera una subálgebra propia de F. Es fácil ver que existen dos ultrafiltros p y q sobre F tales que $p \cap \langle C \rangle = q \cap \langle C \rangle$.

Simplemente hay que tomar $a \in F \setminus \langle e[C] \rangle$ y un ultrafiltro r en $\langle e[C] \rangle$ que extienda a $G \cup G'$ donde $G = \{b \in \langle e[C] \rangle : a \leq b\}$ y $G' = \{b \in \langle e[C] \rangle : a^c \leq b\}$. Tomando p y q ultrafiltros en F que extiendan a $r \cup \{a\}$ y a $r \cup \{a^c\}$ tenemos los ultrafiltros requeridos. Sean $g, g' : F \to 2$ los homomorfismos característicos de p y q respectivamente. Entonces $g \neq g'$ pero $g \restriction \langle e[C] \rangle = g' \restriction \langle e[C] \rangle$ lo cual contradice la unicidad de las extensiones de homomorfismos en la definición de álgebras libres.

Si $e[C]$ no fuera independiente, tomemos dos subconjuntos finitos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, \ldots, y_m\}$ de $e[C]$ tales que $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \wedge y_1^c \wedge \cdots \wedge y_m^c = 0$ y sea $f : e[C] \to 2$ tal que f lleva a cada x_i en 1 y a cada y_i en 0. Por el teorema de extensión de Sikorski, f no tiene una extensión a F, lo cual es una contradicción.

Conversamente, supongamos que $e[C]$ es un conjunto de generadores independientes para F entonces, por el criterio de extensión de Sikorski, cualquier función de $e[C]$ en cualquier álgebra booleana tiene una extensión a F. La extensión es única, por el lema 1.4.5 ■

1.7. Átomos

Definición 1.7.1 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. Un elemento $a \in A$ es un* átomo *si es minimal en A^+, es decir, si no existe un elemento $x \in A^+$ tal que $x < a$. $\mathbb{A}$ es atómica si para cada $a \in A^+$ existe un átomo $b \in A$ tal que $b \leq a$*

Denotaremos con $At(A)$ al conjunto de átomos del álgebra booleana $\mathbb{A}$.

Las álgebras potencia $P(I)$ de un conjunto I siempre son atómicas. Los átomos de éstas son justamente los unitarios $\{i\}$ con $i \in I$. En la sección 2.3.4 daremos ejemplos de álgebras no atómicas.

Lema 1.7.2 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. Si $a \in A$ es un átomo entonces para cada $b \in A^+$, o bien $a \leq b$ o bien $a \leq b^c$.*

Prueba. Supongamos que a es un átomo y $a \nleq b$. En consecuencia, $a \wedge b^c \neq 0$. Por la minimalidad de a en A^+ tenemos que $a = a \wedge b^c$ lo cual equivale a $a \leq b^c$. ■

Una propiedad importante de los átomos en las álgebras atómicas es el siguiente

Lema 1.7.3 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana atómica.*
Si $b, c \in A$ con $b \nleq c$ entonces hay un átomo a tal que $a \leq b$ y $a \nleq c$.

Prueba. Observemos que si $b \nleq c$ entonces $b \wedge c^c \neq 0$. Sea a es un átomo tal que $a \leq b \wedge c^c$. Entonces $a \leq b$ y $a \leq c^c$, por lo que $a \nleq c$. ■

1.8. El álgebra de cerrados y abiertos de un espacio topológico

Supondremos conocidas las nociones elementales de la topología general (espacio topológico, conjuntos abiertos, cerrados, bases, etc). Denotaremos a los espacios topológicos y a sus conjuntos subyacentes mediante letras mayúsculas X, Y, Z mientras esto no provoque confusión. Discutiremos específicamente sobre los espacios booleanos. A continuación las definiciones

Un espacio topológico X es

- *cerodimensional* si tiene una base de conjuntos cerrados (y abiertos).
- *Booleano* si es compacto, Hausdorff y cerodimensional.

En todo espacio topológico X, la familia

$$Clop(X) = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y abierto } \}$$

es una álgebra booleana con las operaciones conjuntistas usuales, y es llamada el *álgebra característica* o *álgebra dual* de X. Note que el álgebra característica de un espacio topológico es una álgebra de conjuntos.

En un espacio booleano X, el álgebra característica $Clop(X)$ es una base para la topología de X. Más aún, se tiene el siguiente

Teorema 1.8.1 *Sea X un espacio booleano. $Clop(X)$ es la única subálgebra del álgebra potencia $P(X)$ que es base para la topología de X.*

Prueba. Sea $\mathcal{B}$ una subálgebra booleana de $P(X)$ que es base para X. Como $\mathcal{B}$ es álgebra booleana, para cada $U \in \mathcal{B}$ sucede que $X \setminus U \in \mathcal{B}$, lo cual implica que $X \setminus U$ es abierto, y en consecuencia, U es cerrado. Esto prueba que $\mathcal{B} \subseteq Clop(X)$. Veamos que $Clop(X) \subseteq \mathcal{B}$. Sea $V \in Clop(X)$. Como $V \subset X$ es cerrado y X es compacto, V también es compacto. Por cada $x \in V$, sea $U_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subseteq V$. Como V es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in V$ tales que $U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} = V$. Esto prueba que V es unión finita de elementos de $\mathcal{B}$, por lo que $V \in \mathcal{B}$. $\blacksquare$

Se define el *peso* de un espacio topológico X como el mínimo cardinal κ tal que X tiene una base de cardianlidad κ.

Denotaremos con 2 al conjunto con dos elementos $2 = \{0, 1\}$ dotado de la topología discreta. Para cada cardinal infinito κ, se define el *espacio de Cantor de peso* κ como el conjunto 2^κ de κ-sucesiones de elementos de 2 dotado con la topología del producto. Esto quiere decir que la familia $\mathcal{S} = \{u_i : i \in \kappa\} \cup \{v_i : i \in \kappa\}$ es una subbase para el espacio 2^κ, donde para cada $i \in \kappa$, $u_i = \{x \in 2^\kappa : x_i = 1\}$ y $v_i = \{x \in 2^\kappa : x_i = 0\} = u_i^c$. Además, la familia $\mathcal{B}$ de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es base para 2^κ. Note que cada elemento de $\mathcal{B}$ es cerrado en 2^κ. Más aún, $\mathcal{B}$ es una álgebra booleana puesto que está cerrada bajo uniones e intersecciones finitas y complementos. De éste modo, por el teorema 1.8.1, $\mathcal{B} = Clop(2^\kappa)$.

Note que $|Clop(2^\kappa)| = \kappa$, lo cual prueba que en efecto, el peso de 2^κ es κ. Por el Teorema de Tychonoff, 2^κ es compacto. Claramente, 2^κ es Hausdorff de donde se concluye que todo espacio de Cantor es booleano.

En la sección 2.3.3 demostraremos que los espacios booleanos de peso κ son subespacios cerrados de 2^κ.

Capítulo 2

Dualidad Topológica

2.1. El Teorema de Representación

En primer lugar, demostraremos el Teorema de Representación de las álgebras booleanas, enunciado y demostrado por Marshall Stone en [Sto36]. Para los efectos de este trabajo no es tan importante éste teorema como sí lo es su demostración pues en ésta aparecen elementos esenciales para la dualidad topológica de las álgebras booleanas.

Teorema 2.1.1 (de Representación, Stone, 1936) *Toda álgebra booleana es isomorfa a una álgebra de conjuntos.*

Prueba. Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. Llamaremos $Ult(\mathbb{A})$ al conjunto de ultrafiltros sobre $\mathbb{A}$. Veamos que $\mathbb{A}$ es isomorfa a una subálgebra del conjunto potencia $P(Ult(\mathbb{A}))$. Veamos que la función $s : A \to Ult(\mathbb{A})$ (conocida como *mapeo de Stone*) dada por

$$s(a) = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \in p\}$$

es un monomorfismo de álgebras booleanas. En efecto, si $a, b \in A$ entonces $s(a \wedge b) = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \wedge b \in p\} = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \in p \text{ y } b \in p\} = s(a) \cap s(b)$, $s(a \vee b) = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \vee b \in p\} = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \in p \text{ o } b \in p\} = s(a) \cup s(b)$ y $s(a^c) = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a^c \in p\} = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \notin p\} = Ult(\mathbb{A}) \setminus s(a)$. Además, $s(0) = \emptyset$ y $s(1) = Ult(\mathbb{A})$. Todo esto prueba que s es homomorfismo. Veamos que s es inyectivo. Sean $a \neq b \in A$. De aquí que, o bien $a \nleq b$ o bien $b \nleq a$. Supongamos sin perder generalidad que $a \nleq b$. Por el corolario 1.2.12, hay un ultrafiltro $p \in Ult(\mathbb{A})$ tal que $a \in p$ y $b \notin p$. Esto demuestra que $s(a) \neq s(b)$.

■

El conjunto de ultrafiltros $Ult(\mathbb{A})$ sobre una álgebra booleana dada $\mathbb{A}$ puede ser dotado de manera natural de una topología, llamada la *topología de Stone*, que tiene a la familia $s[A] = \{s(a) : a \in A\}$ como base. $Ult(\mathbb{A})$ dotado con la topología de Stone es llamado el *espacio de Stone* o el *espacio dual* de $\mathbb{A}$ o el *espacio de ultrafiltros sobre* $\mathbb{A}$.

Hecha esta observación, podemos dar una versión topológica del teorema de representación

Teorema 2.1.2 *Toda álgebra booleana es isomorfa al álgebra característica de un espacio booleano. Más precisamente, el espacio dual $Ult(\mathbb{A})$ de una álgebra booleana $\mathbb{A}$ es un espacio booleano y el mapeo de Stone es un isomorfismo de $\mathbb{A}$ sobre $Clop(Ult(\mathbb{A}))$.*

Prueba. En primer lugar, veamos que $Ult(\mathbb{A})$ es un espacio booleano. Empecemos por ver que es compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $Ult(\mathbb{A})$. Podemos suponer que los elementos de $\mathcal{U}$ son básicos. De este modo $\mathcal{U} = \{s(a) : a \in A'\}$ para algún $A' \subseteq A$. Si ningún subconjunto finito de $\mathcal{U}$ cubre a X entonces para todo $n \in \omega$ y $a_1, \ldots, a_n \in A'$ sucede que $s(a_1) \cup \cdots \cup s(a_n) \neq X = s(1)$. De aquí que $a_1 \vee \cdots \vee a_n \neq 1$ y en consecuencia $a_1^c \wedge \cdots \wedge a_n^c \neq 0$. Esto quiere decir que el conjunto $-A' := \{a^c : a \in A'\}$ tiene la pif. Por el Teorema del Ultrafiltro, existe un ultrafiltro $p \in Ult(\mathbb{A})$ tal que $-A' \subseteq p$. Además, para cada $a \in A'$ sucede que $a^c \in p$, por tanto, $a \notin p$, de donde, para cada $a \in A'$ $p \notin s(a)$, lo cual contradice la suposición de que $\mathcal{U}$ cubre a $Ult(\mathbb{A})$. Ahora veamos que es Hausdorff. Sean $p \neq q \in Ult(\mathbb{A})$. Sin perder generalidad, podemos suponer que existe $a \in A$ tal que $a \in p$ y $a \notin q$. De este modo, $a^c \in q$, asi que $p \in s(a)$ y $q \in s(a^c)$. Note que $s(a) \cap s(a^c) = \emptyset$. Finalmente, veamos que $Ult(\mathbb{A})$ es cero-dimensional. Sabemos que $s[A]$ es una base para $Ult(\mathbb{A})$. Para cada $a \in A$ $s(a)$ es cerrado puesto que $s(a) = Ult(\mathbb{A}) \setminus s(a^c)$.

En segundo lugar, veamos que s es isomorfismo de $\mathbb{A}$ sobre $Clop(Ult(\mathbb{A}))$. En la prueba de 2.1.1 se mostró que s es monomorfismo sobre $s[A]$. Sin embargo, nótese que por definición $s[A]$ es base de $Ult(\mathbb{A})$, y que es subálgebra de $P(Ult(\mathbb{A}))$. Por el teorema 1.8.1 $s[A] = Clop(Ult(\mathbb{A}))$.

■

Ahora nos ubicaremos en el contexo de los espacios booleanos y sus álgebras características.

Lema 2.1.3 *Sea X un espacio booleano. Para cada $x \in X$ el conjunto*

$$t(x) = \{U \in Clop(X) : x \in U\}$$

es un ultrafiltro en $Clop(X)$.

Prueba. Es claro que $\emptyset \notin t(x)$ porque $x \notin \emptyset$. Sean $U, V \in t(x)$. Claramente, $x \in U \cap V$ y $U \cap V \in Clop(X)$. Si $W \in Clop(X)$ y $U \subseteq W$, es claro que $x \in W$. Todo esto prueba que $t(x)$ es filtro. Ahora bien, dado $U \in Clop(X)$, sucede que $x \in U$ o $x \in X \setminus U$. En consecuencia $U \in t(x)$ o $X \setminus U \in t(x)$, lo cual prueba que $t(x)$ es un ultrafiltro.

■

De éste modo queda definido un mapeo $t : X \to Ult(Clop(X))$, que es conocido como el *homeomorfismo canónico de Stone*. A continuación veremos que en efecto es un homeomorfismo.

Teorema 2.1.4 *Todo espacio booleano es homeomorfo al espacio de Stone de su álgebra característica. Más precisamente, para cada espacio booleano X, el mapeo $t : X \to Ult(Clop(X))$ es un homeomorfismo de X sobre $Ult(Clop(X))$.*

Prueba. Veamos que t es biyectiva. Sean $x \neq y \in X$. Como X es Hausdorff, existen $U, V \in Clop(X)$ (recuerde que $Clop(X)$ es base para X) ajenos tales que $x \in U$ y $y \in V$. En consecuencia, $x \in U \subseteq X \setminus V$, por lo que $V \notin t(x)$, Pero claramente $V \in t(y)$. Esto prueba que $t(x) \neq t(y)$ por lo que t es inyectiva. Sea p un ultrafiltro en $Clop(X)$. $\cap p$ es la intersección de una familia de cerrados con la pif en el compacto X. En consecuencia, $\cap p \neq \emptyset$. Sea $x \in \cap p$. Claramente, $p \subseteq t(x)$, pero la maximalidad de p obliga que $p = t(x)$. Esto prueba que t es suprayectiva. Sea V un abierto básico en $Ult(Clop(X))$. Esto quiere decir que hay un $A \in Clop(X)$ tal que $V = \{p \in Ult(Clop(X)) : A \in p\}$. Observe que si $x \in A$ entonces $A \in t(x)$, por tanto $t(x) \in V$. Observe, por otro lado, que si $x \in X$ es tal que $t(x) \in V$ entonces $A \in t(x)$ por lo que $x \in A$. Ambas observaciones prueban que $t^{-1}(V) = A$, lo cual prueba que t es continua. Ahora bien, si $A \subset X$ es abierto básico entonces $t[A] = \{t(x) : x \in A\} = \{p \in Ult(Clop(X)) : A \in p\}$ es un abierto básico en $Ult(Clop(X))$. Esto prueba que t es abierta y concluye la demostración.

■

2.2. El Teorema de la Dualidad

Denotaremos con **BA** a la categoría de álgebras booleanas, cuyos morfismos son los homomorfismos de álgebras booleanas. Denotaremos con **BS** a la categoría de espacios (topológicos) booleanos con las funciones continuas como morfismos. La función *Ult* resulta ser un funtor de **BA** en **BS**, y *Clop* resulta ser un funtor de **BS** en **BA**. Los teoremas 2.1.2 y 2.1.4 muestran que salvo isomorfismo, *Ult* y *Clop* son inversas, lo cual se ilustra en el diagrama de la siguiente página.

El teorema de la dualidad de Stone expresa que las categorías **BA** y **BS** son *dualmente equivalentes*, es decir, los diagramas conmutativos en una de ellas se traducen en diagramas conmutativos en la otra. A continuación los detalles.

Lema 2.2.1 *Sean $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ álgebras booleanas, $f : A \to B$ homomorfismo de álgebras booleanas y p un ultrafiltro en $\mathbb{B}$. Entonces, la preimagen $f^{-1}[p]$ es un ultrafiltro en $\mathbb{A}$.*

Prueba. Dado que $0 \notin p$ y que $f(0) = 0$, tenemos que $0 \notin f^{-1}[p]$. Dado que $1 \in p$, y $f(1) = 1$, tenemos que $1 \in f^{-1}[p]$. Es claro que si $a, b \in f^{-1}[p]$ entonces $a \wedge b \in f^{-1}[p]$ y que si $a \in f^{-1}[p]$ y $b \in A$ entonces $a \vee b \in f^{-1}[p]$. Sea $a \in A$. Supongamos que $a \notin f^{-1}[p]$. En consecuencia, $f(a) \notin p$. Como p es ultrafiltro, $f(a^c) = f(a)^c \in p$. por tanto, $a^c \in f^{-1}[p]$, lo cual prueba que $f^{-1}[p]$ es un ultrafiltro en $\mathbb{A}$.

■

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{BA} \arrow[r, bend left, "Ult"] & \mathbf{BS} \arrow[l, bend left, "Clop"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[dr, mapsto] \arrow[dd, "s", "\cong"'] & \\
& Ult(\mathbb{A}) \arrow[dl, mapsto] \\
Clop(Ult(\mathbb{A})) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, mapsto] \arrow[dd, "t"', "\simeq"] \\
Clop(X) \arrow[dr, mapsto] & \\
& Ult(Clop(X))
\end{tikzcd}
$$

Por definición de función continua se tiene el siguiente

Lema 2.2.2 *Sean X, Y espacios booleanos, $\phi : X \to Y$ continua y $V \subseteq Y$ cerrado y abierto en Y Entonces la preimagen $\phi^{-1}[V]$ es cerrado y abierto en X.*

Notación 2.2.3 *Denotaremos con $s_{\mathbb{A}} : A \to Clop(Ult(\mathbb{A}))$ al mapeo de Stone para el álgebra $\mathbb{A}$, y denotaremos con $t_X : X \to Ult(Clop(X))$ al homeomorfismo canónico de Stone para el espacio X.*

Definición 2.2.4 *(Mapeos Duales)*

(a) Sean $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ álgebras booleanas y $f : A \to B$ un homomorfismo de álgebras booleanas. El dual *de f es el mapeo $f^d : Ult(\mathbb{B}) \to Ult(\mathbb{A})$ tal que para cada $p \in Ult(\mathbb{B})$*

$$f^d(p) = f^{-1}[p]$$

(b) Sean X, Y espacios booleanos y $\phi : X \to Y$ una función continua. El dual *de ϕ es el mapeo $\phi^d : Clop(Y) \to Clop(X)$ tal que para cada $U \in Clop(Y)$*

$$\phi^d(U) = \phi^{-1}[U]$$

Los lemas anteriores garantizan que ambos mapeos duales estan bien definidos.

Teorema 2.2.5 (Dualidad de Stone) *Sean $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ álgebras booleanas, $f : A \to B$, $g : B \to C$ homomorfismos de álgebras booleanas, X, Y, Z espacios booleanos, y $\phi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ funciones continuas. Entonces:*

(a) $f^d : Ult(\mathbb{B}) \to Ult(\mathbb{A})$ *es continua y* $\phi^d : Clop(Y) \to Clop(X)$ *es homomorfismo.*

(b) $(id_{\mathbb{A}})^d = id_{Ult(\mathbb{A})}$ *y* $(id_X)^d = id_{Clop(X)}$

(c) $(g \circ f)^d = f^d \circ g^d$ *y* $(\psi \circ \phi)^d = \phi^d \circ \psi^d$

(d) $f^{dd} \circ s_{\mathbb{A}} = s_{\mathbb{B}} \circ f$ *y* $\phi^{dd} \circ t_X = t_Y \circ \phi$. *Es decir, los diagramas*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s_A"] \arrow[d, "f"] & Clop(Ult(A)) \arrow[d, "f^{dd}"] \\ B \arrow[r, "s_B"'] & Clop(Ult(B)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "\phi"] & Ult(Clop(X)) \arrow[d, "\phi^{dd}"] \\ Y \arrow[r, "t_Y"'] & Ult(Clop(Y)) \end{tikzcd}$$

conmutan.

(e) f *es inyectiva si y sólo si* f^d *es suprayectiva.* ϕ *es inyectiva si y sólo si* ϕ^d *es suprayectiva.*

(f) f *es suprayectiva si y sólo si* f^d *es inyectiva.* ϕ *es suprayectiva si y sólo si* ϕ^d *es inyectiva.*

Prueba.

(a) Veamos que las preimágenes bajo f^d de abiertos básicos en $Ult(\mathbb{A})$ son abiertos en $Ult(\mathbb{B})$. Sea $a \in A$. Llamemos $U = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \in p\}$. Así $(f^d)^{-1}[U] = \{q \in Ult(\mathbb{B}) : f^d(q) \in U\} = \{q \in Ult(\mathbb{B}) : a \in f^{-1}[q]\} = \{q \in Ult(\mathbb{B}) : f(a) \in q\}$, lo cual prueba que $(f^d)^{-1}[U]$ es un abierto (básico) de $Ult(\mathbb{B})$.

Veamos que si $U, V \in Clop(Y)$ entonces $\phi^d(U \cap V) = \phi^d(U) \cap \phi^d(V)$. Pero $\phi^d(U \cap V) = \phi^{-1}[U \cap V] = \phi^{-1}[U] \cap \phi^{-1}[V] = \phi^d(U) \cap \phi^d(V)$. Análogamente, $\phi^d(U \cup V) = \phi^d(U) \cup \phi^d(V)$ y $\phi(Ult(Y) \setminus U) = Ult(X) \setminus \phi(U)$. Claramente, $\phi^d(Clop(Y)) = Clop(X)$ y $\phi^d(\emptyset) = \emptyset$, lo cual prueba que ϕ^d es homomorfismo de álgebras booleanas.

(b) Si $p \in Ult(\mathbb{A})$ entonces $(Id_{\mathbb{A}})^d(p) = (Id_{\mathbb{A}})^{-1}[p] = p$. Si $U \in Clop(X)$ entonces $(Id_X)^d(U) = (Id_X)^{-1}[U] = U$.

(c) Sea $p \in Ult(\mathbb{C})$. Así $(g \circ f)^d(p) = \{a \in A : g(f(a)) \in p\} = \{a \in A : f(a) \in g^d(p)\} = f^d(g^d(p)) = (f^d \circ g^d)(p)$.

Sea $U \in Clop(Z)$. Así $(\psi \circ \phi)^d(U) = \{x \in X : (\psi(\phi(x)) \in U\} = \{x \in X : \phi(x) \in \psi^d(U)\} = (\phi^d \circ \psi^d)(U)$.

(d) Sea $a \in A$. De este modo, $f^{dd}(s_{\mathbb{A}}(a)) = f^{dd}(\{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \in p\}) = (f^d)^{-1}[\{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \in p\}] = \{q \in Ult(\mathbb{B}) : a \in f^d(q)\} = \{q \in Ult(\mathbb{B}) : a \in f^{-1}[q]\} = \{q \in Ult(\mathbb{B}) : f(a) \in q\} = s_{\mathbb{B}}(f(a))$.

Sea $x \in X$. De este modo, $\phi^{dd}(t_X(x)) = \phi^{dd}(\{U \in Clop(X) : x \in U\}) = (\phi^d)^{-1}[\{U \in Clop(X) : x \in U\}] = \{V \in Clop(Y) : x \in \phi^d(V)\} = \{V \in Clop(Y) : x \in \phi^{-1}(V)\} = \{V \in Clop(Y) : \phi(x) \in V\} = t_y(\phi(x))$.

(e) Supongamos que f es inyectiva y $p \in Ult(\mathbb{A})$. Como $nuc(f) = \{0_{\mathbb{A}}\}$, la imagen $f[p]$ es un conjunto con la pif en $\mathbb{B}$. Por el corolario 1.2.12 existe $q \in Ult(\mathbb{B})$ tal que $f[p] \subseteq q$. De este modo, $p \subseteq f^{-1}(f[p]) \subseteq f^{-1}(q) = f^d(q)$. Pero por la maximalidad de p, tenemos que $p = f^d(q)$, lo cual demuestra la suprayectividad de f^d. Ahora supongamos que f^d es suprayectiva. Si $a \in A^+$ entonces (por el corolario 1.2.12) existe $p \in Ult(\mathbb{A})$ tal que $a \in p$. Por la suprayectividad de f^d existe $q \in Ult(\mathbb{B})$ tal que $f^d(q) = p$. Esto quiere decir que $a \in f^d(q)$, y como $0_{\mathbb{B}} \notin q$, tenemos que $f(a) \neq 0_{\mathbb{B}}$, lo cual prueba que $nuc(f) = \{0_{\mathbb{A}}\}$.

Supongamos que ϕ es inyectiva y $U \in Clop(X)$. Así, U y $X \setminus U$ son compactos. Dado que ϕ es continua $\phi[U]$ y $\phi[X \setminus U]$ son compactos, y como Y es Hausdorff, ambos, U y $X \setminus U$ son cerrados y abiertos en Y. Como ϕ es inyectiva, $\phi^d(\phi[U]) = \phi^{-1}[\phi[U]] = U$, lo cual prueba que ϕ^d es suprayectiva. Ahora supongamos que ϕ^d es suprayectiva. Sean $x \neq y \in X$. Sean $U, V \in Clop(X)$ ajenos y tales que $x \in U$ y $y \in V$. Como ϕ^d es suprayectiva, existen $U', V' \in Clop(Y)$ tales que $U = \phi^{-1}[U']$ y $V = \phi^{-1}[V']$. Claramente, U' y V' son ajenos, $\phi(x) \in U'$ y $\phi(y) \in V'$. Esto prueba que $\phi(x) \neq \phi(y)$, de donde ϕ es inyectiva.

(f) Por el inciso (d) f es suprayectiva si y sólo si f^{dd} es suprayectiva y por el inciso anterior, esto equivale a que f^d sea inyectiva. Análogamente se prueba que ϕ es suprayectiva si y sólo si ϕ^d es inyectiva.

■

2.3. Álgebras y espacios booleanos distinguidos

Con el propósito de mostrar el poder de los teoremas de representación y de la dualidad de Stone, analizaremos algunas clases específicas de álgebras booleanas y sus espacios de ultrafiltros.

2.3.1. Álgebras finitas y espacios discretos

Toda álgebra booleana finita es atómica puesto que en toda álgebra no atómica es posible encontrar una sucesión infinita descendente. Esto tiene como consecuencia la siguiente versión del Teorema de Representación de Stone para álgebras finitas.

Teorema 2.3.1 *Toda álgebra booleana finita es isomorfa a una álgebra de conjuntos. De hecho, si $\mathbb{A}$ es una álgebra booleana finita, entonces $\mathbb{A}$ es isomorfa al álgebra potencia $P(At(\mathbb{A}))$.*

Prueba. El mapeo $f : A \to P(At(\mathbb{A}))$ definido por $f(a) = \{x \in At(A) : x \leq a\}$ es el isomorfismo buscado. La inyectividad de f se debe a que si $b, c \in A$ con $b \nleq c$ entonces existe un átomo $a \in A$ tal que $a \leq b$ y $a \nleq c$. La suprayectividad de f se debe a la finitud de A, pues si $C \subset A$ entonces C es finito, y en consecuencia, $\vee C$ existe en A y así $C = f(\vee C)$. Se prueba que f es homomorfismo siguiendo su definición. ■

La relación entre la familia de ultrafiltros de una algebra booleana finita y la familia de conjuntos de átomos de la misma es muy íntima. Un filtro generado por un conjunto finito C de elementos de una álgebra booleana siempre es principal, es decir, está generado por un sólo elemento del álgebra, a saber, $\wedge C$. En el caso de las álgebras atómicas se tiene el siguiente resultado

Lema 2.3.2 *Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana atómica y F un filtro principal sobre $\mathbb{A}$. F es ultrafiltro si y sólo si está generado por un átomo.*

Prueba. Sea a el generador de F. Si a es átomo y $b \in A$ entonces, por el lema 1.7.3, $b \in F$ o $b^c \in F$. El recíproco es trivial. ■

De este modo, una álgebra booleana finita $\mathbb{A}$ tiene un espacio de Stone finito, de hecho, equipotente con $At(A)$. Más aún, $Ult(\mathbb{A})$ es discreto, pues si $C \subseteq Ult(\mathbb{A})$ entonces C es finito, es decir, de la forma $C = \{p_1, \ldots, p_n\}$ donde para cada $i = 1, \ldots, n$ existe $a_i \in At(A)$ tal que p_i es el ultrafiltro generado por $\{a_i\}$. Así que $C = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a_1 \vee \cdots \vee a_n \in p\} = s(a_1 \vee \cdots \vee a_n)$.

Una consecuencia de las propiedades Hausdorff y compacto en los espacios booleanos es que un espacio booleano discreto debe ser finito. En conclusión tenemos que la dualidad de Stone es biyectiva entre las categorías de álgebras booleanas finitas y de espacios booleanos discretos.

2.3.2. Álgebras finita-cofinitas y compactaciones por un punto de espacios discretos

Dado un espacio topológico X Hausdorff localmente compacto pero no compacto, es posible encajar a éste en un espacio compacto de la siguiente manera: Sea p un punto tal que $p \notin X$. Sea $X^* = X \cup \{p\}$. Se definen las vecindades básicas de p en X^* como los conjuntos de la forma $\{p\} \cup (X \setminus L)$ donde L es un subconjunto compacto de X. Las vecindades básicas de los puntos $x \in X$ en X^* son las vecindades de x en X. Así, X^* es un compacto y la inclusión de X en X^* es un encaje. X^* es llamada la *compactación por un punto* de X.

Todo espacio discreto es localmente compacto y Hausdorff, pero sólo los discretos finitos son compactos. Sin embargo todo espacio discreto infinito tiene una compactación por un punto.

Teorema 2.3.3 *Las álgebras finito-cofinitas son minimales respecto a la cantidad de átomos que presentan. Esto es dado un cardinal κ y una álgebra booleana*

$\mathbb{A}$ con κ átomos, existe un monomorfismo $f : FC(\kappa) \to A$ tal que para cada átomo $x \in FC(\kappa)$, $f(x)$ es un átomo en $\mathbb{A}$.

Prueba. Sea $g : \kappa \to At(A)$ una biyección. Entonces, para cada $S \in FC(\kappa)$ sea

$$f(S) = \begin{cases} \bigcup_{s \in S} g(s) & \text{si } S \text{ es finito} \\ \bigcap_{s \in \kappa \setminus S} g(s)^c & \text{si } S \text{ es cofinito} \end{cases}$$

Es sencillo verificar que f es la función buscada. ■

Si $\mathbb{A}$ es una álgebra atómica, entonces $At(A)$ es un subconjunto denso en $\mathbb{A}$, así que la subálgebra de $\mathbb{A}$ generada por $At(A)$ es una subálgebra densa en $\mathbb{A}$. Pero esta subálgebra es (por el teorema anterior) isomorfa a $FC(|At(A)|)$, de donde, toda álgebra atómica infinita tiene inmersa a una álgebra finita-cofinita. Ahora revisemos los espacios de Stone de las álgebras finita-cofinitas.

Teorema 2.3.4 *Sea κ cardinal infinito. El espacio de ultrafiltros de $FC(\kappa)$ es homeomorfo a la compactación por un punto del espacio discreto de κ elementos.*

Prueba. Es facil ver que los ultrafiltros sobre $FC(\kappa)$ son exactamente los filtros principales sobre los átomos y el filtro p de subconjuntos cofinitos de κ. Cada ultrafiltro principal es un punto aislado de $Ult(FC(\kappa))$ y las vecindades de p tienen la forma $s(a)$ con $a \in p$, pero $\kappa \setminus a$ es finito. por tanto $Ult(FC(\kappa)) \setminus s(a)$ es finito, y en consecuencia es compacto. De este modo, $Ult(FC(\kappa))$ es la compactación por un punto del espacio discreto de κ elementos. ■

2.3.3. Álgebras libres y espacios de Cantor

Denotaremos por $Fr(\kappa)$ al álgebra libre sobre κ, y por 2^κ al espacio de Cantor de peso κ. Recuerde que cualesquiera dos álgebras libres generadas por conjuntos equipotentes son isomorfas, y que cualesquiera espacios potencia con bases homeomorfas y exponentes equipotentes son homeomorfas. La relación entre las álgebras libres y los espacios de Cantor se deja notar desde la prueba del teorema de existencia de álgebras booleanas libres 1.6.2. A continuación la demostración.

Sea I un conjunto. Sea F el álgebra de cerrados y abiertos del espacio producto 2^I ($F = Clop(2^I)$). Definimos $e : I \to F$ como sigue:

$$e(i) = u_i = \{x \in 2^I : x(i) = 1\}$$

Para cada $i \in I$, el conjunto $e(i)$ es claramente cerrado y abierto en 2^I. Utilizaremos la caracterización de álgebras booleanas libres dada en el teorema 1.6.5. Claramente, e es inyectiva. Veamos que $e[I]$ genera independientemente a F. Sean $\{i_1, \ldots, i_n\}$ y $\{j_1, \ldots, j_m\}$ subconjuntos finitos y ajenos de I. Cualquier punto $x \in 2^I$ tal que $x(i) = 1$ para $i \in \{i_1, \ldots, i_n\}$ y $x(j) = 0$ para $j \in \{j_1, \ldots, j_m\}$ muestra que $e(i_1) \cap \cdots \cap e(i_n) \setminus (e(j_1) \cup \cdots \cup e(j_m)) \neq \emptyset$. Más aún, $e[I]$ genera F, pues si $\mathbb{B}$ es la subálgebra de F generada por $e[I]$ entonces B incluye a la subbase canónica de 2^I, es decir, al conjunto

$$\{u_i : i \in I\} \cup \{2^I \setminus u_i : i \in I\}$$

y en consecuencia, contiene a la base canónica de 2^I, es decir, $F \subseteq B$. puesto que cada cada $u \in Clop(2^I)$ es por compacidad, unión finita de conjuntos básicos.

En efecto, para cada cardinal κ, el espacio de Stone del álgebra libre sobre κ es el espacio de Cantor de peso κ, desde que el álgebra libre sobre κ hallada en la prueba del teorema es $Clop(2^\kappa)$, es decir, $Clop(2^\kappa) = Fr(\kappa)$. De este modo, por el teorema 2.1.4, 2^κ es homeomorfo a $Ult(Fr(\kappa))$.

La propiedad universal del álgebra libre sobre un conjunto I de generadores garantiza el siguiente

Teorema 2.3.5 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana con $|A| = \kappa \geq \aleph_0$. Entonces $\mathbb{A}$ es una imagen homomórfica de $Clop(2^\kappa)$.*

Prueba. Sea $f : \kappa \to A$ una función biyectiva. Sea $e : \kappa \to 2^\kappa$ tal que $e(\alpha) = \{x \in 2^\kappa : x_\alpha = 1\}$. Así el par $(e, Clop(2^\kappa))$ es el álgebra libre sobre κ. La propiedad universal del álgebra libre afirma que existe un único homomorfismo $g : Clop(2^\kappa) \to A$ tal que $f = g \circ e$. g es el epimorfismo buscado. ■

Teorema 2.3.6 *Si X es un espacio booleano de peso κ entonces X es homeomorfo a algún subespacio cerrado de 2^κ.*

Prueba. Si el peso de X es κ es fácil ver que $|Clop(X)| = \kappa$. Por el teorema anterior, $Clop(X)$ es una imagen homomórfica de $Clop(2^\kappa)$, digamos bajo el epimorfismo g. En consecuencia $g^d : Ult(Clop(X)) \to Ult(Clop(2^\kappa))$ es una función continua e inyectiva. Como ambos, dominio y contradominio de g^d son compactos, g^d es un encaje y su imagen es un subconjunto cerrado de $Ult(2^\kappa)$. Pero $Ult(Clop(X)) \cong X$ y $Ult(Clop(2^\kappa)) \cong 2^\kappa$ por tanto, X es homeomorfo a un subespacio cerrado de 2^κ.

■

2.3.4. Álgebras sin átomos numerables y el espacio de Cantor $2^{\aleph_0}$

Se dice que una álgebra booleana es sin átomos si ésta no tiene átomos. Es decir, una álgebra booleana $\mathbb{A}$ es sin átomos si para cada $a \in A^+$ existe $b \in A^+$ tal que $b < a$. En los textos de lógica matemática es muy frecuente encontrar las álgebras de Lindenbaum. Éstas son ejemplos de álgebras sin átomos. Pero recurriendo al material disponible en este trabajo, ejemplificaremos las álgebras sin átomos mediante las álgebras libres. Si I es un conjunto infinito, entonces el álgebra libre 2^I es una álgebra sin átomos puesto que dado un $U \in Clop(2^I)$, digamos $U = u_1 \cap \cdots \cap u_n \setminus (v_1 \cup \cdots \cup v_m)$, si elegimos $\alpha \in I$ tal que $u_\alpha \neq u_j$ y $u_\alpha \neq v_k^c$ para todos $j \in \{1, \ldots, n\}, k \in \{1, \ldots, m\}$ (lo cual es posible dado que I es infinito) entonces $\emptyset \neq U \cap u_\alpha \subset U$.

Veremos que en el caso numerable, las álgebras libres coinciden con las álgebras sin átomos. Se dice que una álgebra booleana $\mathbb{A}$ es *densa en sí misma* si para cualesquiera $a, b \in A$ con $a < b$ existe $c \in A$ tal que $a < c < b$. Es inmediato que una álgebra densa en sí misma no tiene átomos. Más aún:

Lema 2.3.7 *Si $\mathbb{A}$ es una álgebra booleana sin átomos entonces $\mathbb{A}$ es densa en sí misma.*

Prueba. Sean $a, b \in A$ con $a < b$. De este modo, $b \nleq a$. Por tanto, $b \wedge a^c \neq 0$. Tomemos $d \in A^+$ tal que $d < b \wedge a^c$, lo cual es posible porque $\mathbb{A}$ es sin átomos. Así $b \wedge a^c \nleq d$ y por tanto, $b \wedge a^c \wedge d^c \neq 0$. La desigualdad $0 < d < b \wedge a^c$ implica $a \leq a \vee d \leq b$. Además, si $a \vee d \leq a$ entonces $d \leq a$, y como $d \leq a^c$, tendríamos que $d = 0$ lo cual es una contradicción. Por otro lado, si tuviesemos $b \leq a \vee d$ entonces $0 = b \wedge (a \vee d)^c = b \wedge a^c \wedge d^c$ lo cual también es una contradicción. En consecuencia, $a < a \vee d < b$. ■

Teorema 2.3.8 *Cualesquiera dos álgebras booleanas numerables sin átomos son isomorfas.*

Prueba. Sean $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ álgebras booleanas numerables y enumeremos $A = \{a_n : n \in \omega\}$, $B = \{b_n : n \in \omega\}$ con $0_\mathbb{A} = a_0,\ 0_\mathbb{B} = b_0,\ 1_\mathbb{A} = a_1,\ 1_\mathbb{B} = b_1$. Definiremos unas nuevas ordenaciones (parciales) de $A = \{a'_n : n \in \omega\}$ y $B = \{b'_n : n \in \omega\}$ como sigue: $a'_0 = a_0$; $b'_0 = b_0$, $a'_1 = a_1$; $b'_1 = b_1$; si n es par y a'_i y b'_i están definidas para $i \leq n$, definamos

$$a'_{n+1} = \begin{cases} a_{n+1} & \text{si } a_{n+1} \neq a'_i \text{ para todo } i \leq n \\ \text{indefinido} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y si a'_{n+1} queda definido, definimos $b'_{n+1} = b_j$ donde j es el mínimo índice tal que b_j guarda la misma relación de orden y de operaciones booleanas respecto a $b'_0, \ldots, b'_n$ que la que guarda a_{n+1} respecto a $a'_0, \ldots, a'_n$. Si a'_{n+1} queda indefinida, b'_{n+1} también; y si n es impar y a'_i y b'_i están definidas para $i \leq n$, definimos $b'_{n+1} = b_{n+1}$ (nuevamente, cuando $b_{n+1} \neq b_i$ con $i \leq n$) y definimos $a'_{n+1} = a_j$ donde j es el mínimo índice tal que a_j guarda la misma relación de orden y de operaciones booleanas respecto a $a'_0, \ldots, a'_n$ que la que guarde b_{n+1} respecto a $b'_0, \ldots, b'_n$. a'_{n+1} y b'_{n+1} permanecerán indefinidas si $b_{n+1} = b_i$ para alguna $i \leq n$. Esto es posible dado que ambas álgebras $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son densas en sí mismas. De este modo, la función $h : A \to B$ dada por $h(a'_n) = b'_n$ es el isomorfismo buscado. Es sencillo verificar que h es isomorfismo. ■

En términos de la Teoría de Modelos, este teorema dice que la teoría de las álgebras booleanas sin átomos es $\aleph_0$-categórica.

Corolario 2.3.9 *Las álgebras libres numerables son exactamente las álgebras sin átomos numerables.*

Probablemente al lector se le antojaría generalizar este resultado a cualquier cardinal κ infinito. En la siguiente subsección se dará un ejemplo que muestra la falsedad de tal generalización.

Ahora examinemos los espacios de Stone de las álgebras sin átomos numerables. En primer lugar tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.3.10 *Los átomos de una álgebra booleana $\mathbb{A}$ corresponden con los puntos aislados de $Ult(\mathbb{A})$. En particular, si $\mathbb{A}$ es una álgebra sin átomos entonces $Ult(\mathbb{A})$ es perfecto.*

Prueba. En efecto, si $a \in \mathbb{A}$ es un átomo entonces el ultrafiltro generado por $\{a\}$ es el único ultrafiltro que contiene a a. Eso quiere decir que $s(a)$ es un conjunto abierto unitario, así que su único elemento es un punto aislado de $Ult(\mathbb{A})$. El resto de la proposición es trivial. ∎

Recuerde que la familia $s[A]$ es una base para $Ult(\mathbb{A})$, así que si $\mathbb{A}$ es numerable entonces $Ult(\mathbb{A})$ tiene una base numerable. De este modo, si $\mathbb{A}$ es una álgebra booleana numerable y sin átomos entonces $Ult(\mathbb{A})$ es un espacio booleano perfecto y segundo numerable.

Dualmente, si un espacio booleano X es perfecto y segundo numerable entonces $Clop(X)$ es una álgebra booleana numerable y sin átomos.

Por otro lado, el espacio de Cantor $2^{\aleph_0}$ es un espacio booleano perfecto y segundo numerable. Así, $Clop(2^{\aleph_0}) \cong Clop(X)$ para cualquier espacio booleano X perfecto y segundo numerable. El teorema de la dualidad de Stone garantiza también el siguiente corolario:

Corolario 2.3.11 *Cualesquiera dos espacios booleanos perfectos y segundo numerables son homeomorfos. Más específicamente, el espacio de Cantor $2^{\aleph_0}$ es el único (salvo homeomorfismo) espacio booleano perfecto y segundo numerable.*

2.3.5. Álgebras σ-centradas y espacios separables

Una álgebra booleana $\mathbb{A}$ es *σ-centrada* si existe una familia numerable $\mathcal{F}$ de filtros sobre $\mathbb{A}$ tal que $A^+ = \bigcup \mathcal{F}$. Es sencillo ver que una álgebra $\mathbb{A}$ es σ-centrada si y sólo si existe una familia numerable $\mathcal{U}$ de ultrafiltros sobre $\mathbb{A}$ tales que $A^+ = \bigcup \mathcal{U}$

Un subconjunto D de un espacio topológico X es *denso* en X si para cada subconjunto abierto no vacío V de X, $D \cap V \neq \emptyset$. Es sencillo ver que D es denso en X si y sólo si para cualquier abierto básico U de X, $U \cap D \neq \emptyset$. Un espacio topológico X es *separable* si existe un subconjunto D de X denso numerable.

Veremos que la propiedad dual de la σ-centralidad de las álgebras booleanas es la separabilidad de los espacios booleanos.

Teorema 2.3.12 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $D \subseteq Ult(\mathbb{A})$. Son equivalentes:*

- $\cup D = A^+$
- *D es un subconjunto denso en $Ult(\mathbb{A})$.*

Prueba. D es denso en $Ult(\mathbb{A})$ si y sólo si D intersecta a todos los abiertos básicos de $Ult(\mathbb{A})$, es decir, D intersecta a todos los conjuntos de la forma $s(a)$ con $a \in A^+$. Esto equivale a que para cada $a \in A^+$ existe $p \in D$ tal que $a \in p$. ∎

Se define la *densidad* de un espacio topológico X como el mínimo cardinal κ tal que X tiene un subconjunto denso D de cardinalidad κ.

Es una consecuencia directa el siguiente

Corolario 2.3.13 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. $Ult(\mathbb{A})$ tiene densidad κ si y sólo si existe una familia $D \subseteq Ult(\mathbb{A})$ de cardinal κ tal que $\cup D = A^+$. En particular $\mathbb{A}$ es σ-centrada si y sólo si $Ult(\mathbb{A})$ es separable.*

Ejemplo 2.3.14 *Dos álgebras booleanos sin átomos, de la misma cardianalidad pero no isomorfas. Dos espacios booleanos sin puntos aislados y con el mismo peso, pero no homeomorfos.*

Se define la *σ-álgebra de Borel* $\mathcal{B}(X)$ de un espacio topológico X como la mínima σ-álgebra de conjuntos $\mathbb{A}$ que contiene a la topología de X. Si $X = I = [0,1]$ entonces los elementos de $\mathcal{B}(I)$ son Lebesgue-medibles. La familia $\mathcal{N}$ de conjuntos de Borel de medida cero forma un ideal en $\mathcal{B}(I)$. Consideremos el álgebra cociente $\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}}$. Ésta álgebra tiene $2^{\aleph_0}$ elementos y no tiene átomos puesto que cualquier conjunto de medida positiva tiene un subconjunto de medida positiva estrictamente menor. Sea $Fr(2^\omega)$ el álgebra libre sobre 2^ω. Esta álgebra también tiene $2^{\aleph_0}$ elementos y también es sin átomos. Usaremos la dualidad de Stone para probar que $\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}}$ y $Fr(2^\omega)$ no son isomorfas. En primer lugar, veremos que $Fr(2^\omega)$ es σ centrada y que $\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}}$ no lo es. En [Eng89] se puede encontrar una prueba del siguiente

Teorema 2.3.15 (Hewitt-Marczewski-Pondiczery) *Sea κ un cardinal infinito. Sea $\{X_s : s \in S\}$ una familia de a lo más 2^κ espacios topológicos tales que su densidad es menor o igual a κ. Entonces, la densidad del producto $\prod_{s\in S} X_s$ es a lo más κ.*

Tomando $\kappa = \aleph_0$, $S = 2^{\aleph_0}$ y $X_s = 2$ para todo $s \in S$ tenemos satisfechas las hipótesis del teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery. La tesis del mismo garantiza que $\prod_{s\in 2^{\aleph_0}} 2 = 2^{2^{\aleph_0}}$ tiene densidad numerable, en otras palabras, $2^{2^{\aleph_0}}$ es separable. Por tanto, $Fr(2^\omega)$ es σ-centrada.

Ahora veremos que $\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}}$ no es σ-centrada. Sea $D = \{F_n : n \in \omega\}$ una familia de ultrafiltros en $\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}}$. Sea $\epsilon_n = 2^{-n-1}$. Dado que cada F_n es un ultrafiltro, en cualquiera de éstos es posible encontrar clases de equivalencia de conjuntos borelianos de medida positiva arbitrariamente pequeña. Elijamos, para cada $n \in \omega$ una clase $[b_n] \in F_n$ tal que $\lambda(b_n) \leq \epsilon_n$, donde λ es la medida de Lebesgue en $[0,1]$. De este modo, $\lambda(\bigcup_{n\in\omega} b_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \leq 2^{-1}$, por lo que $[0,1] \setminus \bigcup_{n\in\omega} b_n$ tiene medida positiva y su clase de equivalencia no pertenece a F_n para toda $n \in \omega$, así que $\bigcup_{n\in\omega} F_n \neq (\mathcal{B}(\mathbb{R})/_{\mathcal{N}})^+$. De este modo, $\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}}$ no es σ-centrada y en consecuencia $Ult(\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}})$ no es separable.

La separabilidad es una propiedad topológica, es decir, si X y Y son homeomorfos y X es separable entonces Y es separable. De este modo, $Ult(Fr(2^\omega)) = 2^{2^{\aleph_0}}$ no es homeomorfo a $Ult(\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}})$, y por la dualidad de Stone, $Fr(2^\omega)$ no es isomorfa a $\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}}$.

2.3.6. Familias disjuntas y celularidad

Dos elementos a, b de una álgebra booleana $\mathbb{A}$ son *disjuntos* si $a \wedge b = 0$. Un subconjunto $C \subseteq A^+$ es una *familia disjunta por pares* o *anticadena* en $\mathbb{A}$ si cualesquiera dos elementos distintos de C son disjuntos. Se define la celularidad $c(\mathbb{A})$ de una álgebra booleana $\mathbb{A}$ como sigue:

$$c(\mathbb{A}) = \sup\{|X| : X \text{ es una anticadena en } \mathbb{A}\}$$

Sea κ un cardinal infinito. $\mathbb{A}$ safisface la κ condición de cadena (κ–*cc*) si para cada anticadena X en $\mathbb{A}$, $|X| < \kappa$. $\mathbb{A}$ satisface la condición de cadena contable (*ccc*) si cada anticadena en $\mathbb{A}$ es a lo más numerable.

La celularidad también tiene una interpretación topológica. Una familia C de subconjuntos abiertos de un espacio topológico X es una *familia celular* en X si cualesquiera dos elementos distintos de C son ajenos. Para un espacio topológico X se define la celularidad $c(X)$ de X como sigue:

$$c(X) = \sup\{|U| : U \text{ es una familia celular en } X\}$$

Análogamente, X satisface la κ condición de cadena (κ–*cc*) si para cada familia celular C de X, $|C| < \kappa$. X satisface la condición de cadena contable (*ccc*) si cada familia celular en X tiene cardinalidad a lo más numerable.

En primer lugar veremos que el mapeo de Stone $s : A \to Clop(Ult(\mathbb{A}))$ lleva anticadenas en familias celulares y viceversa.

Lema 2.3.16 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $C \subset A$. C es una anticadena en $\mathbb{A}$ si y sólo si $s[C]$ es una familia celular en $Ult(\mathbb{A})$.*

Prueba. C es anticadena en $\mathbb{A}$ si y sólo si para cualesquiera $a \neq b \in C$ no existe un ultrafiltro p sobre $\mathbb{A}$ tal que $a, b \in p$, es decir, $s(a) \cap s(b) = \emptyset$. Esto equivale a decir que $s[C]$ es una familia celular en $Ult(\mathbb{A})$. ■

Teorema 2.3.17 *Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y κ un cardinal. $\mathbb{A}$ tiene una anticadena de cardinal κ si y sólo si $Ult(X)$ tiene una familia celular de cardinal κ.*

Prueba. La primera parte es consecuencia del lema anterior. Sea $C \subseteq Ult(\mathbb{A})$ una familia celular. Como los elementos de C son abiertos, por cada $c \in C$ podemos elegir $a_c \in A$ tal que el abierto básico $s(a_c) \subseteq c$. Claramente $a_c \neq a_{c'}$ si $c \neq c' \in C$. De este modo la famila $\{a_c : c \in C\}$ es una anticadena en $\mathbb{A}$ equipotente con C. ■

Corolario 2.3.18 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. $\mathbb{A}$ satisface la κ–cc si y sólo si $Ult(\mathbb{A})$ satisface la κ–cc.*

La κ–*cc* es una propiedad topológica. Por el teorema de la dualidad de Stone, también tenemos que X es un espacio booleano que satisface κ–*cc* si y sólo si $Clop(X)$ satisface κ–*cc*.

2.3.7. Encajes regulares y funciones semiabiertas

Sean $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ álgebras booleanas y $f : A \to B$ un monomorfismo. Se dice que f es un *encaje regular* o *encaje completo* si para cada anticadena maximal $C \subseteq A$, la imagen $f[C]$ es también una anticadena maximal en $\mathbb{B}$.

Sean X, Y espacios topológicos y $\phi : X \to Y$ una función. ϕ es *semiabierta* si para cada subconjunto V de X abierto, la imagen $f[V]$ tiene interior no vacío.

Teorema 2.3.19 *Sean $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ álgebras booleanas y $f : A \to B$. f es un encaje regular si y sólo si f^d es continua, suprayectiva y semiabierta.*

Prueba. Si $f : A \to B$ es un encaje regular, podemos suponer que $\mathbb{A}$ es subálgebra de $\mathbb{B}$ y que f es la inclusión de $A \to B$. De este modo, las anticadenas maximales en $\mathbb{A}$ son anticadenas maximales en $\mathbb{B}$ y la función $f^d : Ult(\mathbb{B}) \to Ult(\mathbb{A})$ trabaja como sigue: $f^d(p) = p \cap A$. Verificar que f^d es semiabierta consiste en mostrar que si $b \in B^+$ entonces existe $a \in A^+$ tal que $s_{\mathbb{A}}(a) \subseteq \{p \cap A : p \in s_{\mathbb{B}}(b)\}$, es decir, que la imagen de cualquier abierto básico no vacío de $Ult(\mathbb{B})$ contiene un abierto básico no vacío de $Ult(\mathbb{A})$. Supongamos lo contrario, es decir, existe $b \in B^+$ tal que para cada $a \in A^+$ existe un ultrafiltro q_a en $s_{\mathbb{A}}(a)$ tal que $p \cap A \neq q_a$ para todo $p \in Ult(\mathbb{B})$ con $b \in p$. En otras palabras, para cada $a \in A^+$, q_a es un ultrafiltro en $\mathbb{A}$ que no se puede extender a un ultrafiltro en $\mathbb{B}$ que contenga a b. Si en efecto no es posible hacer esta extensión es porque para cada $a \in A^+$, el subconjunto $q_a \cup \{b\}$ de B no tiene la propiedad de intersección finita (pif). Por cada $a \in A^+$, seleccionemos un elemento $x_a \in q_a$ de modo tal que $b \wedge x_a = 0$. Más aún, podemos suponer que cada $x_a \leq a$. Esto es posible dado que q_a está cerrado bajo ínfimos finitos. Es sencillo ver que la familia

$$\mathcal{A} = \{D \subseteq \{x_a : a \in A^+\} : D \text{ es anticadena } \}$$

satisface las hipótesis del lema de Zorn. Sea M un maximal en $\mathcal{A}$. M es una anticadena maximal en A, desde que si $a \in A^+$, el correspondiente $x_a \leq a$ y en consecuencia, $a \wedge m \geq x_a \wedge m \neq 0$ para algún $m \in M$. Sin embargo, M no es anticadena maximal en $\mathbb{B}$ puesto que $M \cup \{b\}$ es una anticadena en $\mathbb{B}$ que extiende propiamente a M, lo cual es una contradicción.

Para demostrar el converso, supongamos que $f^d : Ult(\mathbb{B}) \to Ult(\mathbb{A})$ es continua, suprayectiva y semiabierta. Sea C una anticadena maximal en $\mathbb{A}$. Claramente, $f[C]$ es una anticadena en $\mathbb{B}$. Sea $b \in B^+ \setminus f[C]$. Veamos que existe $c \in C$ tal que $b \wedge f(c) \neq 0$. El abierto básico $s_{\mathbb{B}}(b)$ de $Ult(s_{\mathbb{B}})$ es no vacío. Como f^d es semiabierta, $f^d[s_{\mathbb{B}}(b)]$ tiene interior no vacío, así que existe $a \in A^+$ tal que el abierto básico $s_{\mathbb{A}}(a)$ está contenido en $f^d[s_{\mathbb{B}}(b)]$. Esto significa que para cada ultrafiltro q de $\mathbb{A}$ tal que $a \in q$, se tiene que existe $p \in Ult(\mathbb{B})$ tal que $b \in p$ y $q = f^{-1}[p]$. Como C es maximal, debe haber un $c \in C$ tal que $a \wedge c \neq 0$. Sea q un ultrafiltro en $\mathbb{A}$ tal que $a, c \in q$. Por la suprayectividad de f^d, podemos tomar $p \in Ult(\mathbb{B})$ tal que $f^d(p) = q$ De este modo, $b \in p$ y así $b \cap f(c) \neq 0$ puesto que $f(c)$ y b pertenecen al ultrafiltro p.

■

2.3.8. Encajes densos y mapeos irreducibles

Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ álgebras booleanas. Una función $f : A \to B$ es un *encaje denso* si f es monomorfismo y la imagen $f[A]$ es un subconjunto denso de $\mathbb{B}$.

Sean X y Y espacios topológicos. Una función continua $\phi : X \to Y$ es *irreducible* si es suprayectiva y para cada subconjunto propio cerrado $K \subset X$ la imagen $f[K] \neq Y$.

La relación entre encajes densos y mapeos irreducibles está dada por:

Teorema 2.3.20 *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ álgebras booleanas y $f : A \to B$. Entonces f es un encaje denso si y sólo si f^d es continua e irreducible.*

Prueba. En primer lugar, si f es encaje denso, en particular es monomorfismo. De aquí que f^d es continua y suprayectiva. Supongamos que K es un subconjunto propio de $Ult(\mathbb{B})$ cerrado y que $q \in Ult(\mathbb{B}) \setminus K$. Sea $b \in B^+$ tal que q pertenece al abierto básico $s_{\mathbb{B}}(b)$ y $s_{\mathbb{B}}(b) \cap K = \emptyset$. Como f es encaje denso, existe $a \in A^+$ tal que $f(a) \leq b$. Observe que para cada $p \in K$, $a \notin f^d(p)$, pues de lo contrario, habría un $p \in K$ tal que $f(a) \in p$ y en consecuencia, $b \in p$. De este modo, $s_{\mathbb{A}}(a)$ es un abierto no vacío contenido en el complemento de $f[K]$, de donde $f[K] \neq Y$.

Ahora supongamos que f^d es una función continua e irreducible. Por continuidad y suprayectividad, f es monomorfismo. Veamos que $f[A]$ es un subconjunto denso de B. Sea $b \in B^+$. Así, $b^c \neq 1$ y en consecuencia, $s_{\mathbb{B}}(b^c) \neq Ult(\mathbb{A})$. Sea $q \in Ult(\mathbb{A}) \setminus f^d(s_{\mathbb{B}}(b))$. De este modo, existe $a \in A^+$ tal que el abierto básico $s_{\mathbb{A}}(a)$ es una vecindad de q ajena con $f^d(s_{\mathbb{B}}(b))$. Esto quiere decir que para cada ultrafiltro $p \in Ult(\mathbb{B})$, $b^c \in p$ implica $f(a) \notin p$, lo cual sucede porque el conjunto $\{b^c, f(a)\}$ no tiene la propiedad de intersección finita, es decir, $f(a) \wedge b^c = 0$. Pero esto equivale a $f(a) \leq b$. Así queda probado que $f[A]$ es un subconjunto denso de B. ■

2.3.9. Completud y disconexidad

Un espacio topológico X es *extremadamente disconexo* si la cerradura de cualquier conjunto abierto en X es abierto en X. X es *básicamente disconexo* si la unión de cualquier familia numerable de cerrados y abiertos en X tiene cerradura abierta.

Lema 2.3.21 *Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $M \subseteq A$. $\bigvee M$ existe en A si y sólo si la cerradura de $\bigcup s[M]$ es abierta en $Ult(\mathbb{A})$.*

Prueba. M tiene mínima cota superior si y sólo si $s[M]$ tiene mínima cota superior en el álgebra isomorfa $Clop(Ult(\mathbb{A}))$. Sea C la cerradura de $\bigcup s[M]$. C es el mínimo cerrado que contiene a todos los $S(m)$ con $m \in M$. Si C es abierto en $Ult(\mathbb{A})$ entonces C es la mínima cota superior de $s[M]$. Conversamente, supongamos que existe $C' \in Ult(\mathbb{A})$ que es la mínima cota superior de $s[M]$. Entonces, $\bigcup s[M] \subseteq C'$ y así $C \subseteq C'$. Veremos que $C = C'$. Supongamos lo contrario. De este modo, $C' \setminus C$ es un abierto no vacío. Por tanto existe un cerrado y abierto no vacío D tal que $D \subseteq C' \setminus C$. De este modo, $C' \setminus D$ es una cota superior de $s[M]$ estrictamente menor que C', lo cual contradice la minimalidad de C'. Así pues, C resulta ser cerrado y abierto. ■

Teorema 2.3.22 *Una álgebra booleana $\mathbb{A}$ es κ completa si y sólo si la unión de cualquier familia de cerrados y abiertos con a lo más κ elementos tiene cerradura abierta.*

Prueba. Es claro que una familia M de κ elementos de A define a la familia $s[M]$ de κ cerrados y abiertos en $Ult(\mathbb{A})$. por el lema anterior tenemos el resultado. ■

Corolario 2.3.23 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. $\mathbb{A}$ es completa si y sólo si $Ult(\mathbb{A})$ es extremadamente disconexo. $\mathbb{A}$ es σ completa si y sólo si $Ult(\mathbb{A})$ es básicamente disconexo.*

2.3.10. El Teorema de Rasiowa-Sikorski y el Teorema de Baire

La construcción de modelos genéricos para las pruebas de consistencia relativa en teoría de conjuntos tiene una pieza fundamiental en el siguiente teorema

Teorema 2.3.24 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $\{D_n : n \in \omega\}$ una familia de subconjuntos densos de A. Existe un filtro F en $\mathbb{A}$ tal que para cada $n \in \omega$, $F \cap D_n \neq \emptyset$.*

Prueba. Sin perder generalidad podemos suponer que para cada D_n, $0 \notin D_n$. Construiremos una sucesión $\{a_n : n \in \omega\}$ en A^+ del siguiente modo. Sea $a_0 \in D_0$. Supongamos definido $a_n \in D_n$ y elijamos $a_{n+1} \in D_{n+1}$ tal que $a_{n+1} \leq a_n$. Esto es posible puesto que cada D_n es denso. Ahora bien, la sucesión $\{a_n : n \in \omega\}$ tiene la pif. Sea F un filtro que extienda a $\{a_n : n \in \omega\}$. Claramente $a_n \in F \cap D_n$, lo cual prueba que $F \cap D_n \neq \emptyset$. ■

Una consecuencia del teorema anterior es el Teorema de la Categoría de Baire, para espacios booleanos.

Teorema 2.3.25 (Baire) *Sean X es un espacio booleano y $\{D_n : n \in \omega\}$ una familia numerable de subconjuntos abiertos y densos de X. Entonces $\bigcap_{n\in\omega} D_n$ es denso en X.*

Prueba. Veamos que $\bigcap_{n\in\omega} D_n$ intersecta a todo abierto básico no vacío de X. Sea $K \in Clop(X)$ no vacío. Como D_n es denso, $K \cap D_n$ es abierto, no vacío y denso en K. Por cada $n \in \omega$, sea $\mathcal{E}_n = \{G \in Clop(K) \setminus \{\emptyset\} : G \subseteq K \cap D_n\}$. $\mathcal{E}_n$ es denso en el álgebra $Clop(K)$, pues si $L \in Clop(K)$ es no vacío entonces $L \cap (K \cap D_n) \neq \emptyset$. Como los tres son abiertos, $L \cap K \cap D_n$ es abierto, y en consecuencia, cualquier básico no vacío $J \subseteq L \cap K \cap D_n$ testifica que $\mathcal{E}_n$ tiene un elemento menor o igual que L. Por el teorema anterior, podemos hallar un filtro $\mathcal{F}$ en $Clop(K)$ tal que para cada $n \in \omega$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{E}_n \neq \emptyset$. $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos cerrados de K con la pif. Como K es compacto, $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Si $x \in \bigcap \mathcal{F}$ entonces $x \in K$ y para cada $n \in \omega$, $x \in G_n$ para algún $G_n \in \mathcal{E}_n$. Pero cada $G_n \subseteq D_n$, así que $x \in \cap D_n$, lo cual prueba que $K \cap \bigcap_{n\in\omega} D_n \neq \emptyset$. ■

La demostración anterior prueba el teorema de Baire a partir del teorema 2.3.24. También es posible derivar el teorema 2.3.24 a partir del teorema de Baire.

Por último demostraremos el siguiente teorema, pero antes algunas definiciones. Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana, p un ultrafiltro en $\mathbb{A}$ y $M \subseteq A$, tal que $\vee M \in A$. Se dice que *p preserva el supremo de M* si $\vee M \in p$ implica $M \cap p \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{M}$ una familia de subconjuntos de A tales que para cada $M \in \mathcal{M}$, $\vee M \in A$. Se dice que *p preserva los supremos de $\mathcal{M}$* si preserva el supremo de M para todo $M \in \mathcal{M}$

Teorema 2.3.26 (Rasiowa-Sikorski) *Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $\mathcal{M} = \{M_n : n \in \omega\}$ una familia numerable de subconjuntos de A tales que $\vee M \in A$ para toda $M \in \mathcal{M}$. Entonces existe un ultrafiltro p en $\mathbb{A}$ tal que p preserva los supremos de $\mathcal{M}$.*

Prueba. Por cada $n \in \omega$, definimos

$$D_n = \{a \in A^+ : (\exists m \in M_n)(a \leq m) \text{ ó } a \wedge (\vee M_n) = 0\}$$

Veamos que D_n es denso, por casos. Si existe $m \in M_n$ tal que $b \wedge m \neq 0$, tenemos que $b \wedge m \in D_n$ y $b \wedge m \leq b$. Si para todo $m \in M_n$, $b \wedge m = 0$ entonces $0 = \vee\{b \wedge m : m \in M_n\} = b \wedge (\vee M_n)$, de donde $b \in D_n$. Por el teorema 2.3.24, existe un filtro F en $\mathbb{A}$ tal que para cada $n \in \omega$, $F \cap D_n \neq \emptyset$. Sea p un ultrafiltro sobre $\mathbb{A}$ tal que $F \subseteq p$. Claramente, $p \cap D_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \omega$. Veamos que p preserva el supremo de M_n. Supongamos que $\vee M_n \in p$. Así, no existe $a \in p$ tal que $a \wedge (\vee M_n) = 0$, y en consecuencia, si $a \in p \cap D_n$ entonces existe $m \in M_n$ tal que $a \leq m$. Como $a \in p$, tenemos que $m \in p$, lo cual prueba que $p \cap M_n \neq \emptyset$.
■

Bibliografía

[Boo54] George Boole. *An Investigation of the Laws of Thought*. 1854.

[Eng89] Ryszard Engelking. *General Topology*. Heldermann, 1989.

[Hun04] E. V. Huntington. Sets of independent postulates for the algebra of logic. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (5):228–309, 1904.

[Kop89] Sabine Koppelberg. *Handbook of Boolean Algebras*, volume 1. North Holland, 1989.

[Pos21] Emile Post. Introduction to a general theory of elementary propositions. *Amer. J. Math.*, (43):163–185, 1921.

[RS70] Helena Rasiowa and Roman Sikorski. *The mathematics of metamathematics*. Pantswowe Wydawnictwo Naukowe, tercera edition, 1970.

[Sch13] H. M. Scheffer. A set of five independent postulates for boolean algebras with aplication to logical constants. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (14):481–488, 1913.

[Sto36] Marshall H. Stone. The theory of representations for boolean algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (40):37–111, 1936.