las fórmulas "más verdaderas", es decir, aquellas cuyas interpretaciones siempre son el máximo de un tal orden parcial.

EJERCICIOS 3. Sean $\mathbb{P}$ un conjunto de letras proposicionales, S, T subconjuntos de $\Phi(\mathbb{P})$, $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{P})$.

1. Demuestre que si $T \subseteq S$ y $T \models \alpha$ entonces $S \models \alpha$.
2. Demuestre que si para toda $\gamma \in S$, $T \models \gamma$ y $S \models \alpha$, entonces $T \models \alpha$.
3. Demuestre que $\emptyset \models \alpha$ si y sólo si α es una tautología.
4. Demuestra que $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ es lógicamente equivalente a $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$.
5. Demuestre que $\beta \models \alpha$ si y sólo si $\models (\beta \to \alpha)$.
6. Demuestra que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta$ si y sólo si $\models (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \beta$.
7. Demuestra que si α es tautología y $\alpha \models \beta$ entonces β es tautología.

2.2. Álgebras Booleanas. Con dos propósitos se presenta ahora la noción de álgebra booleana: Primero, establecer la escencia de la interpretación usual de los conectivos lógicos, que se pierde al considerar sólo dos valores de verdad. Segundo, poseer un lenguaje cómodo en el que se presenten teoremas importantes de manera sencilla.

DEFINICIÓN 2.3. Una *retícula* es un conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{P} = \langle P, \leq \rangle$ tal que para cualesquiera $p, q \in P$, el par $\{p, q\}$ tiene supremo e ínfimo en $\mathcal{P}$.

No está de más recordar que *supremo* (respectivamente, *ínfimo*) de un conjunto es la mínima (resp. máxima) cota superior (resp. inferior) de tal conjunto, es decir, el supremo de un conjunto A es un a tal que para todo $x \in A$, $x \leq a$ y además cumple que si $x \leq a'$ para todo $x \in A$ entonces $a \leq a'$; mientras que el ínfimo de un conjunto A es un a tal que para todo $x \in A$, $a \leq x$ y además cumple que si $a' \leq x$ para todo $x \in A$ entonces $a' \leq a$. Es sencillo probar (ver ejercicios) que supremos e ínfimos son únicos cuando existen.

Notación: Si $\mathcal{P} = \langle P, \leq \rangle$ es una retícula con máximo y mínimo, se denota al máximo por 1 y al mínimo por 0. El ínfimo de $\{x, y\}$ se denotará por $x \wedge y$ y el supremo por $x \vee y$

PROPOSICIÓN 2.4. *Sean $\mathcal{P} = \langle P, \leq \rangle$ una retícula y $a, b, c \in P$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- $a \leq b$,
- $a \wedge b = a$, *y*
- $a \vee b = b$·

Además se cumple lo siguiente:

1. $a \wedge b \leq a$, $a \wedge b \leq b$.
2. $a \vee b \geq a$, $a \vee b \geq b$.
3. $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$.
4. $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$.
5. $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.
6. $c \vee (a \wedge b) \leq (c \vee a) \wedge (c \vee b)$
   $c \wedge (a \vee b) \geq (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$
7. *Si* $a \leq b$ *entonces* $a \wedge c \leq b \wedge c$ *y* $a \vee c \leq b \vee c$.
8. *Si* $\mathcal{P}$ *tiene máximo y mínimo entonces* $a \wedge 0 = 0$, $a \vee 0 = a$
   $a \wedge 1 = a$, $a \vee 1 = 1$

Demostración. Se deja como ejercicio al lector, salvo la primera parte del inciso 6. Primero note que $c \leq c \vee a$ y $c \leq c \vee b$. También pasa que $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, por lo tanto $a \wedge b \leq c \vee a$ y $a \wedge b \leq c \vee b$. Luego $c \vee (a \wedge b)$ es cota inferior de $\{c \vee a, c \vee b\}$. Por lo tanto $c \vee (a \wedge b) \leq (c \vee a) \wedge (c \vee b)$.
La segunda parte del inciso 6 se prueba de manera análoga a la primera. $\square$

Definición 2.5. Una retícula $\mathcal{P}$ es *distributiva* si en el inciso 6 de la proposición anterior valen las igualdades.

Definición 2.6. Sea $\mathcal{P}$ una retícula con máximo y mínimo. Dados $p, q \in P$ decimos que q es *complemento* de p si $p \wedge q = 0$ y $p \vee q = 1$.

Proposición 2.7. *Si en una retícula distributiva* $\mathcal{P}$ *con máximo y mínimo, un elemento* $a \in P$ *tiene complemento, entonces éste es único.*

En virtud de este resultado, hablaremos de *el* complemento de...

Demostración. Sean q y q' complementos de p, es decir $q \wedge p = q' \wedge p = 0$ y $q \vee p = q' \vee p = 1$. Note que

$$q' = q' \wedge 1 = q' \wedge (q \vee p) = (q' \wedge q) \vee (q' \wedge p) = (q' \wedge q) \vee 0 = q' \wedge q$$

Por lo tanto $q' \leq q$. Análogamente se prueba que $q \leq q'$, y así, $q' = q$. $\square$

Notación: a^c denotará al complemento de a. Veamos las propiedades del complemento.

Proposición 2.8. *Sea* $\mathcal{P}$ *una retícula distributiva con máximo y mínimo, y sean* a *y* b *dos elementos de* P *que tienen complemento. Entonces,*

1. $(a^c)^c = a$, $1^c = 0$, $0^c = 1$.
2. $(a \wedge b)^c = a^c \vee b^c$,

3. $(a \vee b)^c = a^c \wedge b^c$,
4. $a \leq b$ *si y sólo si* $a \wedge b^c = 0$ *si y sólo si* $a^c \vee b = 1$,
5. $a = b$ *si y sólo si* $(a^c \vee b) \wedge (b^c \vee a) = 1$ *si y sólo si* $(a^c \wedge b) \vee (b \wedge a^c) = 0$

Demostración. (1) Observe que a satisface la definición de ser el complemento de a^c; y que 1 satisface la condición de ser complemento de 0. (2) Veamos que $a^c \vee b^c$ actúa como complemento de $a \wedge b$. Primero,

$$(a \wedge b) \wedge (a^c \vee b^c) = ((a \wedge b) \wedge a^c) \vee ((a \wedge b) \wedge b^c) = (b \wedge (a \wedge a^c)) \vee (a \wedge (b \wedge b^c))$$
$$= (b \wedge 0) \vee (a \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0.$$

Por otro lado,

$$(a \wedge b) \vee (a^c \vee b^c) = (a \vee (a^c \vee b^c)) \wedge (b \vee (a^c \vee b^c)) = 1 \wedge 1 = 1.$$

El resto del inciso (2) y el inciso (3) se quedan como ejercicios para el lector. (4) Si $a \leq b$ entonces $(a \wedge b^c) \leq (b \wedge b^c) = 0$, por lo tanto $a \wedge b^c = 0$. Si $a \wedge b^c = 0$ entonces $a^c \vee b = ((a^c \vee b)^c)^c = (a^{c^c} \wedge b^c)^c = (a \wedge b^c)^c = 0^c = 1$. Si $a^c \vee b = 1$, entonces $a = 1 \wedge a = (a^c \vee b) \wedge a = (a^c \wedge a) \vee (b \wedge a) = 0 \vee (b \wedge a) = b \wedge a$. Por la Proposición 2.4 $a \leq b$. El inciso (5) también queda como ejercicio para el lector. □

Definición 2.9. Un *álgebra booleana* es una retícula distributiva con máximo y mínimo en la que todo elemento tiene complemento.

El lector seguro conoce ejemplos de álgebras booleanas. Para empezar, las álgebras potencia de conjuntos lo son. En particular, el álgebra potencia de un conjunto unitario (i.e de la forma $\{e\}$) es isomorfa al conjunto $2 = \{0, 1\}$ dotado con las operaciones del ejemplo 1.3. Un célebre teorema de Marshall Stone proclama que de hecho todas las álgebras booleanas son isomorfas a álgebras de conjuntos (no necesariamente álgebras potencia), es decir, las operaciones de supremo, ínfimo y complemento son unión, intersección y complemento respecto al total. Un ejemplo de álgebra de conjuntos que no es (ni siquiera isomorfa a) un álgebra potencia es la que generamos con los subconjuntos finitos más los cofinitos de $\mathbb{N}$. Al ser un álgebra numerable, no puede ser la potencia de ningún conjunto.

En toda álgebra booleana están definidas las siguientes operaciones, es decir, para cualesquiera elementos a y b de un álgebra booleana $\mathcal{P}$ se define:

1. $a \to b := a^c \vee b$ (el complemento de a relativo a b).
2. $a \setminus b := a \wedge b^c$ (a menos b).
3. $a \triangle b := (a \setminus b) \vee (b \setminus a)$ (la diferencia simétrica).
4. $a \nabla b := (a \triangle b)^c$ (la coincidencia simétrica).

En los ejercicios de esta sección el lector se familiarizará con estas operaciones.

Ejemplo 2.10. Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico, y sean $CO(X)$ la familia de subconjuntos cerrados y abiertos de X, y $RO(X)$ la familia de los subconjuntos abiertos *regulares* de X. Se dice que A es abierto regular si $A = int(cl(A))$. El álgebra $CO(X)$ es un álgebra de conjuntos y está incluida en $RO(X)$, sin embargo esta última en general no es álgebra de conjuntos, pues el complemento de A es $int(X \setminus A)$, mientras que $A \vee B = int(cl(A \cup B))$.

Ejercicios 4. Para los siguientes ejercicios, sea $\mathcal{P} = \langle P, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado.

1. Sea A un subconjunto de P que tiene supremo. Demuestre que éste es único. Medite y convénzase de que lo mismo pasa en el caso análogo para ínfimos.
2. Complete la demostración de la Proposición 2.4.
3. Dé un ejemplo sencillo de una retícula que no sea distributiva.
4. Dé un ejemplo de retícula distributiva con máximo y mínimo con un elemento que no tenga complemento.
5. Dé un ejemplo de retícula con máximo y mínimo que tenga un elemento que a su vez tenga dos complementos diferentes.
6. Complete la demostración de la Proposición 2.8.

En los siguientes ejercicios, supondremos que $\mathcal{P}$ es un álgebra booleana.

7. $a \to b = 1$ si y sólo si $a \leq b$.
8. Demuestre que $a \triangle b = (a \vee b) \setminus (a \wedge b)$ y $a \triangledown b = (a \wedge b) \vee (a^c \wedge b^c) = (a \vee b^c) \wedge (b \vee a^c)$.
9. Demuestra que $a = b$ si y sólo si $a \triangle b = 0$.
10. Demuestre que en cualquier álgebra booleana, $\triangle$ es una operación de grupo abeliano, cuyo neutro es el 0 y en el que todos los elementos son autoinversos.
11. Use el ejercicio anterior para demostrar que en cualquier álgebra booleana, $\triangledown$ es una operación de grupo abeliano, cuyo neutro es el 1 y en el que todos los elementos son autoinversos.

2.3. La interpretación booleana. Filtros, homomorfismos, cocientes y ultrafiltros. La noción de tautología que fue definida en 2.1 parece ser restrictiva y artificial. ¿por qué admitir sólo dos valores de verdad? ¿qué se ganaría o perdería al admitir más valores de verdad, siempre que estos se encuentren en una estructura apropiada, como un álgebra booleana? Interpretemos un lenguaje proposicional $\mathbb{P}$ en un álgebra booleana $\mathcal{P}$. Por supuesto esto conlleva un cambio: ¿cuáles serán ahora las fórmulas válidas? Al igual que en el caso de las tautologías, digamos que una fórmula α es $\mathcal{P}$-válida si toda valuación de $\mathbb{P}$ en $\mathcal{P}$, asigna el valor 1 (el máximo de $\mathcal{P}$) a α. A partir de este momento, buscaremos demostrar que las tautologías son exactamente las fórmulas válidas en cualquier interpretación booleana. Para esto necesitamos incorporar al lenguaje la noción de filtro y estudiar los homomorfismos de álgebras booleanas.

Definición 2.11. Sea $\mathcal{P}$ un álgebra booleana. Un *filtro* F en $\mathcal{P}$ es un subconjunto de $\mathcal{P}$ tal que:

1. $1 \in F$, $0 \notin F$
2. Para todos $a \in F$ y $b \in \mathcal{P}$, si $b \geq a$ entonces $b \in F$.
3. Para todos $a, b \in F$ se tiene que $a \wedge b \in F$.

Dual a la noción de filtro, se define ideal.

Definición 2.12. Un ideal I en $\mathcal{P}$ es un subconjunto de $\mathcal{P}$ tal que:

1. $0 \in I$, $1 \notin I$
2. Para todos $a \in I$ y $b \in \mathcal{P}$, si $b \leq a$ entonces $b \in I$.
3. Para todos $a, b \in I$ se tiene que $a \vee b \in I$.

Observe que si I es un ideal sobre un álgebra booleana $\mathcal{P}$ entonces $I^* = \{a^c : a \in I\}$ es un filtro, llamado el *filtro dual* de I. Análogamente, si F es un filtro, entonces $F^* = \{a^c : a \in F\}$ es un ideal, llamado el *ideal dual* de F.

Ejemplo 2.13. Sea $\mathcal{P}$ un álgebra booleana cualquiera. Trivialmente, el conjunto $\{1\}$ es un filtro y el conjunto $\{0\}$ es un ideal. En el álgebra potencia de $\mathbb{N}$, la familia $\mathbf{Fin}(\mathbb{N})$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ es un ideal. Su filtro dual suele ser llamado el *filtro de Fréchet*.

Dado un elemento a de un álgebra booleana $\mathcal{P}$, la familia $F_a = \{b \in P : b \geq a\}$ es un filtro. Se dice que un filtro F es *fijo* cuando $F = F_a$ para algún $a \in P$. De lo contrario se dice que F es *libre*.

En la sección de ejercicios el lector podrá encontrar más ejemplos de filtros e ideales.

A continuación investigaremos cuándo un subconjunto cualquiera de un álgebra booleana está contenido en un filtro.

Definición 2.14. Decimos que $A \subseteq \mathcal{P}$ tiene la *propiedad de la intersección finita* (pif) si para cualesquiera $n \in \omega$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$,

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \neq 0.$$

Note que los filtros siempre tienen esta propiedad. Inversamente, los conjuntos con esta propiedad son aquellos para los que hay un filtro que los contiene.

PROPOSICIÓN 2.15. *Sea A un subconjunto de un álgebra booleana $\mathcal{P}$. Entonces, A tiene la pif si y sólo si existe un filtro F tal que $A \subseteq F$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Leftarrow$] Todo filtro tiene la pif, y subconjuntos de conjuntos con la pif tienen la pif.
$\Rightarrow$] Sea $F = \{b \in \mathcal{P} : \exists n \in \omega$ y $\exists a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tal que $b \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n\} \bigcup \{1\}$. Ver que esto es filtro se queda como ejercicio para el lector. $\square$

Los filtros tienen la siguiente propiedad curiosa:

PROPOSICIÓN 2.16. *Sean F un filtro en un álgebra booleana $\mathcal{P}$, y $p \in \mathcal{P}$. Si $p \notin F$ entonces $F \cup \{p^c\}$ tiene la pif.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $F \cup \{p^c\}$ no tiene la pif. Entonces existe $a \in F$ tal que $a \wedge p^c = 0$ (piense el lector por qué). Por la Proposición 2.8 (4), existe a en F tal que $a \leq p$, y así tenemos que $p \in F$. $\square$

DEFINICIÓN 2.17. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ álgebras booleanas.
Un *homomorfismo* de $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ es una función $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ tal que:

1. $\varphi(0_{\mathcal{P}}) = 0_{\mathcal{Q}}$ y $\varphi(1_{\mathcal{P}}) = 1_{\mathcal{Q}}$.
2. $\varphi(a^c) = \varphi(a)^c$.
3. $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$.

Observe que todo homomorfismo φ es *creciente*, i.e. satisface que si $a \leq b$ entonces $\varphi(a) \leq \varphi(b)$. Más aún, satisface también que $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$. Por otro lado, note que no basta que una función sea creciente para que sea homomorfismo de álgebras booleanas (las demostraciones quedan como ejercicio).

EJEMPLO 2.18.

1. El álgebra booleana 2 esta encajada en cualquier álgebra booleana $\mathcal{P}$ por la función φ dada por $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$.
2. La función inclusión de $CO(X)$ en $RO(X)$ es un homomorfismo de álgebras booleanas (donde X es un espacio topológico).
3. Sean A cualquier conjunto y $B \subseteq A$. La función $\varphi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ dada por $\varphi(a) = a \cap B$ es un homomorfismo. La inclusión de $\mathcal{P}(B)$ en $\mathcal{P}(A)$ no lo es.

De manera natural, los homomorfismos de álgebras booleanas determinan un filtro y un ideal en su dominio.

Definición 2.19. Sea $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ un homomorfismo de álgebras booleanas. Se define la *coraza* de φ por

$$Shell(\varphi) = \{a \in \mathcal{P} : \varphi(a) = 1_{\mathcal{Q}}\},$$

y el *núcleo* de φ se define por

$$Ker(\varphi) = \{a \in \mathcal{P} : \varphi(a) = 0_{\mathcal{Q}}\}.$$

Proposición 2.20. *Sea φ un homomorfismo de álgebras booleanas. Entonces $Shell(\varphi)$ es un filtro, $Ker(\varphi)$ es un ideal y $Ker(\varphi) = Shell(\varphi)^*$.*

Dejamos al lector probar esta proposición, a manera de ejercicio.

Cada filtro (o ideal) define una relación de equivalencia sobre un álgebra booleana $\mathcal{P}$, cuyo cociente hereda de manera natural la estructura de álgebra booleana. A continuación los detalles.

Definición 2.21. Sean $\mathcal{P}$ un álgebra booleana y F un filtro en $\mathcal{P}$. Diremos que a y b elementos de $\mathcal{P}$, son *equivalentes módulo F* (denotado por $a \sim_F b$) si y sólo si $a \triangledown b \in F$.

Recuerde el lector que $a \triangledown b$ es la coincidencia simétrica definida en la sección 2.2. Claramente, la intención de esta definición es que dos elementos de $\mathcal{P}$ son equivalentes módulo F si "están de acuerdo en un elemento grande según F".

Proposición 2.22. *$\sim_F$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Usando el ejercicio 4 (incisos 8 y 11) esta prueba se torna muy simple. Reflexividad y simetría se dejan como ejercicio. Veamos la transitividad. Primero, note que si $r, s \in F$ entonces $r \triangledown s = (r \vee s^c) \wedge (s \vee r^c) \geq r \wedge s \in F$. Sean $a, b, c \in \mathcal{P}$ tales que $a \triangledown b$ y $b \triangledown c \in F$. Entonces $a \triangledown c = (a \triangledown 1) \triangledown c = (a \triangledown (b \triangledown b)) \triangledown c = (a \triangledown b) \triangledown (b \triangledown c) \in F$. $\square$

La congruencia módulo F es además una relación de congruencia, es decir, se comporta correctamente con respecto a las operaciones de álgebra booleana.

Proposición 2.23. *Sean $\mathcal{P}$ un álgebra booleana, F un filtro en $\mathcal{P}$ y $a, b, c, d \in \mathcal{P}$ tales que $a \sim_F b$ y $c \sim_F d$, entonces:*

1. $a^c \sim_F b^c$
2. $(a \wedge c) \sim_F (b \wedge d)$
3. $(a \vee c) \sim_F (b \vee d)$

Demostración. 1 es inmediato del ejercicio 4.8. Para el inciso 2, observe que distribuyendo se obtiene que

$$(a \triangledown b) \wedge (c \triangledown d) = (a \wedge b \wedge c \wedge d) \vee (a \wedge b \wedge c^c \wedge d^c) \vee (a^c \wedge b^c \wedge c \wedge d) \vee (a^x \wedge b^c \wedge c^c \wedge d^c),$$

mientras que

$$(a\wedge c)\nabla(b\wedge c) = (a\wedge b\wedge c\wedge d)\vee(c^c\wedge d^c)\vee(a^c\wedge b^c)\vee(a^c\wedge d^c)\vee(\wedge b^c\wedge c^c).$$

Finalmente, note que cada disyunto de la primera ecuación es menor o igual que algún disyunto de la segunda. $\square$

Definición 2.24. $[a]\sqsubseteq[b]$ si $a^c\vee b\in F$.

Verifiquemos que esta definición no depende de representantes. Supongamos que $a_1\sim_F a_2$, $b_1\sim_F b_2$ y $a_1^c\vee b_1\in F$. Entonces $(a_1^c\vee b_1)\vee(a_1\nabla a_2)\vee(b_1\nabla b_2)\in F$. Distribuyendo y cancelando adecuadamente se tiene que

$$(a_1^c\vee b_1)\vee(a_1\nabla a_2)\vee(b_1\nabla b_2)=$$
$$(b_1\wedge b_2\wedge a_1^c\wedge a_2^c)\vee(b_1\wedge b_2\wedge a_1\wedge a_2)\vee(b_1^c\wedge b_2^c\wedge a_1^c\wedge a_2^c).$$

Note que cada disyunto de la ecuación anterior es menor o igual que $a_2^c\vee b_2$, por lo que $a_2^c\vee b_2\in F$.

Proposición 2.25. *La relación $\sqsubseteq$ es un orden parcial sobre $\mathcal{P}/F$*

Demostración. La reflexividad es trivial, la antisimetría se obtiene fćilmente del ejercicio 4.8. Demostraremos la transitividad. Supongamos que $a^c\vee b$ y $b^c\vee c$ están en F. Así basta observar que $(a^c\vee b)\wedge(b^c\wedge c)=(a^c\wedge(b^c\vee c))\vee(b\wedge c)\leq a^c\vee c$. $\square$

Proposición 2.26. *Sean $\mathcal{P}$ un álgebra booleana , F un filtro en $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}/F$ el cociente.*
Si $[a],[b]\in\mathcal{P}/F$, entonces:

1. $[a]^C=[a]^c$.
2. $[a]\bigwedge[b]=[a\wedge b]$.
3. $[a]\bigvee[b]=[a\vee b]$.

Demostración. Por la Proposición 2.23, estas definiciones no dependen de representantes. Tan solo probaremos la ecuacuón (2), dejando el resto como ejercicio para el lector. Probemos que $\bigwedge$ se comporta como el ínfimo con respecto a $\sqsubseteq$. Claramente, $(a\wedge b)^c\vee a=(a^c\vee b^c)\vee a=1\in F$, por lo tanto $[a\wedge b]\sqsubseteq[a]$, y análogamente se prueba que $[a\wedge b]\sqsubseteq[b]$. Por lo tanto $[a\wedge b]$ es cota inferior de $\{[a],[b]\}$. Sea $c\in\mathcal{P}$ tal que $[c]\sqsubseteq[a]$ y $[c]\sqsubseteq[b]$, entonces $c^c\vee a\in F$ y $c^c\vee b\in F$, de donde $(c^c\vee a)\wedge(c^c\vee b)=c^c\vee(a\wedge b)\in F$. Luego $[c]\sqsubseteq[a\wedge b]$. $\square$

Observe que, como de costumbre, la función $\varphi:\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}/F$ dada por $\varphi(a)=[a]_F$ es un homomorfismo suprayectivo. A continuación discutiremos el caso en el que $\mathcal{P}/F$ es isomorfa al álgebra 2.

Definición 2.27. Un filtro F sobre un álgebra booleana $\mathcal{P}$ es un *ultrafiltro* si es un filtro maximal con respecto a la contención.

Los ejemplos de ultrafiltros están en dos extremos: o son muy triviales o son imposibles de describir. Se dice que un elemento a de un álgebra booleana $\mathcal{P}$ es un *átomo* si no existe $x \in \mathcal{P}$ tal que $0 < x < a$. De este modo, el filtro fijo $F_a = \{p \in \mathcal{P} : p \geq a\}$ es un ultrafiltro cuando a es un átomo. Queda como ejercicio probar que si F_a es un ultrafiltro, entonces a es un átomo. La existencia de ultrafiltros libres está garantizada por el siguiente Teorema.

Teorema 2.28. *(del ultrafiltro, Tarski) En cualquier álgebra booleana $\mathcal{P}$, para cada conjunto $A \subseteq \mathcal{P}$ con la pif, existe un ultrafiltro F en $\mathcal{P}$ tal que $A \subseteq F$.*

Demostración. Sea $\mathcal{R}$ la familia de todos los filtros $G \subseteq \mathcal{P}$ tales que $A \subseteq G$, y considere a $\mathcal{R}$ ordenado por contención. Por la Proposición 2.15, $\mathcal{R}$ es no vacío. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}$ una cadena. Supongamos que $\bigcup \mathcal{C}$ no tiene la pif. Entonces existen $n \in \omega$ y $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \bigcup \mathcal{C}$ tales que $c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n = 0$. Por ser una cantidad finita existe $G \in \mathcal{C}$ tal que $c_1, c_2, \ldots, c_n \in G$, lo cual implica que G no tiene la pif, una contradicción. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{C}$ tiene la pif. Por el Lema de Kuratowski-Zorn existe un maximal $F \in \mathcal{R}$. $\square$

El siguiente teorema muestra varias equivalencias de ser ultrafiltro.

Teorema 2.29. *Sea $\mathcal{P}$ un álgebra booleana, y $F \subseteq \mathcal{P}$ un filtro. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *F es un ultrafiltro.*
2. *Para todos $p, q \in \mathcal{P}$, si $p \vee q \in F$ entonces, o bien $p \in F$, o $q \in F$.*
3. *Para todo $p \in \mathcal{P}$, o bien $p \in F$, o $p^c \in F$.*
4. *$\mathcal{P}/F \cong \{0, 1\}$.*
5. *F^* es un ideal maximal.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$. Supongamos que $p \notin F$ y $q \notin F$. Por la Proposición 2.16, $F \cup \{p^c\}$ y $F \cup \{q^c\}$ tienen la pif, pero por la maximalidad de F, ambos conjuntos están contenidos en F y por tanto, $(p \vee q)^c = p^c \wedge q^c \in F$. Como F tiene la pif, $p \vee q \notin F$. $(2 \Rightarrow 3)$. Sea $p \in \mathcal{P}$. Entonces $p \vee p^c = 1 \in F$, y por (2), $p \in F$ o $p^c \in F$. $(3 \Rightarrow 4)$. Es un trámite burocrático verificar que la función $\varphi : \mathcal{P} \to 2$ dada por $\varphi(p) = 1$ si y sólo si $p \in F$ es un isomorfismo de álgebras booleanas. $(4 \Rightarrow 1)$. Sea $\varphi : \mathcal{P}/F \to 2$ un isomorfismo de álgebras booleanas. Claramente $F = Shell(\varphi)$ es un filtro. Si $p \notin F$ entonces $\varphi(p) = 0$ por tanto $p \in Ker(\varphi) = F^*$, y por tanto $p^c \in F$. Como F tiene la pif, p no puede estar en un filtro que extienda a F, con lo cual queda establecida la maximalidad de F. ($1 \Leftrightarrow 5$) es inmediato. $\square$

Ahora estamos en posición de regresar a la interpretación booleana de las fórmulas proposicionales.

Teorema 2.30. *Sea $\mathbb{P}$ un conjunto de letras proposicionales y α una fórmula en $\mathbb{P}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *α es una tautología,*
2. *existe un álgebra booleana $\mathcal{P}$ tal que para toda $v : \mathbb{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, $v^*(\alpha) = 1_{\mathcal{P}}$, y*
3. *para toda álgebra booleana $\mathcal{P}$ y toda $V : \mathbb{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, $V^*(\alpha) = 1_{\mathcal{P}}$.*

Demostración. ($3 \Rightarrow 2$) es inmediato.

($2 \Rightarrow 1$) Supongamos α no es una tautología, sea $v : \mathbb{P} \longrightarrow 2$ tal que $v^*(\alpha) = 0$. Sea $\mathcal{P}$ cualquier álgebra booleana. Consideremos el homomorfismo $\varphi : 2 \longrightarrow \mathcal{P}$ dado por $\varphi(0) = 0_{\mathcal{P}}$ y $\varphi(1) = 1_{\mathcal{P}}$. De este modo, $w := \varphi \circ v : \mathbb{P} \to \mathcal{P}$ es una asignación tal que $w^*(\alpha) = 0$.

($1 \Rightarrow 3$) Supongamos que existe un álgebra booleana $\mathcal{P}$ y una función $v : \mathbb{P} \to \mathcal{P}$ tal que $v^*(\alpha) \neq 1_{\mathcal{P}}$. Entonces $v^*(\neg\alpha) = v^*(\alpha)^c \neq 0_{\mathcal{P}}$. De este modo, el conjunto $\{v^*(\neg\alpha)\}$ tiene la pif. Por Teorema del Ultrafiltro 2.28 existe un ultrafiltro F en $\mathcal{P}$ tal que $v^*(\neg\alpha) \in F$. Ahora definamos $w : \mathbb{P} \longrightarrow 2$ de la siguiente manera: $w(P) = 1$ si y sólo si $v(P) \in F$. Se deja como ejercicio demostrar por inducción que para cada fórmula β, $w^*(\beta) = 1$ si y sólo si $v^*(\beta) \in F$. Así w es una asignación para la cual $w(\alpha) = 0$, demostrando que α no es tautología. $\square$

Ejercicios 5.

1. Demuestre que las siguientes familias de conjuntos tienen la pif. Describa al filtro generado por ellos y a su ideal dual.
   a) $\{(a, \infty) \subseteq \mathbb{R} : a \in \mathbb{R}\}$
   b) $\{A \subseteq \kappa : A$ es cerrado y no acotado$\}$, donde κ es un cardinal.
   c) $\{A \subseteq \mathbb{R} : A$ denso y abierto$\}$
   d) $\{A \subseteq [0, 1] : \lambda(A) = 1\}$, donde λ es la medida de Labesgue sobre $[0, 1]$.
2. Sea φ un homomorfismo de álgebras booleanas y a y b en el dominio de φ. Demuestre que $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$ y que si $a \leq b$ entonces $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.
3. Complete la demostración de la Proposición 2.15.
4. Demuestre la proposición 2.20.
5. Demuestre la reflexividad y simetría en la Proposición 2.22.
6. Demuestre (3) en la proposición 2.23.