

Geometría Euclidiana y Ecuaciones de Cauchy Riemann

Jesús Muciño Raymundo

muciray@matmor.unam.mx

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM

IX Escuela de Matemáticas de America Latina y el Caribe
México 2013

1. Notación.

- $\sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria.

- $\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{C}$
 $(x, y) \longleftrightarrow x + \sqrt{-1}y = z.$ es el traductor.

- $\sqrt{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \sqrt{-1}z,$ $\sqrt{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-y, x).$

- $\frac{1}{z} : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$
 $z \mapsto \frac{1}{z},$ $\frac{1}{z} : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$
 $(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right).$

- f una función en un abierto de \mathbb{R} o \mathbb{C} .

- $u + \sqrt{-1}v : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ o equivalentemente $(u(x, y), v(x, y)) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función en un abierto D que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Usando el traductor tenemos

$$\begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{C} & \xrightarrow{u + \sqrt{-1}v} & \mathbb{C} \\ \uparrow T & & \uparrow T \\ D \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{(u, v)} & \mathbb{R}^2. \end{array}$$

2. La integral de línea y el juego de futbol americano.

Imaginemos el juego de futbol americano en el plano \mathbb{R}^2 .

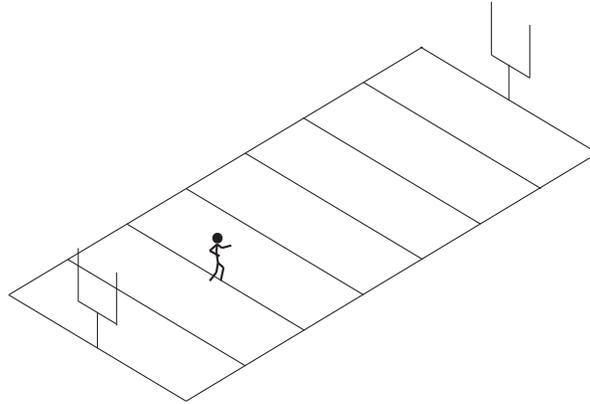


Figura 1: futbol-americano-clasico.pdf El juego de futbol americano.

Uno de los equipos debe llevar el balón atravesando las líneas verticales $\{y = cte\} \subset \mathbb{R}^2$ en una jugada descrita por una trayectoria (del balón)

$$\begin{aligned} \gamma(t) : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Dos axiomas de este juego, relevantes para nosotros, son:

- A cada jugada $\gamma(t)$ le corresponde un avance

$$\begin{aligned} \text{jugada} &\longrightarrow \text{avance en } \mathbb{R} \\ \gamma(t) &\longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{coordenada } x \\ \text{de } \gamma(1) \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{coordenada } x \\ \text{de } \gamma(0) \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

- A cada jugada $\gamma(t)$ que sea cerrada, esto es $\gamma(1) = \gamma(0)$, le corresponde avance cero.

¿Cómo hacer un modelo matemático de lo anterior?

Usando la integral de línea obtenemos

$$\gamma(t) \longmapsto \int_{\gamma} dx = \int_0^1 \frac{dx(t)}{dt} dt.$$

Para hallar ejemplos más interesantes usamos

$$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy.$$

pero...

Contraejemplo. La integral de línea

$$\gamma \longmapsto \int_{\gamma} y dx.$$

depende de la trayectoria γ , no solo de sus puntos extremos, y la anterior aplicación \mapsto es un objeto muy complicado, pues el espacio de todas las trayectorias $\{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2\}$ lo es.

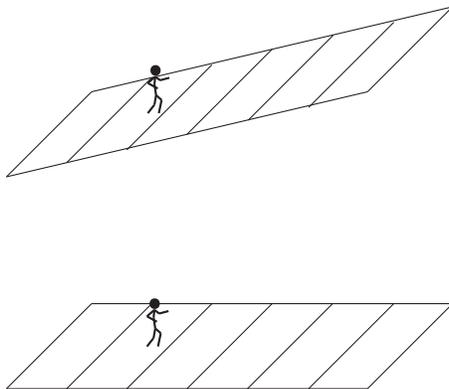


Figura 2: La gráfica de la función de avance $\gamma \mapsto \int_{\gamma} dx$ en el juego de futbol americano.

3. El Teorema Fundamental del Cálculo en \mathbb{R}^2 .

Recordemos la versión en una variable.

Teorema 3.1. Consideramos $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^0 . Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) La función

$$\begin{aligned} F(x) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x f(x)dx \end{aligned}$$

está bien definida, es decir, la integral sólo depende de los puntos extremos $0, x \in \mathbb{R}$.

ii)

$$\int_{\gamma} f(x)dx = 0$$

para toda curva cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 por trozos.

iii) Existe una función $F(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , con

$$F(0) = 0 \quad y \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

El enunciado anterior usa integrales de línea, ello es equivalente a usar la integral de Riemann.

El caso de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} requiere nuevos ingredientes:

i) El integrando debe ser una 1-forma diferencial $A(x, y)dx + B(x, y)dy$.

ii) Debe usarse la integral de línea

$$\int_{\gamma} A dx + B dy = \int_0^1 \left(A(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} + B(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} \right) dt.$$

ii) La condición $A_y = B_x$ en las derivadas parciales de la forma diferencial debe satisfacerse.

iii) La forma del dominio de la función debe ser simple *i.e.* sin agujeros.

Empezaremos por explorar el caso donde el dominio es \mathbb{R}^2 o un rectángulo abierto $(x_1, y_1) \times (x_2, y_2)$ en \mathbb{R}^2 o un disco.

Teorema 3.2. Para $A(x, y)dx + B(x, y)dy$ una 1-forma diferencial de clase C^1 en D , denotando el plano \mathbb{R}^2 o un rectángulo abierto o un disco abierto, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) Para toda trayectoria cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$, de clase C^1 por trozos,

$$\int_{\gamma} A dx + B dy = 0.$$

ii) Para todo par de trayectorias, $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow D$ con los mismos extremos

$$\int_{\alpha} Adx + Bdy = \int_{\beta} Adx + Bdy.$$

iii) Para $(x_0, y_0) \in D$ un punto fijo,

$$\begin{aligned} H : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} A(x, y)dx + B(x, y)dy \end{aligned}$$

es una función bien definida de clase C^2 .

iv) Existe una función $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 con

$$dH = H_x dx + H_y dy = A(x, y)dx + B(x, y)dy.$$

v)

$$A_y = B_x.$$

Se dice que $Adx + Bdy$ es cerrada cuando $A_y = B_x$.

Demostración. (i \Rightarrow ii) Consideramos $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ una trayectoria cerrada. Sean α y β dos trayectorias tales que $\alpha((x_0, y_0)) = \beta((x_0, y_0))$ y $\alpha((x, y)) = \beta((x, y))$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} Adx + Bdy &= \int_{\alpha} Adx + Bdy + \int_{\beta} Adx + Bdy \\ &= \int_{\alpha} Adx + Bdy - \int_{-\beta} Adx + Bdy \\ &= \int_{\alpha} Adx + Bdy - \int_{\alpha} Adx + Bdy = 0. \end{aligned}$$

(ii \Rightarrow i) Sean α y β dos trayectorias que van de (x_0, y_0) a (x, y) y γ la trayectoria cerrada que ellas determinan. Entonces

$$0 = \int_{\gamma} Adx + Bdy = \int_{\alpha} Adx + Bdy - \int_{\beta} Adx + Bdy.$$

(ii \Rightarrow iii) De las implicaciones anteriores se sigue que

$$H(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Adx + Bdy$$

está bien definida. Para probar que es diferenciable basta calcular sus derivadas parciales.

Lema 3.3. *Diferenciación bajo la integral para integrales de línea. Consideremos $Adx + Bdx$ una forma diferencial en D . Para $(x_1, y_1) \in D$ se tiene que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{(x_1, y_1)}^{(x_1, y_1) + (\Delta x, 0)} Adx + Bdy \right) \Big|_{(x_1, y_1)} &= A((x_1, y_1)), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{(x_1, y_1)}^{(x_1, y_1) + (0, \Delta y)} Adx + Bdy \right) \Big|_{(x_1, y_1)} &= B((x_1, y_1)), \end{aligned}$$

donde se consideran las integrales como funciones de x y y respectivamente.

Demostración. Basta calcular ambas integrales, por ejemplo para $(x_1, y_1) \in D$ en la primera tenemos:

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_1, y_1) + (\Delta x, 0)} Adx + Bdy = \int_{x_1, y_1}^{x_1 + \Delta x, y_1} A(x_1 + \Delta x, y_1)dx,$$

donde Δx es una variable en una vecindad de $0 \in \mathbb{R}$. Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, el resultado sigue. \square

Ya que A , B son de clase C^1 , H es de clase C^2 .

(iii \Leftrightarrow iv) Es obvia.

(iv \Rightarrow v) Como $H(x, y)$ es una función de clase C^2 sus derivadas parciales cruzadas coinciden, por lo tanto

$$A_y = H_{yx} = H_{xy} = B_x.$$

(v \Rightarrow iv) Reconstruimos H a partir del conocimiento de sus derivadas parciales A y B , usando la integral indefinida a lo largo de las líneas $y = cte$ en D , obtenemos

$$H(x, y)_x = A(x, y) \Rightarrow H(x, y) = \int A(x, y) dx + \phi(y),$$

donde $\phi(y)$ es una función que sólo depende de y . $\phi(y)$ es la constante de integración. Así mismo

$$H(x, y)_y = B(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int A(x, y) dx + \frac{d\phi(y)}{dy},$$

despejando

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = B(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int A(x, y) dx.$$

A priori no sabemos si $d\phi(y)/dy$ sea sólo función de y , comprobándolo podriamos calcular la constante de integración (a partir de integrales indefinidas a lo largo de $x = cte$). Luego,

$$\phi(y) = \int \left(B(x, y) - \int \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} dx \right) dy$$

y por lo tanto

$$H(x, y) = \int A(x, y) dx + \int \left(B(x, y) - \int \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} dx \right) dy.$$

Usando que $A_x = B_y$ calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{d\phi(y)}{dy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(B(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int A(x, y) dx \right) = \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\int A(x, y) dx \right) = \\ &= \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\int A(x, y) dx \right) = B(x, y)_x - A(x, y)_y = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d\phi(y)/dy$ es sólo función de y .

(iii \Rightarrow ii) Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}$ una trayectoria C^1 con $\gamma(a) = (x_0, y_0)$ y $\gamma(b) = (x, y)$. Consideramos la composición $H \circ \gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Usando la regla de la cadena y por el Teorema Fundamental del Cálculo se sigue que

$$\begin{aligned} H((x, y)) - H((x_0, y_0)) &= H \circ \gamma(b) - H \circ \gamma(a) = \int_a^b \frac{d(H \circ \gamma)}{dt} dt = \\ &= \int_a^b \left(A(x(t), y(t)) \frac{d\gamma_1}{dt} + B(x(t), y(t)) \frac{d\gamma_2}{dt} \right) dt = \int_\gamma A dx + B dy. \end{aligned}$$

Como γ es una curva cerrada $(x_0, y_0) = (x, y)$ y tenemos la conclusión. \square

La prueba usual del resultado anterior se vale del:

Teorema 3.4. de Green. Consideramos un ara region elemental $\mathcal{R} \subset D$ una región elemental cuya frontera es $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$. Si $A : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $B : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1 , entonces

$$\int_\gamma A dx + B dy = \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy.$$

Recordemos que una región es elemental si es de la forma $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ (y/o $\{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$), donde $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ son continuas. El Teorema de Green requiere que \mathcal{R} no tenga agujeros. Lo anterior muestra que (v) \Rightarrow (iv), sin embargo, hemos preferido presentar un argumento más elemental.

Dada $A(x, y)dx + B(x, y)dy$ cerrada en un dominio sin agujeros, como el teorema, ella define un juego de fútbol americano. Dos axiomas de este juego son:

- A cada jugada $\gamma(t)$ le corresponde un avance

$$\begin{aligned} \text{jugada} &\longrightarrow \text{avance en } \mathbb{R} \\ \gamma(t) &\longmapsto H(\gamma(1)) - H(\gamma(0)). \end{aligned} \quad (2)$$

- A cada jugada $\gamma(t)$ que sea cerrada, esto es $\gamma(1) = \gamma(0)$ le corresponde avance cero.

¿Este juego es parecido a el de dx ?

Observación 3.5. Dicotomía.

1. En vecindades pequeñas de punto en $D - \{A(x, y) = 0 = B(x, y)\}$ el juego es topológicamente como el de dx .
2. En los lugares donde $A(x, y) = 0 = B(x, y)$ el juego no es topológicamente como el de dx .

4. Integración de 1-formas diferenciales holomorfas.

Dados dos ingredientes

- una función $f(z) = u + \sqrt{-1}v : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y
 - una trayectoria $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ de clase C^1 por trozos,
- entonces
- la integral definida compleja de su 1-forma holomorfa asociada es el número complejo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\gamma} (u + \sqrt{-1}v)(dx + \sqrt{-1}dy) \\ &= \int (udx\sqrt{-1}udy + \sqrt{-1}vdx - 1vdy) \\ &= \left(\int_{\gamma} udx - vdy \right) + \sqrt{-1} \left(\int_{\gamma} vdx + udy \right) \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (3)$$

¿Qué significa esto?

Recordando las secciones anteriores, debemos:

- fijar un punto de partida $z_0 \in D$,
- dejar libre el punto final de las γ ,
- esperar que D no tenga agujeros y
- esperar que la condición de cerradura se cumpla para la pareja de 1-formas diferenciales que aparecieron en la ecuación (3).

Afortunadamente:

Lema 4.1. Dos veces cerrada igual a Cauchy–Riemann. En un abierto $D \subset \mathbb{C}$ son equivalentes las siguientes afirmaciones.

1. $f(z) = u(z) + \sqrt{-1}v(z)$ es holomorfa.
2. Las 1-formas diferenciales $u(x, y)dx - v(x, y)dy$ y $v(x, y)dx + u(x, y)dy$ son cerradas.

Demostración. Usando el traductor tenemos

$$\begin{array}{ccc}
 D \subset \mathbb{C} & \xrightarrow{u + \sqrt{-1}v} & \mathbb{C} \\
 \uparrow T & & \uparrow T \\
 D \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{(u, v)} & \mathbb{R}^2.
 \end{array}$$

Como f es holomorfa se satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Por la primera igualdad $v(x, y)dx + u(x, y)dy$ es cerrada.

Por la segunda igualdad $u(x, y)dx - v(x, y)dy$ es cerrada. \square

5. Un doble juego de futbol americano.

Dada $f(z)dz$, con $f(z)$ holomorfa en un dominio sin agujeros $D \subset \mathbb{C}$, como el teorema, ella define “un juego de futbol americano”. Dos axiomas de este juego son:

- A cada jugada $\gamma(t)$ le corresponde un avance

$$\begin{array}{ccc}
 \text{jugada} & \longrightarrow & \text{avance en } \mathbb{C} \\
 \gamma(t) & \longmapsto & \dots(\gamma(1)) - \dots(\gamma(0)).
 \end{array} \tag{4}$$

- A cada jugada $\gamma(t)$ que sea cerrada, esto es $\gamma(1) = \gamma(0)$ le corresponde avance cero.

Ejemplo 5.1. El caso más sencillo es

$$f(z)dz = 1dz.$$

Considera el cálculo “formal” usando $(\sqrt{-1})^2 = -1$;

$$\begin{aligned}
 dz &:= (dx + \sqrt{-1}dy) \\
 &= \omega_1 + \sqrt{-1}\omega_2.
 \end{aligned}$$

ω_1 y ω_2 son 1-formas diferenciales cerradas en \mathbb{R}^2 . Consideramos dos familias de trayectorias.

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha(t) = (x_0 + t, y_0) & & \beta(s) = (x_0, y_0 + s), \\
 t \in \mathbb{R} & & s \in \mathbb{R}.
 \end{array}$$

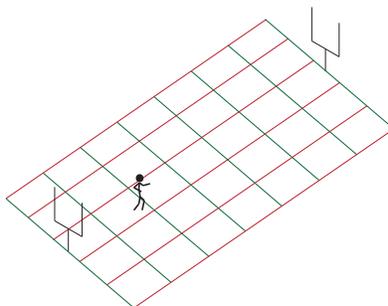


Figura 3: La función $\gamma \mapsto \int_{\gamma} dz$ es un juego de futbol americano con dos colores.

Ahora calculamos

$$\int_{\alpha} \omega_1 = t, \quad \int_{\beta} \omega_1 = 0,$$

$$\int_{\alpha} \omega_2 = 0, \quad \int_{\beta} \omega_2 = s.$$

Con ello hemos definido dos funciones de clase C^∞

$$\begin{aligned} \int \omega_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & \int \omega_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \int_{(0,0)}^{(x,y)} \omega_1 = x & (x, y) &\longmapsto \int_{(0,0)}^{(x,y)} \omega_2 = y. \end{aligned}$$

Definimos dos campos vectoriales reales en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$:

$$\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\sqrt{-1}}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y}.$$

En resumen:

$$\begin{array}{ccc} & \frac{dz}{dt} = 1 & \\ & \updownarrow & \\ & 1 \frac{\partial}{\partial z} & \\ \swarrow & & \searrow \\ dz & \longleftrightarrow & \Psi(z) = z. \end{array} \quad (5)$$

En el caso general, consideremos $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa, donde D es abierto y conexo. Estamos interesados en estudiar la integral indefinida de la 1-forma diferencial meromorfa

$$\Psi(z) = \int_{z_0}^z f(\omega) d\omega : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

donde $z_0 \in D$ es un punto fijo, como $\Psi(z_0) = 0$ describimos ahora localmente las imágenes inversas de \mathbb{R} e $\sqrt{-1}\mathbb{R}$ bajo F .

Lema 5.2. Brújulas reales e imaginarias. Consideramos $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa y un punto $z_0 \in D$ con $f(z_0) \neq 0, \infty$.

Entonces existen dos trayectorias

$$\alpha(t), \beta(s) : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow D, \quad \text{con } \alpha(0) = \beta(0) = z_0,$$

de clase C^1 , únicamente determinadas por las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha(t)) &= \int_{z_0}^{\alpha(t)} f(\omega) d\omega = t \in \mathbb{R}, \\ \Psi(\beta(s)) &= \int_{z_0}^{\beta(s)} f(\omega) d\omega = \sqrt{-1}s \in \sqrt{-1}\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demostración. Primera prueba usando campos vectoriales y ecuaciones diferenciales.

En coordenadas $z = x + \sqrt{-1}y$, supongamos que

$$f(x + \sqrt{-1}y) = u(x, y) + \sqrt{-1}v(x, y).$$

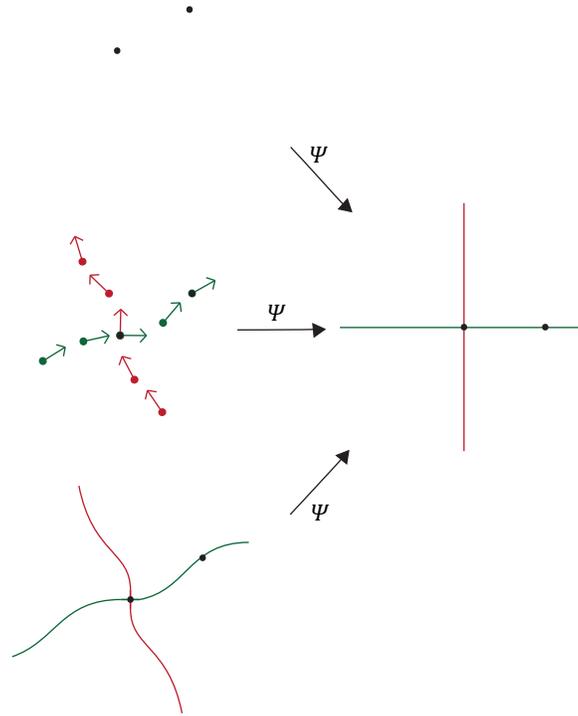


Figura 4: Información geométrica para integrar: El punto de salida y llegada para γ . Las direcciones donde la integral resulta real o imaginaria. Las trayectorias donde la integral es real o imaginaria.

Definimos dos campos vectoriales reales C^1 en $D - \{\text{ceros y polos de } f\}$:

$$\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} := \frac{u}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{v}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} := \frac{v}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Aquí la notación $\frac{\partial}{\partial z}$ es sólo formal, se explicará más en detalle adelante. Como $f(z_0) \neq 0, \infty$, por el Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones para campos vectoriales C^1 , existen dos trayectorias solución de esos campos que pasan por z_0 , las denotamos como $\alpha(t)$ y $\beta(s)$ respectivamente. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\Psi(\alpha(t)) &= \int_{\alpha(t)} f(z) dz \\
&= \int_{z_0}^{\alpha(t)} (udx - vdy) \left(\frac{u}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{v}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \sqrt{-1}(vdx + udy) \left(\frac{u}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{v}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
&= \left(\int_0^t u \frac{u}{u^2 + v^2} - v \frac{-v}{u^2 + v^2} \right) + \sqrt{-1} \left(\int_0^t v \frac{-u}{u^2 + v^2} + u \frac{v}{u^2 + v^2} dt \right) \\
&= \int_0^t 1 dt + \sqrt{-1} \int_0^t 0 dt \\
&= t,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\Psi(\beta(s)) &= \int_{\beta(s)} f(z) dz \\
&= \int_{z_0}^{\beta(s)} (udx - vdy) \left(\frac{v}{u^2 + sv^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{u}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \sqrt{-1}(vdx + udy) \left(\frac{v}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{u}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
&= \left(\int_0^s u \frac{v}{u^2 + v^2} - v \frac{u}{u^2 + v^2} \right) + \sqrt{-1} \left(\int_0^s v \frac{v}{u^2 + v^2} + u \frac{u}{u^2 + v^2} dt \right) \\
&= \int_0^s 0 ds + \sqrt{-1} \int_0^s 1 ds \\
&= \sqrt{-1}s.
\end{aligned} \tag{7}$$

Segunda prueba usando el teorema de la función inversa en \mathbb{R}^2 . La integral indefinida $\Psi(z) := U(z) + \sqrt{-1}V(z)$ es una aplicación que envía una vecindad de z_0 en una vecindad de 0. Aplicándole en traductor tenemos

$$\begin{array}{ccc}
D \subset \mathbb{C} & \xrightarrow{U + \sqrt{-1}V} & \mathbb{C} \\
\uparrow T & & \uparrow T \\
D \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{(U, V)} & \mathbb{R}^2.
\end{array}$$

Aplicando en traductor a la diferencial real y compleja tenemos

$$\begin{array}{ccc}
D \subset \mathbb{C} & \xrightarrow{U_x + \sqrt{-1}V_x} & L(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\
\uparrow T & & \uparrow T \\
D \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}} & L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2).
\end{array}$$

donde $L(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ significan las aplicaciones \mathbb{C} lineales y \mathbb{R} lineales, respectivamente. Por ello la diferencial de la aplicación real es

$$D(U, V)|_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{pmatrix} |_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} |_{(x_0, y_0)} \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2).$$

Pero afortunadamente

$$f(x_0 + \sqrt{-1}y_0) = u(x_0, y_0) + \sqrt{-1}v(x_0, y_0) := a_0 + \sqrt{-1}b_0 \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Entonces

$$\det D(U, V)|_{(x_0, y_0)} = a_0^2 + b_0^2 \neq 0.$$

Por el Teorema de la Función Inversa en \mathbb{R}^2 , hay una vecindad de $\mathcal{V}(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$(U, V) : \mathcal{V}(x_0, y_0) \subset D \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (U, V)(x_0, y_0) = (0, 0),$$

es invertible y de clase C^2 . Usando la aplicación inversa calculada en la parametrización de los ejes en \mathbb{R}^2 la imagen de (U, V) obtenemos las trayectorias deseadas

$$(U, V)^{-1}(t, 0) := \alpha(t), \quad (U, V)^{-1}(0, s) := \beta(s).$$

□

Resumiendo si $f(z_0)dz$, con $f(z_0) \neq 0, \infty$, es una 1-forma diferencial holomorfa entonces hay un “rectángulo” que contiene a z_0 donde

$$\Psi(z) = \int_{z_0}^z f(\omega)d\omega$$

se ve como un doble juego de futbol americano.

$$\begin{array}{ll} \text{jugada} & \longrightarrow \text{avance en } \mathbb{C} \\ \gamma & \longmapsto \left(\int_{\gamma} u dx - v dy \right) + \sqrt{-1} \left(\int_{\gamma} v dx + u dy \right). \end{array}$$

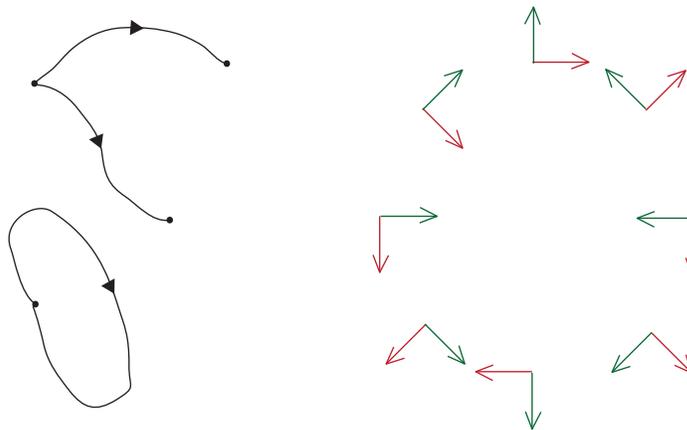


Figura 5: Los campos vectoriales proporcionan una intuición para integrar.

6. Geometría euclidiana.

Nuestro segundo objetivo es obtener a partir de $f(z)dz$ una geometría euclidiana.

Dada $f(z)dz = (u + \sqrt{-1}v)(dx + \sqrt{-1}dy)$, le hemos asociado dos campos vectoriales

$$\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{u}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{v}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{v}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Observemos que en cada punto de D ambos vectores tienen la misma norma y el segundo vector es el que resulta de rotar por $\sqrt{-1}$ al primer vector.

Si $f(z_0) \neq 0, \infty$, hay una vecindad abierta de z_0 en D tal que las trayectorias integrales de

$$\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} \quad y \quad \frac{\sqrt{-1}}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}$$

son enviadas bajo

$$\Psi(z) = \int^z f(z) dz$$

(que es un difeomorfismo local en z_0) a las líneas horizontales y verticales en \mathbb{C} cerca de 0, respectivamente.

Para examinar en más detalle $\Psi(z)$ consideremos la siguiente construcción:

Partiendo de $z_0 \in D$, traslademonos un tiempo $t > 0$ usando la trayectoria α , definiendo $z_1 = \alpha(t)$.

Suponiendo que $f(z_1) \neq 0, \infty$ es posible considerar de nuevo dos trayectorias α y β por z_1 .

Traslademonos ahora un tiempo $s > 0$, siguiendo la trayectoria β por z_1 , llamemos $z_2 = \beta(s)$.

Suponiendo que $f(z_2) \neq 0, \infty$ repetimos la construcción usando la correspondiente trayectoria α , pero considerando el tiempo negativo $-t$, así definimos $z_3 = \alpha(-t)$.

Finalmente, si $f(z_3) \neq 0, \infty$, definimos $z_4 = \beta(-s)$, para la correspondiente β por z_3 .

¿Hemos regresado al punto de partida, i.e. $z_0 = z_4$?

Para poder garantizar que en efecto la trayectoria se ha cerrado, basta suponer que los tiempos t y s son suficientemente pequeños.

Lema 6.1. *Consideremos $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ función meromorfa con $f(z_0) \neq 0, \infty$. Entonces, existen dos números reales positivos ϵ, δ , para los cuales:*

1. *Toda trayectoria construida como antes en D para tiempos $0 \leq t \leq \epsilon, 0 \leq s \leq \delta$ como antes se cierra, i.e. $z_0 = z_4$.*

2. *Los campos vectoriales*

$$\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} \quad y \quad \frac{\sqrt{-1}}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}$$

conmutan bajo el corchete de Lie.

Demostración. Como $\Psi(z)$ es localmente una función holomorfa y $\Psi'(0) = f(z_0) \neq 0, \infty$, por el teorema de la función inversa es uno a uno en una vecindad de z_0 . Por otra parte

$$\Psi(z_4) = t + \sqrt{-1}s - t - \sqrt{-1}s = 0 = \Psi(z_0),$$

lo que implica 1. Es bien sabido que 1 y 2 son equivalentes, pues esa es la interpretación usual cuando se anula el conmutador de campos vectoriales reales, ver [1] vol. I pág. 221. Una prueba directa de 2 es calculando el conmutador,

$$\left[\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\sqrt{-1}}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right].$$

Es fácil agrupar el resultado de tal forma que dependa de las ecuaciones de Cauchy–Riemann para $1/f(z)$. \square

Dados ϵ, δ números como antes, denotamos por $\mathcal{R} \subset D$ a cualquier conjunto cerrado delimitado por dos segmentos de trayectorias integrales de $\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}$ y dos segmentos de trayectorias integrales $\frac{\sqrt{-1}}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}$, como antes. A este tipo de conjuntos los llamaremos *rectángulos*. Este nombre se justifica por el siguiente:

Teorema 6.2. De Pitágoras. *En cada rectángulo \mathcal{R} existe una métrica d_f , tal que (\mathcal{R}, d_f) es isométrico al rectángulo $[0, \epsilon] \times [0, \delta] \subset \mathbb{R}^2$ provisto con la métrica euclidiana usual.*

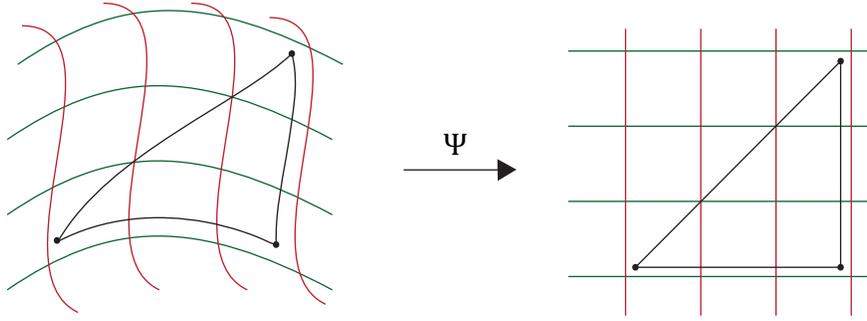


Figura 6: El teorema de Pitágoras se cumple.

Demostración. Si $|\cdot|$ denota la norma usual de números complejos, definimos la nueva métrica d_f en \mathcal{R} como:

$$\begin{aligned} d_f : \mathcal{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{0\} \\ (z, z') &\longmapsto d_f(z, z') = \left| \int_{\gamma} f(\omega) d\omega \right| = \sqrt{t^2 + s^2}, \end{aligned}$$

para γ cualquier trayectoria diferenciable por pedazos contenida en \mathcal{R} que une z con z' . Donde: t es el tiempo necesario en trayectorias del campo vectorial $\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}$, s es el tiempo necesario en trayectorias del campo vectorial $\frac{\sqrt{-1}}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}$, para trasladarse de z a z' .

La isometría esta definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \subset \Omega &\longrightarrow [0, \epsilon] \times [0, \delta] \subset \mathbb{R}^2 \\ z &\longmapsto \left(\int_{z_0}^z u dx - v dy, \int_{z_0}^z v dx + u dy \right) \\ &= \left(\Re \left(\int_{z_0}^z f(\omega) d\omega \right), \Im \left(\int_{z_0}^z f(\omega) d\omega \right) \right), \end{aligned}$$

donde \Re , \Im denotan las partes real e imaginaria en cualquier número complejo, y z_0 esta en la frontera de \mathcal{R} como al principio de la sección. \square

Cada rectángulo (\mathcal{R}, d_f) posee de manera natural los siguientes atributos.

- Alto y ancho (dados por ϵ y δ respectivamente).
- Dos familias de trayectorias:
 - las *trayectorias horizontales* (trayectorias integrales del campo $\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}$),
 - las *trayectorias verticales* (trayectorias integrales del campo $\frac{\sqrt{-1}}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}$).

Nuestro objetivo ahora es hacer a $D - \{\text{polos y ceros de } f\} \subset \mathbb{C}$ un espacio métrico.

Consideramos γ una trayectoria en $D - \{\text{polos y ceros de } f\}$ de clase C^1 por pedazos. Usando la métrica local de $\Psi(z)$ definimos la d_f -longitud de una trayectoria $\gamma : [0, T] \longrightarrow \Omega - \{\text{polos y ceros de } f\}$, que sea diferenciable por pedazos; considerando una partición de γ en trozos contenidos en rectángulos, midiendo la longitud de cada trozo usando la métrica del rectángulo correspondiente (como en el Lema 5.2), y finalmente sumando las longitudes de los trozos para obtener la d_f -longitud de γ .

Corolario 6.3. Para $f(z)dz$ en D meromorfa, existe en $D - \{\text{polos y ceros de } f\}$ una distancia definida como:

$$\begin{aligned} d_f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{0\} \\ (z_1, z_2) &\longmapsto \inf_{\gamma} \{d_f - \text{longitud de } \gamma\}, \end{aligned}$$

donde el ínfimo se considera sobre todas las trayectorias en $D - \{\text{polos y ceros de } f\}$ de clase C^1 por pedazos que unen z_1 con z_2 .

Demostración. Como D puede ser no compacto es necesario tomar el ínfimo. Para mostrar que $d_f(z_1, z_2) = 0$ si y sólo si $z_1 = z_2$ se consideran dos casos. Cuando ambos puntos están contenidos en un mismo rectángulo el resultado es obvio. Cuando no están contenidos en un mismo rectángulo es fácil ver que la distancia entre ambos puntos es positiva, pues la d_f -longitud de cualquier trayectoria (con punto inicial z_1), que sale de un rectángulo que contiene a z_1 en su interior es estrictamente positiva. El resto de la prueba se deja al lector interesado. \square

Es también útil describir la métrica d_f usando g_f una métrica de Riemann C^∞ en $D - \{\text{polos y ceros de } f\}$. Tal métrica de Riemann respecto al marco $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ tiene como matriz:

$$g_f = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 \end{pmatrix}.$$

Para ella resulta que los campos $\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\sqrt{-1}}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}$ son unitarios y ortogonales entre sí.

Corolario 6.4. 1. La curvatura Gaussian de g_f es idénticamente cero.
2. Las trayectorias de los campos vectoriales rotados

$$e^{\sqrt{-1}\phi} \frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{u^2 + v^2} \left[(u \cos \phi - v \sin \phi) \frac{\partial}{\partial x} + (-u \sin \phi - v \cos \phi) \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

para todo $0 \leq \phi \leq 2\pi$, son geodésicas de velocidad unitaria para g_f . En particular las trayectorias horizontales y verticales son geodésicas de velocidad unitaria.

Demostración. Como los campos forman un marco ortonormal y conmutan un resultado bien conocido, ver [1] vol. II pág. 261, establece que la curvatura de esta métrica de Riemann es cero. El mostrar que son geodésicas es un cálculo directo usando la conexión Riemanniana asociada. Sin embargo una prueba elemental utiliza que las imágenes de las trayectorias de

$$e^{\sqrt{-1}\phi} \frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}$$

bajo F son líneas rectas de velocidad unitaria en \mathbb{R}^2 , ver la prueba del Lema 5.2, de esta observación el resultado sigue. \square

En todo lo que sigue utilizaremos sin distinción la métrica d_f ó la métrica de Riemann g_f en $D - \{\text{polos y ceros de } f\}$.

Dada f una función meromorfa nuestro interés es describir más explícitamente la métrica d_f en $D - \{\text{polos y ceros de } f\}$. Basta observar que cada vez que dos rectángulos en $D - \{\text{polos y ceros de } f\}$ son adyacentes (esto es su intersección está dada por un trozo de trayectoria horizontal o vertical), entonces podemos decir que ambos están pegados entre sí por una isometría. Por lo que es posible interpretar esos rectángulos como caras de un poliedro. Es posible escribir

$$D - \{\text{polos y ceros de } f\} = \cup_{\ell} \mathcal{R}_{\ell},$$

como una colección de rectángulos $\{\mathcal{R}_{\ell}\}$ pegados entre sí por isometrías entre sus lados. Donde si dos de ellos se intersectan lo hacen en un trozo de trayectoria. Esto es lo que llamamos un *poliedro*. Ver [2] para mayores detalles de este tipo de construcción desde un punto de vista elemental.

¿Qué polígonos aparecen para $D - \{\text{polos y ceros de } f\} = \cup_{\ell} \mathcal{R}_{\ell}$?

Ejercicio. Discute y da pruebas claras para determinar cuando el pegado de dos rectángulos como en la figura 6 es posible o no, para alguna $f(z)dz$ 1-forma diferencial holomorfa.

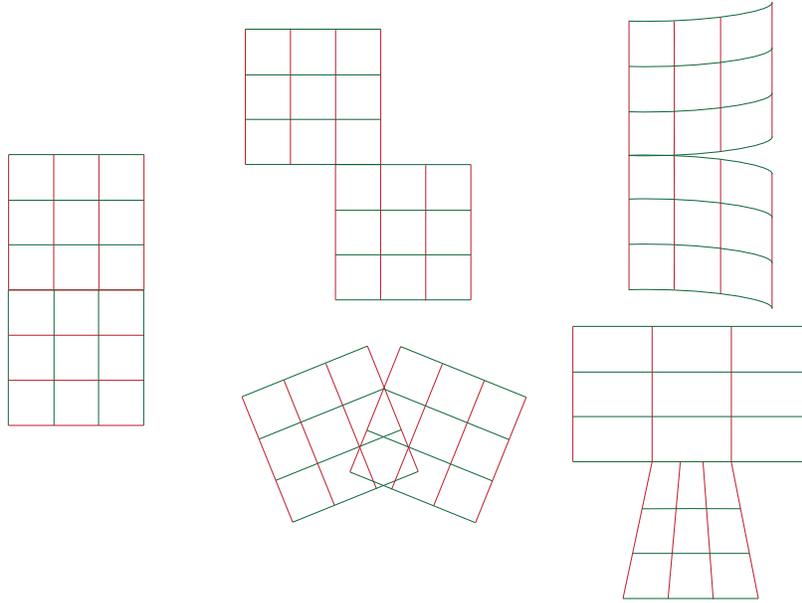


Figura 7: Distintos pegados entre rectángulos; ¿cuales son posibles para $f(z)dz$?

7. Un polo para $f(z)dz$.

Consideramos el caso más sencillo donde $f(z)dz$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$ pero $f(0) = \infty$,

$$f(z)dz = \frac{dz}{z}.$$

Considera el cálculo “formal” usando $(\sqrt{-1})^2 = -1$;

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} dz &:= \left(\frac{1}{x + \sqrt{-1}y} \right) (dx + \sqrt{-1}dy) \\ &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \sqrt{-1} \frac{y}{x^2 + y^2} \right) (dx + \sqrt{-1}dy) \\ &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy \right) + \sqrt{-1} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) \\ &= \omega_1 + \sqrt{-1}\omega_2. \end{aligned}$$

ω_1 y ω_2 son 1-formas diferenciales reales cerradas en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Para averiguar si son exactas, consideramos dos familias de trayectorias.

- El semirayo

$$\alpha(t) = (t \cos(\theta_0), t \operatorname{sen}(\theta_0)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- El arco de círculo

$$\beta(s) = (\cos(s), \operatorname{sen}(s)), \quad s \in (-\pi, \pi).$$

Ahora calculamos, lo que verifica (6) y (7),

$$\int_{\alpha} \omega_1 = t, \quad \int_{\beta} \omega_1 = 0,$$

$$\int_{\alpha} \omega_2 = 0, \quad \int_{\beta} \omega_2 = s.$$

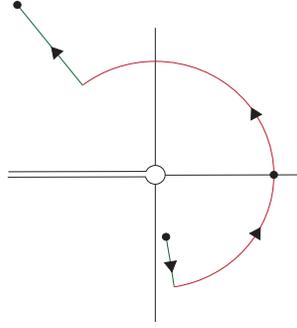


Figura 8: Trayectorias que salen de $(1, 0)$, un arco de círculo seguido de un semirrayo (ellas son trayectorias de $z \frac{\partial}{\partial z}$ y $\sqrt{-1}z \frac{\partial}{\partial z}$, respectivamente).

Con ello hemos definido dos funciones de clase C^∞ ,

$$\begin{aligned} \int \omega_1 : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\longmapsto \int_{(1,0)}^{(x,y)} \omega_1 = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ \int \omega_2 : \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \mid x \leq 0\} &\longrightarrow (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \int_{(1,0)}^{(x,y)} \omega_2 = \arg(x, y). \end{aligned}$$

Conviene precisar que

$$\begin{aligned} \arg : \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \mid x \leq 0\} &\longrightarrow (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{ángulo en radianes entre los vectores} \\ (1, 0) \text{ y } (x, y), \text{ medido en sentido positivo} \\ \text{contrario a las manecillas del reloj} \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

su gráfica es parecida a un helicoides (el lector debe gráficarla). En particular, en el primer y cuarto cuadrante $\{(x, 0) \mid x > 0\}$ sucede que

$$\arg(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

$\arg(x, y)$ admite una extensión que es C^∞ en el segundo y tercer cuadrante. La función $\arg(x, y)$ posee la siguiente propiedad restringida al círculo unitario. Si consideramos la parametrización

$$\begin{aligned} \gamma : (-\pi, \pi) &\longrightarrow \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2 \\ \theta &\longmapsto (\sin(\theta), \cos(\theta)), \end{aligned}$$

entonces

$$\arg \circ \gamma(\theta) = \theta, \quad \gamma \circ \arg(x, y) = (x, y).$$

En el plano menos el origen y en el plano menos el eje x negativo obtenemos

$$d\left(\ln(\sqrt{x^2 + y^2})\right) = \left(\frac{x dx}{x^2 + y^2} + \frac{y dy}{x^2 + y^2}\right), \quad d(\arg(x, y)) = \left(\frac{-y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2}\right).$$

La segunda diferencial puede calcularse, por el Lema de derivación bajo el signo de integral de línea.

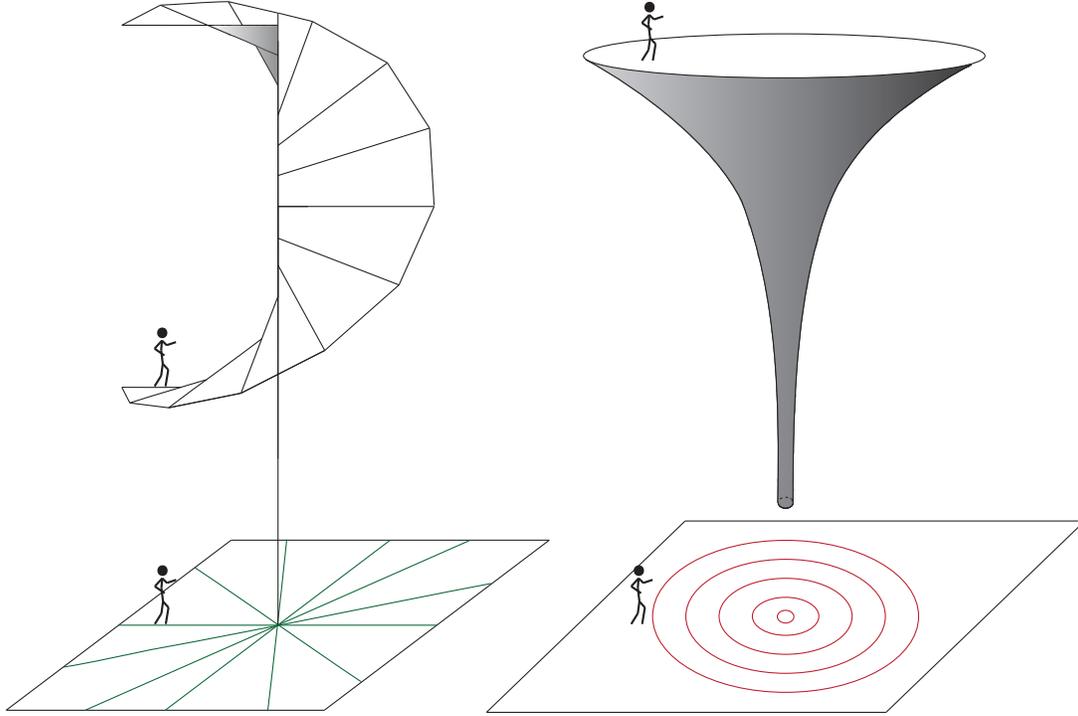


Figura 9: Juegos de fútbol americano para las funciones argumento $\arg(x, y)$ y logaritmo $\log\sqrt{x^2 + y^2}$.

Definimos dos campos vectoriales reales en \mathbb{R}^2 :

$$\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{radial}$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{centro .}$$

Tenemos un parámetro distinguido

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{C} - \{x \mid x \leq 0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \ln(z) := \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + \sqrt{-1}(\arg(x, y)). \end{aligned}$$

Lema 7.1. 1. Para $\frac{dz}{z}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$ su espacio métrico es isométrico a un cilindro plano $S_{2\pi}^1 \times \mathbb{R}$ de perímetro 2π .

2. Bajo Ψ :

las trayectorias de $z \frac{\partial}{\partial z}$ corresponden a los meridianos $\{\theta_0\} \times \mathbb{R}$ del cilindro.

las trayectorias de $\sqrt{-1}z \frac{\partial}{\partial z}$ corresponden a los paralelos $S_{2\pi}^1 \times \{\rho_0\}$ del cilindro.

Adicionalmente si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ es una trayectoria cerrada, tenemos que

$$\int_{\gamma} \omega_2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{ángulo en radianes descrito por } \gamma \text{ entre los vectores} \\ \gamma(0) \text{ y } \gamma(1) \text{ medido en sentido positivo} \\ \text{contrario a las manecillas del reloj.} \end{array} \right\} = 2\pi \cdot k.$$

Note que, como γ es cerrada $k \in \mathbb{Z}$.

Corolario 7.2. Número de vueltas. Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$ es cerrada esto es $\gamma(0) = \gamma(1)$, entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{número de vueltas de } \gamma \\ \text{alrededor de } \bar{0} \end{array} \right\} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{-ydx}{x^2 + y^2} + \frac{xdy}{x^2 + y^2} \right) \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. El número de pisos que γ sube por la gráfica de $\arg(x, y)$ coincide con la integral de la derecha. \square

En resumen:

$$\begin{array}{ccc} & \frac{dz}{dt} = z & \\ & \updownarrow & \\ & z \frac{\partial}{\partial z} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \frac{dz}{z} & \longleftrightarrow & \Psi(z) = \ln(z). \end{array} \quad (8)$$

Ejercicio. Describe la integral de $\frac{\sqrt{-1}dz}{z}$, gráfica sus campos vectoriales, di a que objeto es isométrico (\mathbb{C}, g_f) .

Ejercicio. Describe la integral de $\frac{dz}{(z-1-\sqrt{-1})}$, gráfica sus campos vectoriales, di a que objeto es isométrico (\mathbb{C}, d_f) .

8. Un cero para $f(z)dz$.

Consideramos el caso más sencillo donde $f(z)dz$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$ pero $f(0) = 0$,

$$f(z)dz = z dz.$$

Consideramos el cálculo “formal” usando $(\sqrt{-1})^2 = -1$;

$$\begin{aligned} z dz &:= (x + \sqrt{-1}y)(dx + \sqrt{-1}dy) \\ &= (xdx - ydy) + \sqrt{-1}(ydx + xdy) \\ &= \omega_1 + \sqrt{-1}\omega_2. \end{aligned}$$

ω_1 y ω_2 son 1-formas diferenciales cerradas en \mathbb{R}^2 . Para averiguar si son exactas, consideramos dos familias de trayectorias • La trayectoria

$$\begin{array}{ccc} \gamma : [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

con $\gamma(0) = (0, 0)$ y $\gamma(1) = (x, y)$.

Ahora calculamos, lo que verifica (6) y (7),

$$\begin{aligned} \int_{\rho} \omega_1 &= t, & \int_{\gamma} \omega_1 &= 0, \\ \int_{\rho} \omega_2 &= 0, & \int_{\gamma} \omega_2 &= s. \end{aligned}$$

Con ello hemos definido dos funciones de clase C^∞

$$\begin{array}{ccc} \int \omega_1 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \int_{(0,0)}^{(x,y)} \omega_1 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \int \omega_2 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \int_{(0,0)}^{(x,y)} \omega_2 = xy. \end{array}$$

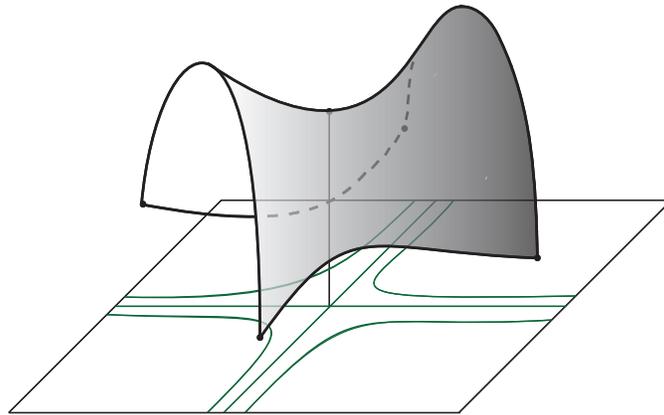


Figura 10: hiperboloide.pdf Juego de futbol americano para la función xy .

Claramente obtenemos

$$d\left(\frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right) = xdx - ydy, \quad d(xy) = ydx + xdy.$$

Tenemos un parámetro distinguido

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{C}_z &\longrightarrow \mathbb{C}_t \\ z &\longmapsto \frac{1}{2}z^2 := (x^2 - y^2) + \sqrt{-1}(xy). \end{aligned}$$

Lema 8.1. 1. Para zdz en $\mathbb{C} - \{0\}$ su espacio métrico (\mathbb{C}, g_f) resulta ser isométrico al pegado de cuatro medios planos (dos superiores y dos inferiores) por su frontera

$$\cup_{i=1}^4 \mathbb{H}_i^2, \quad \mathbb{H}^2 = \{z \mid \Im m(z) > 0\}.$$

Donde el origen de los medios planos se identifica a un mismo punto el corresponde a $0 \in \mathbb{C}_z$.

2. Bajo Ψ :

las trayectorias de $\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}$ corresponden a las líneas horizontales en los medios planos,
 las trayectorias de $\frac{\sqrt{-1}}{z} \frac{\partial}{\partial z}$ corresponden a las líneas verticales en los medios planos.

En efecto, como en figura 11 definimos dos campos vectoriales reales en $\mathbb{C} - \{0\}$:

$$\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{silla}$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{silla rotada } \pi/2.$$

En resumen:

$$\begin{array}{ccc} & \frac{dz}{dt} = \frac{1}{z} & \\ & \updownarrow & \\ & \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} & \\ \swarrow & & \searrow \\ z dz & \longleftrightarrow & \Psi(z) = \frac{1}{2}z^2. \end{array}$$

(9)

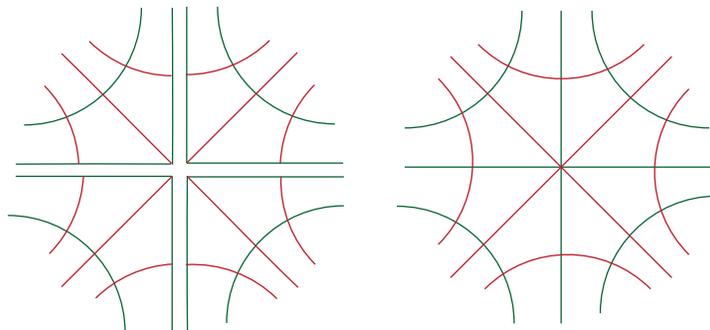


Figura 11: silla.pdf Trayectorias que salen de $(0, 0)$, un arcos de hipérbolas, ellas son trayectorias de $\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\sqrt{-1}}{z} \frac{\partial}{\partial z}$, verde y rojo respectivamente.

Ejercicio. Describe la integral de $\sqrt{-1}zdz$, gráfica sus campos vectoriales, di a que objeto es isométrico (\mathbb{C}, g_f) .

Ejercicio. Describe la integral de $(z - 1 - \sqrt{-1})dz$, gráfica sus campos vectoriales, di a que objeto es isométrico (\mathbb{C}, d_f) .

Ejercicio. Considera una epicicloide; haciendo rodar un círculo de radio $1/n < 1/3$, para $n \in \mathbb{N}$, sobre un círculo de radio 1 con centro en 0. ¿ Cuantas vueltas da dicha cicloide $C(r_0)$ alrededor de cero?.

9. Geometría del residuo.

El residuo de una 1-forma meromorfa $f(z)dz$ en un polo $p \in D$, donde D es el abierto donde $f(z)$ es meromorfa, se define como

$$\text{Res}(f(z)dz, p) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma} f(z)dz$$

donde γ es una trayectoria cerrada que encierra a p dando una vuelta alrededor de p en sentido contrario al reloj.

Si se escribe $f(z)$ como una serie de potencias convergente en un disco perforado alrededor de q tenemos

$$\dots + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_1}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

El residuo de la 1-forma diferencial asociada es

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), p) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma} \left(\dots + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_1}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots \right) dz. \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\dots + \int_{\gamma} \frac{a_2}{z^2} dz + \int_{\gamma} \frac{a_1}{z} dz + \int_{\gamma} a_0 dz + \int_{\gamma} a_1z dz + \int_{\gamma} a_2z^2 dz + \dots \right). \\ &= \frac{a_1}{2\pi\sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

10. Formas normales

¿Cuántas funciones holomorfas esencialmente distintas hay?

Para responder a esto, miramos a las funciones localmente y consideramos cambios de coordenadas, construyendo lo que se llama las “formas normales”. Las funciones holomorfas son sencillas debido a que sus formas normales son sencillas.

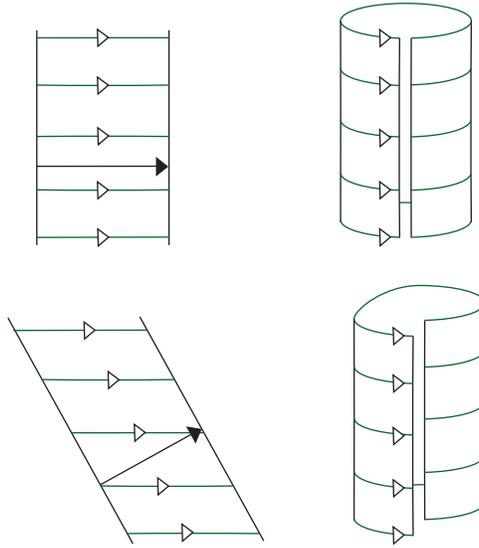


Figura 12: Las figuras del renglón superior muestran la métrica de $\frac{dz}{z}$; el residuo es -1 y las trayectorias de $\Re(X)$ forman un centro de periodos 2π . Las figuras del renglón inferior muestran la métrica de $e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{dz}{z}$; el residuo es $e^{\sqrt{-1}\theta}$ y las trayectorias de $\Re(X)$ forman espirales, dando lugar a un pozo y una fuente.

Teorema 10.1. *Consideramos una función holomorfa*

$$f(z) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

no constante, suponemos sin pérdida de generalidad $f(0) = 0$. Entonces existe un cambio de coordenadas $h(z)$ tal que

$$z^n = (f \circ h)(z).$$

donde n cumple que

$$\frac{df}{dz}(0) = \dots = \frac{d^{(n)}}{dz^{(n)}}(0) = 0, \quad \frac{df^{n+1}}{dz^{n+1}}(0) \neq 0.$$

11. Triángulos y formas racionales con 3 polos.

Ejemplo 11.1. Consideremos

$$\omega = f(z)dz = \frac{dz}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3)}$$

en \mathbb{C} y donde los p_i son números complejos distintos entre sí.

Afirmamos que el espacio métrico $(\mathbb{C} - \{p_1, p_2, p_3\}, d_f)$ puede construirse como sigue. Ver figura 14 Existe $T \subset \mathbb{C}$ un triángulo euclidiano que tiene como lados a los residuos de ω

$$r_1 = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)}, \quad r_2 = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})(p_1 - p_2)(p_3 - p_2)},$$

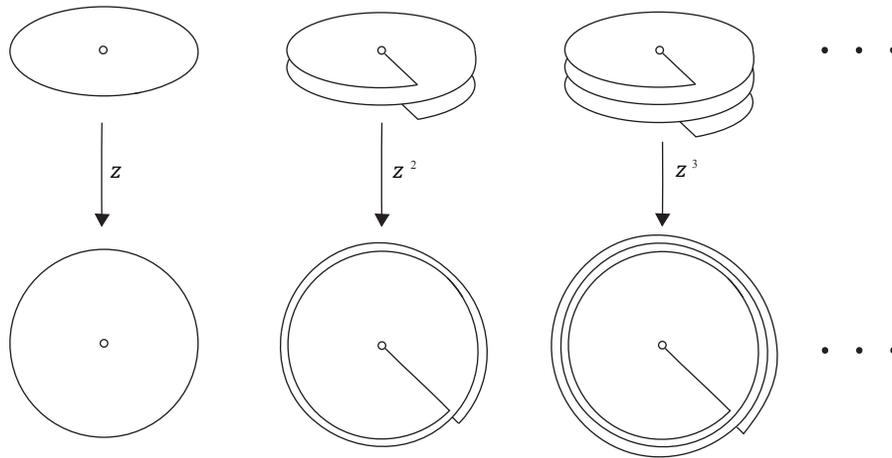


Figura 13: resortes.pdf Formas normales para funciones.

$$r_3 = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})(p_1 - p_3)(p_2 - p_3)}.$$

Si identificamos los tres vértices del triángulo, obtenemos una superficie homeomorfa a una esfera menos tres discos abiertos.

Podemos pegar ahora a la frontera de cada disco un cilindro infinito de la forma $S^1_{|2\pi r_l|} \times [0, \infty)$, de perímetro $|2\pi r_l|$.

Obteniendo una superficie homeomorfa a la esfera de Riemann menos 3 puntos, provista de la estructura métrica que viene de la métrica plana en el triángulo y los cilindros.

Los tres puntos correspondientes a las puntas del cilindro provienen de los puntos $\{a_1, a_2, a_3\}$ en \mathbb{C} ; que son los polos de ω .

El punto en el que se han identificado los vértices de T corresponderá al punto al infinito para \mathbb{C} que es un cero de ω . Ya que en efecto podemos verificar que tiene un ángulo cónico de 4π .

Para describir el campo vectorial

$$(z - p_1)(z - p_3)(z - p_4) \frac{\partial}{\partial z}$$

consideramos las líneas horizontales en $T \subset \mathbb{C}$. Ellas son geodésicas en \mathbb{C} e inducen las trayectorias del campos. Basta considerar esas líneas en el triángulo union los rectángulos y observar que los lados de los rectángulos están identificados como dicen los residuos $r_i \in \mathbb{C}$. Ver figura ??.

Ejemplo 11.2. Ahora consideramos de nuevo ω como en el ejemplo anterior pero suponemos que los tres residuos son reales.

El triángulo que aparecía antes se degenera a un segmento de recta. La construcción permanece verdadera y en este caso el campo vectorial asociado posee tres centros como sus trayectorias, ellos provienen de las líneas horizontales en el interior de cada rectángulo. Ver figura ??

12. Distintas caras de una función meromorfa.

Lema 12.1. En $D \subset \mathbb{C}$ se hay una correspondencia uno a uno entre:

- Formas diferenciales meromorfas:

$$f(z)dz.$$

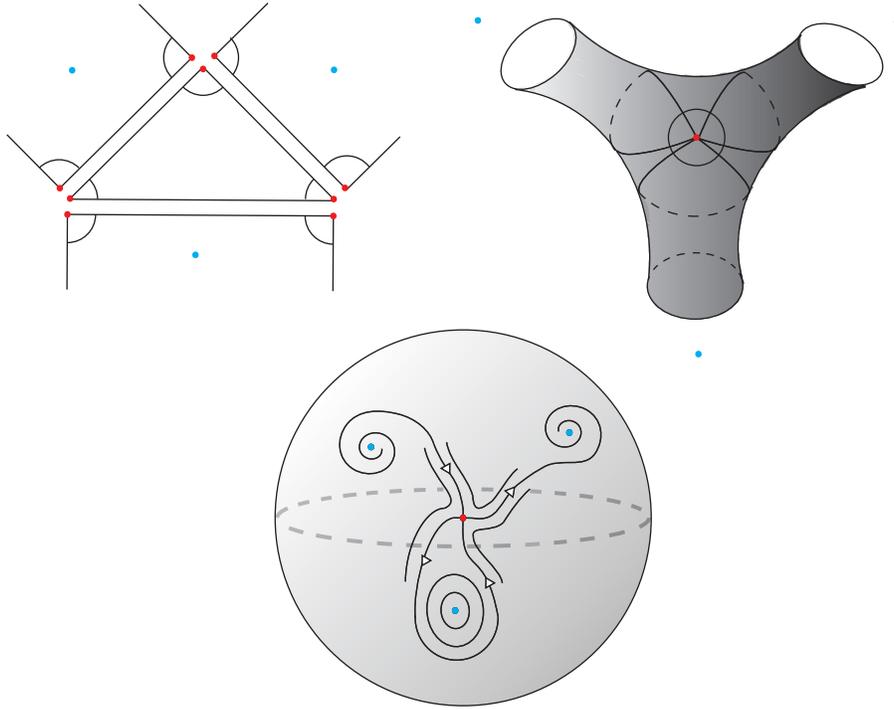


Figura 14: El pegado de un triángulo euclidiano y tres bandas de altura infinita, producen topológicamente una esfera menos cuatro puntos. Si uno de los residuos es real; el campo vectorial en la esfera presenta un centro, un pozo y una fuente.

- *Campos vectoriales meromorfos*

$$\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}.$$

- *Poliedros planos $D - \{\text{polos y ceros de } f\}$ con métrica*

$$g_f = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 \end{pmatrix},$$

provistos de un campo vectorial geodésico unitario

$$\frac{u}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{v}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Corolario 12.2. *Cada campo vectorial meromorfo*

$$\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}.$$

determina una pareja de campos vectoriales reales que conmutan:

$$\Re(X) := \frac{u}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{v}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \Im(X) := \frac{v}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial y}.$$

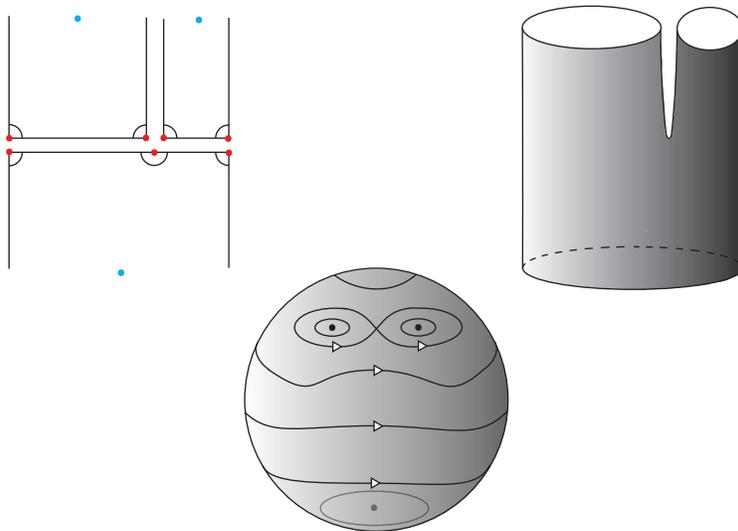


Figura 15: El pegado de un triángulo degenerado (con área cero) y tres bandas de altura infinita, producen topológicamente una esfera menos cuatro puntos. En este caso los tres residuos de ω son colineales en \mathbb{C} ; el campo vectorial en la esfera presenta tres centros.

Notación. Por

“trayectorias solución de $X = \frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}$ ”

entenderemos

“las trayectorias reales de $\Re e(X) := \frac{u}{u^2+v^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{v}{u^2+v^2} \frac{\partial}{\partial y}$ ”.

Análogamente por

$$“X = f(z) \frac{\partial}{\partial z} = (u + \sqrt{-1}v) \frac{\partial}{\partial z}” \quad \text{entenderemos} \quad “\Re e(X) = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}”,$$

ver diagrama (11).

Es curioso que el Lemma puede interpretarse de tres maneras distintas, como sigue:

Observación 12.3. Empezando con una 1-forma diferencial meromorfa $f(z)dz$:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{dz}{dt} = \frac{1}{f(z)} & & \\
 \updownarrow & & \\
 \frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z} & & \\
 \swarrow \quad \searrow & & \\
 f(z)dz & \longleftrightarrow & \Psi(z) = \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi .
 \end{array} \tag{10}$$

En particular las expresiones compleja real e imaginaria son

	$f(z)dz$	$\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial z}$	$\Psi(z) = \int^z f(z)dz$
parte real	$udx - vdy$	$\frac{u}{u^2+v^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{-v}{u^2+v^2} \frac{\partial}{\partial y}$	$U(x, y) = \int^{(x,y)} udx - vdy$
parte imaginaria	$vdx + udy$	$\frac{v}{u^2+v^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{u^2+v^2} \frac{\partial}{\partial y}$	$V(x, y) = \int^{(x,y)} vdx + udy.$

Observación 12.4. Empezando con un campo vectorial $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$:

$$\begin{array}{ccc}
 & \frac{dz}{dt} = f(z) & \\
 & \updownarrow & \\
 & f(z) \frac{\partial}{\partial z} & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \frac{dz}{f(z)} & \longleftrightarrow & \Psi(z) = \int_{z_0}^z \frac{d\xi}{f(\xi)}.
 \end{array} \tag{11}$$

En particular las expresiones compleja real e imaginaria son

	$\frac{dz}{f(z)}$	$f(z) \frac{\partial}{\partial z}$	$\Psi(z) = \int^z f(z) dz$
<i>parte real</i>	$\frac{u dx}{u^2+v^2} + \frac{v dy}{u^2+v^2}$	$u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$	$U(x, y) = \int^{(x,y)} \frac{u dx}{u^2+v^2} + \frac{v dy}{u^2+v^2}$
<i>parte imaginaria</i>	$\frac{-v dx}{u^2+v^2} + \frac{u dy}{u^2+v^2}$	$-v \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial y}$	$V(x, y) = \int^{(x,y)} \frac{-v dx}{u^2+v^2} + \frac{u dy}{u^2+v^2}$

Observación 12.5. Empezando con una función $f(z)$:

$$\begin{array}{ccc}
 & \frac{dz}{dt} = \frac{1}{f'(z)} & \\
 & \updownarrow & \\
 & \frac{1}{f'(z)} \frac{\partial}{\partial z} & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 f'(z) dz & \longleftrightarrow & f(z).
 \end{array} \tag{12}$$

En particular las expresiones compleja real e imaginaria son

	$f'(z) dz$	$\frac{1}{f'(z)} \frac{\partial}{\partial z}$	$f(z)$
<i>parte real</i>	$u_x dx - v_x dy$	$\frac{u}{u_x^2+v_x^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v_y}{u_x^2+v_x^2} \frac{\partial}{\partial y}$	$u(x, y)$
<i>parte imaginaria</i>	$v_y dx + u_y dy$	$\frac{-v}{u_x^2+v_x^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{u_x^2+v_x^2} \frac{\partial}{\partial y}$	$v(x, y)$

Los diagramas anteriores (10), (11) y (12) son equivalentes.

A continuación vamos a construir algunos ejemplos explícitos de la correspondencia. Daremos ejemplos de formas diferenciales meromorfas, describiendo a partir de ellas su poliedro asociado y su campo geodésico.

Ejercicio. Para $c = a + \sqrt{-1}b \in \mathbb{C} - \{0\}$, considera la forma diferencial $f(z) dz = (a + \sqrt{-1}b) dz$ en $D = \mathbb{C}$. Describe el espacio métrico (\mathbb{C}, d_f) y el campo vectorial

$$\frac{a}{a^2 + b^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{b}{a^2 + b^2} \frac{\partial}{\partial y}$$

así como sus trayectorias.

Ejercicio. Considera $f(z) dz = dz/e^z$ en \mathbb{C} . Describe el espacio métrico \mathbb{C}, d_f y las trayectorias del campo vectorial

$$e^x \cos y \frac{\partial}{\partial x} + e^x \sin y \frac{\partial}{\partial y}$$

en \mathbb{C} .

13. Geometría euclidiana cerca de polos y ceros.

El campo vectorial

$$X = u(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad u(x, y), v(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad (13)$$

que satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x, \end{cases}$$

admite una caja de flujo global

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^2 - (\{u = 0\} \cap \{v = 0\}) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{u dx - v dy}{u^2 + v^2}, \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{v dx + u dy}{u^2 + v^2} \right) \end{aligned}$$

tal que

$$\psi_* X = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Teorema 13.1. Formas normales de campos vectoriales alrededor de un polo, un cero o un punto regular. Consideremos $\mathbb{X} = f(z) \frac{\partial}{\partial z}$ definido en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}$. Existe un biholomorfismo local, tal que:

1. Si 0 es un punto regular de \mathbb{X} , entonces él es equivalente con

$$\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

2. Si 0 es un polo de multiplicidad $-r \leq -1$ de \mathbb{X} , entonces él es equivalente con

$$\xi^{-r} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

3. Si 0 es un cero de multiplicidad 1 de \mathbb{X} , entonces él es equivalente con

$$\lambda_1 \xi \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

donde $\lambda_1 = \frac{df}{dz}(0) \in \mathbb{C} - \{0\}$.

4. Si 0 es un cero de multiplicidad $s \geq 2$ de \mathbb{X} , entonces él es equivalente con

$$\frac{\xi^s}{1 + \lambda_2 \xi^{s-1}} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

donde $\lambda_2 = \text{Res} \left(\frac{dz}{df}, z = 0 \right)$ es el residuo de la 1-forma diferencial meromorfa $\omega = \frac{dz}{f(z)}$ en $z = 0$.

Demostración. Caso 1. Como 0 es un punto regular de \mathbb{X} , es decir, $f(0) \neq 0$, entonces existen $U \subset \mathbb{C}_z$ vecindad de 0 , tal que no contiene a ningún cero y a ningún polo de \mathbb{X} y un cambio de coordenadas holomorfo

$$\begin{aligned} \Psi : U \subset \mathbb{C}_z &\longrightarrow V \subset \mathbb{C}_\xi \\ z &\longmapsto \int_0^z \frac{d\mu}{f(\mu)}. \end{aligned}$$

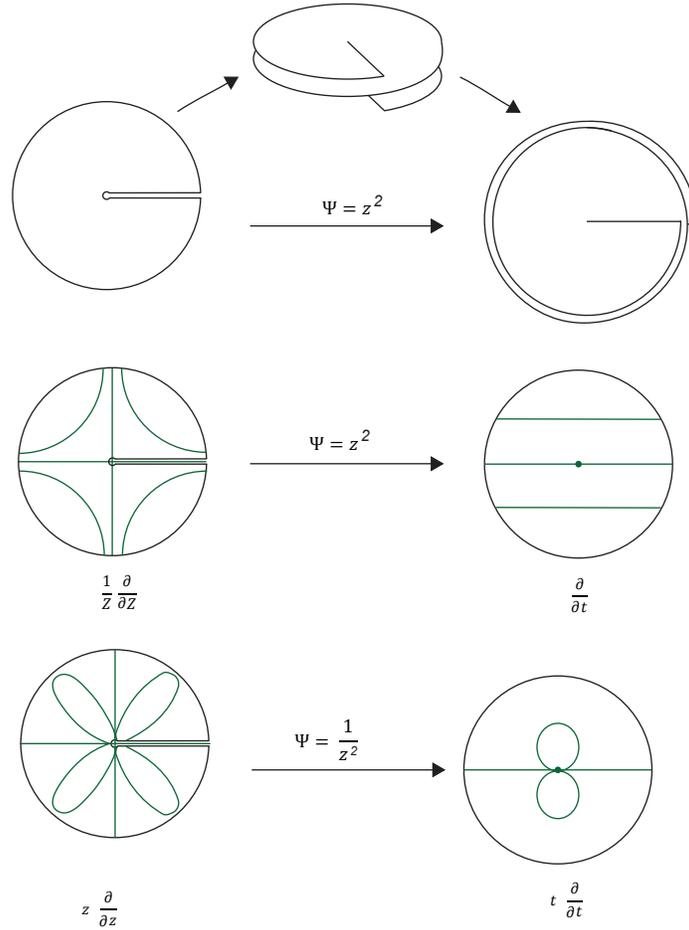


Figura 16: Campos vectoriales $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$ inducidos por las funciones $\Psi(z) = z^2$ y $\Psi(z) = \frac{1}{z^2}$. Ψ se comporta topológicamente como z^2 la diferencia esta en que en el primer caso la imagen es un punto regular y en el segundo caso es ∞ .

Bajo este cambio de coordenadas se obtiene

$$\Psi_* (\mathbb{X}) = \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Caso 2. Si $0 \in \mathbb{C}$ es un polo de multiplicidad $-r < -1$ para \mathbb{X} , entonces existe una vecindad $U \subset \mathbb{C}_z$ de 0 , tal que no contiene a otro polo o cero de \mathbb{X} . Se tiene la igualdad

$$f(z) \frac{\partial}{\partial z} = z^{-r} G(z) \frac{\partial}{\partial z},$$

para $z \in U - \{0\}$ y $G : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $G(0) \neq 0$.

Entonces el cambio de coordenadas local holomorfo Ψ que se desea hallar, debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial definida en U

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{(\Phi(z))^{r+1}}{r+1} \right) = \frac{z^r}{G(z)}, \quad (14)$$

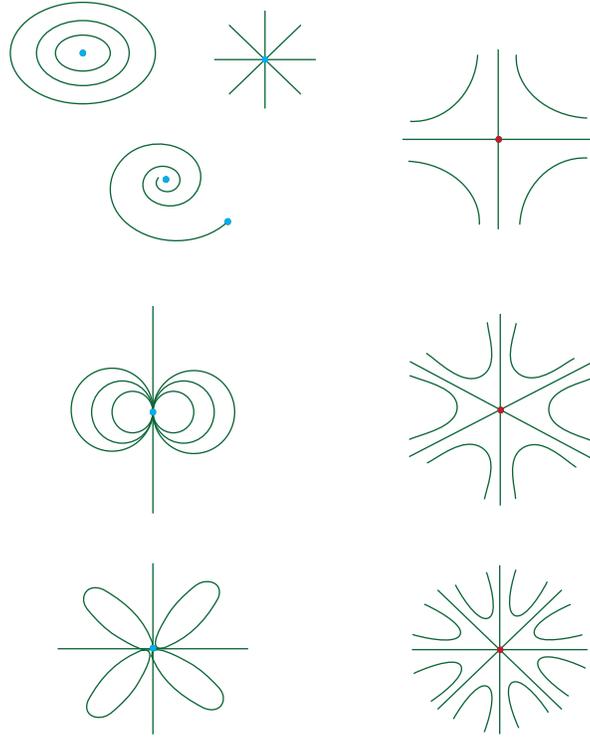


Figura 17: lista-singularidades.pdf Lista de ceros y polos para la parte real de los campos vectoriales $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$.

para que $\Psi_*(\mathbb{X}) = \xi^{-r} \frac{\partial}{\partial \xi}$. Como $\frac{1}{f(z)} \neq 0, \infty$ en $U - \{0\}$, entonces existe una función holomorfa $H : U \rightarrow \mathbb{C}_\xi$, tal que

$$\frac{dH}{dz}(z) = \frac{z^r}{G(z)}.$$

Luego H tiene un cero de multiplicidad $r+1$ en $z=0$, lo cual implica que exista una función holomorfa $H_0 : U \rightarrow \mathbb{C}_\xi$ con $H_0(0) \neq 0$ y tal que

$$H(z) = \int_0^z \frac{\mu^r d\mu}{G(\mu)} = \frac{z^{r+1}}{r+1} H_0(z).$$

Integrando la ecuación 14 se tiene que $(\Phi(z))^{r+1} = z^{r+1} H_0(z)$. Entonces existe $U_1 \subset U$ vecindad de 0, tal que $H_0(U) \subset V_1$, donde $V_1 \subset \mathbb{C}_\xi$ es una rama adecuada de $z^{\frac{1}{r+1}}$.

Se define la función

$$\begin{aligned} \Psi : U_1 &\rightarrow V_1 \subset \mathbb{C}_\xi \\ z &\mapsto z (H_0(z))^{\frac{1}{r+1}}, \end{aligned}$$

la cual satisface 14. Más aún $\Psi(0) = 0$ y $\frac{d\Psi}{dz}(0) = (H_0(0))^{\frac{1}{r+1}} \neq 0$, entonces por el teorema de la función inversa, existen vecindades $U_2 \subset U_1$, $V_2 \subset V_1$ de 0 y $\Psi(0)$ respectivamente, tal que

$$\begin{aligned} \Psi : U_2 \subset \mathbb{C}_z &\rightarrow V_2 \subset \mathbb{C}_\xi \\ z &\mapsto z (H_0(z))^{\frac{1}{r+1}}, \end{aligned}$$

es un cambio de coordenadas local holomorfo que satisface

$$\Psi_*(\mathbb{X}) = \xi^{-r} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Caso 3. Si 0 es un cero de multiplicidad 1 para \mathbb{X} , entonces existe una vecindad $U \subset \mathbb{C}_z$ de 0, tal que no contiene a ningún otro cero y a ningún polo de \mathbb{X} . Además se tiene la igualdad

$$f(z) \frac{\partial}{\partial z} = \lambda_1 z G(z) \frac{\partial}{\partial z},$$

donde $G : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa con $G(0) = 1$ y $\lambda_1 = \frac{df}{dz}(0) \in \mathbb{C} - \{0\}$.

El cambio de coordenadas local holomorfo Ψ que se desea hallar, debe ser una solución en U de la ecuación diferencial

$$\frac{d\Phi(z)}{\Phi(z)} = \frac{dz}{zG(z)}, \quad (15)$$

para que $\Psi_*(\mathbb{X}) = \lambda_1 \xi \frac{\partial}{\partial \xi}$.

Como $G(z)$ es holomorfa en U y $G(0) = 1$, entonces existe una vecindad $U_1 \subset U$ de 0, tal que en $V - (\{\text{eje real negativo}\} \cup \{0\})$ se tiene la siguiente igualdad

$$\frac{1}{zG(z)} = \frac{1}{z} + a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots$$

Se define la función

$$\log(\Psi(z)) : V - (\text{eje real negativo} \cup \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}_\xi - (\text{eje real negativo} \cup \{0\})$$

dada por

$$\log(\Psi(z)) = \log z + H_0(z), \quad (16)$$

donde $H_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$.

Consideremos $\Psi(z)$ la continuación holomorfa de alguna solución $\Phi(z)$ de 16, definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{C}_z &\longrightarrow \mathbb{C}_\xi \\ z &\longmapsto z e^{H_0(z)}, \end{aligned}$$

donde $\Psi(0) = 0$ y satisface 15. Además $\frac{d\Psi}{dz}(0) = 1$, por tanto Ψ es un cambio de coordenadas local holomorfo.

Caso 4. Si 0 es un cero de multiplicidad $s \geq 2$ para \mathbb{X} , entonces existe una vecindad $U \subset \mathbb{C}_z$ de 0, tal que no contiene a ningún otro cero, a ningún polo de \mathbb{X} y la 1-forma diferencial meromorfa asociada a \mathbb{X} se escribe en $U - \{0\}$ de la siguiente manera

$$\frac{dz}{f(z)} = \frac{b_{-s}}{z^s} + \frac{b_{-(s-1)}}{z^{s-1}} + \dots + \frac{\lambda_2}{z} + G(z)$$

donde $\lambda_2 = \text{Res}\left(\frac{dz}{f(z)}, z=0\right)$ y $G : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa.

Consideramos la función meromorfa

$$\begin{aligned} \Psi_1 : U \subset \mathbb{C}_z &\longrightarrow \mathbb{C}_\xi \\ z &\longmapsto z e^{h(z)}, \end{aligned}$$

con $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, $\Psi(0) = 0$ y tal que la integral $\int \frac{dz}{f(z)}$ se expresa en la coordenada $\hat{\xi}$ como

$$\hat{\xi}^{-s+1} + \lambda_2 \log \hat{\xi} + b$$

con $b \in \mathbb{C}$ una constante. Luego el campo vectorial meromorfo $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$ alrededor de $0 \in \mathbb{C}_z$ se escribe como

$$\frac{\hat{\xi}^s}{(-s+1) + \lambda_2 \hat{\xi}^{s-1}} \frac{\partial}{\partial \hat{\xi}}.$$

Trabajamos con la función holomorfa

$$\begin{aligned} \Psi_2 : \mathbb{C}_{\hat{\xi}} &\longrightarrow \mathbb{C}_{\xi} \\ \hat{\xi} &\longmapsto \sqrt[s-1]{\frac{1}{-s+1}} \hat{\xi}, \end{aligned}$$

para alguna $(s-1)$ -ésima raíz de $\frac{1}{-s+1}$. Luego es fácil ver que

$$\Psi_2 \left(\frac{\hat{\xi}^s}{(-s+1) + \lambda_2 \hat{\xi}^{s-1}} \frac{\partial}{\partial \hat{\xi}} \right) = \frac{\xi^s}{1 + \lambda_2 \xi^{s-1}} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

□

Observación 13.2. Consideramos un campo vectorial meromorfo X en $(\mathbb{C}, 0)$, teniendo solo un polo o un cero en $z = 0$ y residuo $\lambda = \text{Res}(\omega_X, 0)$.

1. La singularidad es un polo de orden $-k \leq -1$ si y sólo si la palabra asociada es

$$\underbrace{H \dots H}_{2k+2}.$$

2. La singularidad es un cero simple si y sólo si la palabra asociada es

$$C \quad \text{cuando } \lambda \in i\mathbb{R} - \{0\}, \quad \text{o}$$

$$P \quad \text{cuando } \lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}.$$

3. La singularidad es un cero de orden $s \geq 2$, si y sólo si la palabra asociada es

$$\underbrace{E \dots E}_{2s-2} \quad \text{cuando } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{o}$$

$$\underbrace{E \dots EP}_{2s-2} \quad \text{cuando } \lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}.$$

Contraejemplo. La métrica euclidiana de un cubo (removiendo sus vértices) no proviene de una 1-forma diferencial meromorfa.

Más generalmente, la métrica euclidiana de un sólido pátónico (removiendo sus vértices) no proviene de una 1-forma diferencial meromorfa.

Tabla de polos y ceros para ω .

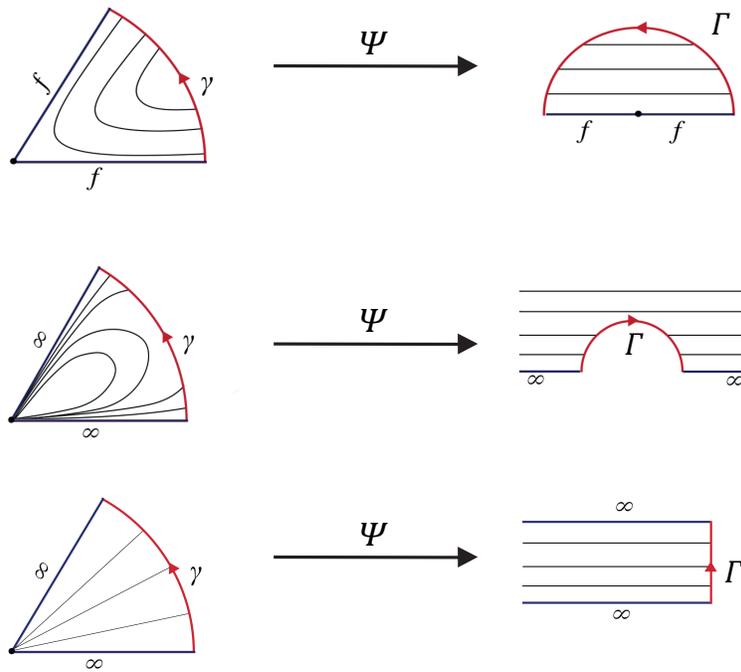


Figura 18: Trayectorias que salen de $(1, 0)$, primero un arco de círculo y luego un semirrayo.

ω	X	$\Psi : \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_z$
\vdots	\vdots	\vdots
z^2	$\frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z}$	$\frac{z^3}{3}$
$z dz$	$\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}$	$\frac{z^2}{2}$
dz	$\frac{\partial}{\partial z}$	z
$\frac{a_{-1}}{z} dz$	$\frac{z}{a_{-1}} \frac{\partial}{\partial z}$	$a_{-1} \ln z$
$\left(\frac{1}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z}\right) dz$	$\frac{z^2}{1+a_{-1}z} \frac{\partial}{\partial z}$	$-\frac{1}{z} \quad a_{-1} = 0$
\vdots	\vdots	\vdots

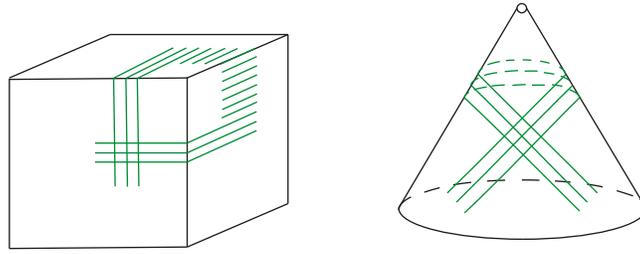


Figura 19: La métrica euclidiana de un cubo no proviene de una 1-forma diferencial meromorfa. La métrica euclidiana de un cono proviene de una 1-forma diferencial meromorfa si y solo si el ángulo cónico es $2\pi k$, con $k \in \mathbb{N}$.

14. La esfera de Riemann.

Una desventaja de \mathbb{C} es que no es un espacio compacto, sin embargo usando variable compleja:

- Hay una manera natural de hacerlo compacto agregando un solo punto al infinito, el nuevo objeto es llamado $\widehat{\mathbb{C}}$ la esfera de Riemann,
- La esfera de Riemann nos permite completar las 1-formas diferenciales meromorfas a toda la esfera, dicha completación tiene propiedades simples.

Un atlas para $\widehat{\mathbb{C}}$: Usaremos la identificación entre \mathbb{R}^2 y \mathbb{C} dada por el traductor

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longleftrightarrow \mathbb{C} \\ x_1, x_2 &\longleftrightarrow z = x_1 + \sqrt{-1}x_2. \end{aligned}$$

i) El conjunto esta formado por las clases de equivalencia

$$\frac{\mathbb{C}^2 - \{0\}}{\sim}$$

de manera abreviada

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

donde la relación de equivalencia en $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ es

$$(z, w) \sim (z', w') \iff \begin{cases} z = \lambda z' \\ w = \lambda w' \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{C} - \{0\},$$

ii) La topología es la heredada bajo la proyección

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}^2 - \{0\} &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ (z, w) &\longmapsto [z, w] := \frac{w}{z}, \end{aligned}$$

esto es U es abierto en $\widehat{\mathbb{C}}$ si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{C}^2 - \{0\}$.

iii) La cubierta abierta en $\mathbb{C}^2 = \{(z, w)\} - \{0\}$ es

$$U_1 = \{w \neq 0\} \quad U_2 = \{z \neq 0\}.$$

iv) Las funciones de coordenadas son

$$\begin{aligned} \phi_1 : U_1 \subset \mathbb{C}^2 - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} & \phi_2 : U_2 \subset \mathbb{C}^2 - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [(z, w)] &\longmapsto \frac{z}{w} & [(z, w)] &\longmapsto \frac{w}{z}. \end{aligned}$$

v) Los cambios de coordenadas son difeomorfismos.

$$\begin{aligned} \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C}_z - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C}_w - \{0\} & \phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \mathbb{C}_w - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C}_z - \{0\} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z} = w & w &\longmapsto \frac{1}{w} = z. \end{aligned}$$

Recordando la identificación

$$\begin{aligned} \mathbb{C} - \{0\} &\longleftrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \\ \frac{1}{z} &\longleftrightarrow \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{-1} \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \end{aligned}$$

los cambios de coordenadas son difeomorfismos (reales) de clase C^∞ , ver figura 20;

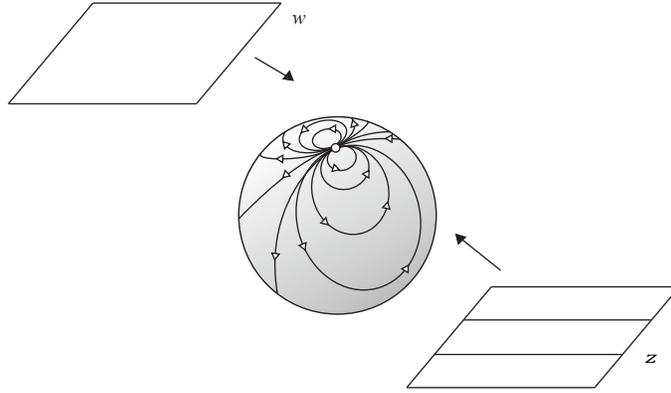


Figura 20: Cambio de coordenadas para $\widehat{\mathbb{C}}$ la esfera de Riemann.

$$\begin{aligned} \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{R}_{x_1 x_2}^2 - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}_{y_1 y_2}^2 - \{0\} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = (y_1, y_2). \\ \phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \mathbb{R}_{y_1 y_2}^2 - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}_{x_1 x_2}^2 - \{0\} \\ (y_1, y_2) &\longmapsto \left(\frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2}, \frac{-y_2}{y_1^2 + y_2^2} \right) = (x_1, x_2). \end{aligned}$$

Lema 14.1. $\widehat{\mathbb{C}}$ es variedad de clase C^∞ .

El grupo (bajo la composición) de difeomorfismos holomorfos de $\widehat{\mathbb{C}}$ es como sigue:

$$PSL(2, \mathbb{C}) = \frac{GL(2, \mathbb{C})}{\lambda Id} \quad \lambda \in \mathbb{C} - \{0\},$$

donde la relación de equivalencia es

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a' & \lambda b' \\ \lambda c' & \lambda d' \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Ello lo requerimos pues hay matrices en una misma clase; aunque distintas como matrices inducen la misma aplicación holomorfa en la esfera de Riemann. En efecto, la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{C})$, donde \tilde{A} es un representante, entonces A es un difeomorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$, como muestra el diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}^2 - \{0\} & \xrightarrow{\tilde{A}} & \mathbb{C}^2 - \{0\} \\
\pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
\widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{A} & \widehat{\mathbb{C}}.
\end{array}$$

En coordenadas \mathbb{C}_z tal función es

$$\begin{aligned}
A : \mathbb{C}_z &\longrightarrow \mathbb{C}_z \\
z &\longmapsto \frac{az + b}{cz + d},
\end{aligned}$$

que resulta una transformación de Möbius.

Lema 14.2. *La esfera usual $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ y la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ son variedades difeomorfas de clase C^∞ .*

Demostración. Basta definir la aplicación $g : S^2 \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que envía un punto (x, y, z) en la esfera a el número complejo que se obtiene al hacer proyección estereográfica de (x, y, x) desde el polo $(1, 0, 0) \in S^2$, y g envía $(1, 0, 0)$ a $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$. \square

Proposición 14.3. Meromorfo es equivalente con racional en $\widehat{\mathbb{C}}$.

1. Toda función meromorfa de $\widehat{\mathbb{C}}$ a $\widehat{\mathbb{C}}$ es racional.
2. Toda 1-forma diferencial meromorfa sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ es racional.
3. Todo campo vectorial meromorfo sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ es racional.

Demostración. Sea $\{(U_i, \psi_i) \mid i = 1, 2\}$ la estructura compleja en $\widehat{\mathbb{C}}$, dada en el Ejemplo ???

Como $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacto, entonces F tiene a lo más un número finito de polos y ceros, lo mismo sucede para campos vectoriales meromorfos o formas diferenciales meromorfas, no idénticamente cero.

Para cada uno de los incisos suponga primero que $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ es punto regular para F , para η y para X respectivamente. Esto es, suponga que todos los polos y todos los ceros de F , de η o de X , se encuentran en la parte finita U_1 de $\widehat{\mathbb{C}}$, ya que en caso contrario existe una transformación de Möbius $L : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, tal que $L(\infty)$ es punto regular para F , $L_*(\eta)$ y $L_*(X)$ con $L(\{\text{polos y ceros de } F \text{ en } \widehat{\mathbb{C}}\}) \subset U_1$, respectivamente.

1. Sea $F : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa.

Sea $F(z)$ la expresión de F en la coordenada z en \mathbb{C}_z .

Sea $\{p_1, \dots, p_r\}$ el conjunto de todos los polos de $F(z)$ con multiplicidades

$$-m_1, -m_2, \dots, -m_r$$

con $m_k > 0$, para $k = 1, \dots, r$ y $D(p_k, \epsilon_k) = \{z \in \mathbb{C}_z \mid \|z - p_k\| < \epsilon_k\}$ con $\epsilon_k > 0$, para $k = 1, \dots, r$, discos con centro en p_k con la propiedad de que no contienen a ningún otro polo distinto de p_k y ningún cero de $F(z)$ (pues los ceros y los polos de F son aislados).

Sea $A_{p_1} = D(p_1, \epsilon_1) - \{p_1\}$ un anillo alrededor de p_1 . Desarrollando en series de Laurent a $F(z)$ alrededor de p_1 en A_{p_1} , se tiene la siguiente expresión para $F(z)$:

$$F(z) = \frac{b_{1,m_1}}{(z - p_1)^{m_1}} + \frac{b_{1,m_1-1}}{(z - p_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{b_{1,1}}{z - p_1} + F_1(z)$$

con $F_1(z)$ holomorfa en $D(p_1, \epsilon_1)$ pero con polos en $\mathbb{C}_z - D(p_1, \epsilon_1)$.

Sea $A_{p_2} = D(p_2, \epsilon_2) - \{p_2\}$ un anillo alrededor de p_2 . Desarrollando en series de Laurent a $F_1(z)$ alrededor de p_2 en A_{p_2} , se tiene la siguiente expresión para $F_1(z)$:

$$F_1(z) = \frac{b_{2,m_2}}{(z - p_2)^{m_2}} + \frac{b_{2,m_2-1}}{(z - p_2)^{m_2-1}} + \dots + \frac{b_{2,1}}{z - p_2} + F_2(z),$$

donde $F_2(z)$ es holomorfa en $D(p_1, \epsilon_1) \cup D(p_2, \epsilon_2)$ pero con polos en

$$\mathbb{C}_z - (D(p_1, \epsilon_1) \cup D(p_2, \epsilon_2)).$$

Continuando con este proceso, se tiene que $F(z)$ puede escribirse en \mathbb{C}_z de la siguiente manera:

Para $k = 1, 2, \dots, n$, sea

$$H_k(z) = \frac{b_{k,m_k}}{(z-p_k)^{m_k}} + \frac{b_{k,m_k-1}}{(z-p_k)^{m_k-1}} + \dots + \frac{b_{k,1}}{z-p_k}.$$

Entonces

$$F(z) = H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_n(z) + \tilde{F}_{n+1}(z)$$

con $\tilde{F}_{n+1}(z)$ holomorfa en todo \mathbb{C}_z y de hecho $\tilde{F}_{n+1}(z)$ definida como

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{n+1} : \widehat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto F(z) - \sum_{k=1}^n H_k(z) \end{aligned}$$

es holomorfa sobre la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.

Se afirma que $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es constante. En efecto, suponga que $\tilde{F}_{n+1}(z)$ no es constante, entonces por el teorema de la función abierta (ver [18], Capítulo 8, pág. 256), $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es una función abierta. Entonces $\tilde{F}_{n+1}(\widehat{\mathbb{C}})$ es compacto y por lo tanto es cerrado en \mathbb{C} , pero como \mathbb{C} es conexo se tiene que necesariamente $\tilde{F}_{n+1}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$, lo cual es una contradicción, puesto que \mathbb{C} no es compacto.

Por lo tanto $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es una función constante. Luego un cálculo sencillo muestra que $F(z)$ es racional, en las cartas (U_1, ψ_1) y (U_2, ψ_2) que cubren a $\widehat{\mathbb{C}}$.

2. Sea $\eta = \{h(z)dz\}$ en \mathbb{C}_z con multiplicidades $-m_1, -m_2, \dots, -m_r$ y $m_k > 0$.

Procediendo de manera similar como en el inciso (1), se tiene que $h(z)dz$ se puede escribir en \mathbb{C}_z de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h(z)dz = & \left(\frac{b_{1,m_1}}{(z-p_1)^{m_1}} + \frac{b_{1,m_1-1}}{(z-p_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{b_{1,1}}{z-p_1} + \right. \\ & \frac{b_{2,m_2}}{(z-p_2)^{m_2}} + \frac{b_{2,m_2-1}}{(z-p_2)^{m_2-1}} + \dots + \frac{b_{2,1}}{z-p_2} + \dots \\ & \left. \frac{b_{n,m_n}}{(z-p_n)^{m_n}} + \frac{b_{n,m_n-1}}{(z-p_n)^{m_n-1}} + \dots + \frac{b_{n,1}}{z-p_n} + \tilde{F}_{n+1}(z) \right) dz, \end{aligned}$$

donde $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es holomorfa en todo \mathbb{C}_z .

Agrupando y realizando el álgebra correspondiente, $h(z)dz$ se escribe de la siguiente manera:

$$h(z)dz = \left(\frac{\tilde{Q}(z)}{(z-p_1)^{m_1}(z-p_2)^{m_2} \dots (z-p_n)^{m_n}} + \tilde{F}_{n+1}(z) \right) dz$$

$\tilde{Q}(z)$ es un polinomio de grado a lo más $m_1 + m_2 + \dots + m_n - 1$.

Ahora bien, para poder concluir que η es una 1-forma diferencial racional, basta con probar que su expresión $h(z)dz$ lo es, esto es, si $h(z)dz$ es racional en \mathbb{C}_z , de manera inmediata la expresión de η en la coordenada ω es racional (ver Observación 1.2.2).

En efecto, como $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es holomorfa en \mathbb{C}_z , entonces tiene un desarrollo (infinito) en series de potencias:

$$\tilde{F}_{n+1}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}.$$

Para ver que $h(z)dz$ es racional, basta con probar que $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es un polinomio, es decir que su grado es finito.

Si el grado de $\tilde{F}_{n+1}(z)$ no fuese finito, entonces la expresión de z en la coordenada ω es:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\omega^2} h\left(\frac{1}{\omega}\right) d\omega &= -\frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\tilde{Q}\left(\frac{1}{\omega}\right)}{\left(\frac{1}{\omega}-p_1\right)^{m_1} \left(\frac{1}{\omega}-p_2\right)^{m_2} \dots \left(\frac{1}{\omega}-p_n\right)^{m_n}} + \tilde{F}_{n+1}\left(\frac{1}{\omega}\right) \right) d\omega \\ &= \left(\frac{-1\tilde{Q}\left(\frac{1}{\omega}\right)\omega^{m_1+m_2+\dots+m_n-2}}{(-p_1)^{m_1} \dots (-p_n)^{m_n} \left(\omega-\frac{1}{p_1}\right)^{m_1} \dots \left(\omega-\frac{1}{p_n}\right)^{m_n}} + \frac{-1}{\omega^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \omega^{n\nu} \right) d\omega. \end{aligned}$$

Entonces el sumando:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \omega^{-\nu},$$

indica que $\omega = 0$ es una singularidad esencial para $-1/\omega^2 h(1/\omega) d\omega$ y además es claro que el factor $-1/\omega^2$, no destruye la singularidad esencial en el sumando $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \omega^{-\nu}$.

Entonces ∞ sería una singularidad esencial para $h(z)dz$, lo cual es una contradicción con la hipótesis del principio, de que ∞ es un punto regular para η . Por lo tanto $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es un polinomio. Si el grado de $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es estrictamente positivo entonces ∞ sería un polo para $h(z)dz$, lo cual contradice la hipótesis, entonces $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es constante para todo $z \in \mathbb{C}_z$.

Por lo tanto, un cálculo sencillo muestra que $h(z)dz$ es racional.

3. Sea $X = \{f(z) \frac{\partial}{\partial z}\}$ un campo vectorial meromorfo sobre $\hat{\mathbb{C}}$.

Por el inciso (2), se tiene que la 1-forma diferencial meromorfa $\{dz/f(z)\}$ asociada a X es racional.

Luego un cálculo sencillo muestra que X es racional en $\hat{\mathbb{C}}$. \square

Lema 14.4. 1. Sea $F : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa.

La multiplicidad de un cero o de un polo de F , es independiente de la expresión de F en cualquier carta coordenada.

2. Sea $\eta = \{h(z)dz\}$ una 1-forma diferencial meromorfa sobre $\hat{\mathbb{C}}$.

La multiplicidad de un cero o de un polo de η , es independiente de la expresión de η en cualquier carta coordenada.

3. Sea $X = \{f(z) \frac{\partial}{\partial z}\}$ un campo vectorial meromorfo sobre $\hat{\mathbb{C}}$.

La multiplicidad de un cero o de un polo de X , es independiente de la expresión de X en cualquier carta coordenada.

Demostración. Sea $\{(U_i, \psi_i) \mid i = 1, 2\}$ la estructura compleja en $\hat{\mathbb{C}}$ dada en el Ejemplo (1.1.1).

1. Sea $c \in \hat{\mathbb{C}}$ un cero (o un polo) de F .

Sea $F(z) = F \circ \psi^{-1}(z)$ la expresión de F en la coordenada z y suponga que $\psi(c) = c$ es un cero (o un polo) de multiplicidad $s \geq 1$ (respectivamente $-r \leq -1$). Se desea mostrar que $\psi_2(c) = 1/c$ es un cero (o un polo), para la expresión

$$F\left(\frac{1}{\omega}\right) = F \circ \psi^{-1}(\omega),$$

de la función F en la coordenada ω , de multiplicidad $s \geq 1$ (respectivamente $-r \leq -1$).

En efecto, como $\psi(c) = c$ es un cero de multiplicidad s para $F(z)$ entonces

$$F(z) = (z - c)^s H(z), \quad (17)$$

donde $H(c) \neq 0$.

Entonces sustituyendo $z = 1/\omega$ en la igualdad (17), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{\omega}\right) &= \left(\frac{1}{\omega} - c\right)^s H\left(\frac{1}{\omega}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\omega} - c\right)^s \tilde{H}(\omega), \end{aligned} \quad (18)$$

donde $\tilde{H}(\omega) = (-c)^s H(1/\omega)/\omega^s$.

Por lo tanto de la igualdad (18), se tiene que $\psi_2 = 1/c$ es un cero de multiplicidad s para $F(1/\omega)$. Substituyendo $s = -r$ en las igualdades (17) y (18), se obtiene el resultado para el caso en que c es un polo.

Por lo tanto la multiplicidad de un cero o de un polo de F , es independiente de la carta coordenada en que se exprese la función F .

2. Sea c un cero (o un polo) distinto de cero de η .

Sea $h(z)dz$ la expresión de η en la coordenada z y suponga que $\psi_1(c) = c$ es un cero de multiplicidad $s \geq 1$ (respectivamente $-r \leq -1$). Se desea mostrar que $\psi_2(c) = 1/c$ es un cero (o un polo), para la expresión de η en la coordenada ω de multiplicidad s (respectivamente $-r$).

En efecto, como $\psi_1(c) = c$ es un cero de multiplicidad s para $h(z)dz$, entonces

$$h(z)dz = (z - c)^s h_1(z)dz,$$

donde $h_1(z)$ es una función racional con $h_1(c) \neq 0$ e ∞ .

Bajo el cambio de coordenadas $\psi_{21}(z)$, se tiene la 1-forma diferencial meromorfa

$$(\psi_{21})_*(h(z)dz) := \frac{-1}{\omega^2} h\left(\frac{1}{\omega}\right) d\omega$$

tiene un cero (o un polo) en $\psi_2(c) = 1/c$ y se afirma que es de multiplicidad s (respectivamente $-r$).

En efecto, se tiene la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\omega^2} h\left(\frac{1}{\omega}\right) &= \frac{-1}{\omega^2} \left(\frac{1}{\omega} - c\right)^s h_1\left(\frac{1}{\omega}\right) d\omega \\ &= \left(\omega - \frac{1}{c}\right)^s \tilde{h}_1(\omega), \end{aligned} \tag{19}$$

donde

$$\tilde{h}_1(\omega) = \frac{(-1)^{s+1} c^s h_1\left(\frac{1}{\omega}\right)}{\omega^{s+2}}.$$

Entonces

$$\tilde{h}_1\left(\frac{1}{c}\right) = (-1)^{s+1} c^{2s+2} h_1(c),$$

donde $h_1(c) \neq 0$ e ∞ .

Entonces de la igualdad (19), se obtiene que $\psi_2(c) = 1/c$ es un cero de multiplicidad s para $(-1/\omega^2)h(1/\omega)d\omega$. Tomando $s = -r$ en la igualdad (19), se obtiene el resultado para el caso en que c es un polo.

En el caso cuando $c = 0$ es un cero (o polo) para $h(z)dz$, el resultado se obtiene de manera similar al caso $c \neq 0$ con la particularidad de que se utiliza únicamente la carta (U_1, ψ_1) , pues la única que cubre a $c = 0$. Por lo tanto la multiplicidad de un cero o de un polo de η es independiente de la carta coordenada en que se exprese η .

3. Para el caso de campos vectoriales meromorfos, basta considerar la 1-forma diferencial meromorfa $\{dz/f(x)\}$ sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, para obtener lo pedido. \square

Se define para una función, para una 1-forma diferencial meromorfa y para un campo vectorial meromorfo, las suma total de multiplicidades de ceros y la suma total de multiplicidades de polos de la función, de la 1-forma diferencial meromorfa o del campo vectorial meromorfo en cuestión, sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, como C y P respectivamente, donde C es un entero positivo y P es un entero negativo.

Teorema 14.5. 1. Sea $F : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa, entonces

$$C(F) + P(F) = 0.$$

2. Sea X un campo vectorial meromorfo sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces

$$C(X) + P(X) = 2.$$

3. Sea $\eta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una 1-forma diferencial meromorfa sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces

$$C(\eta) + P(\eta) = -2.$$

Demostración. Para el inciso (1), la expresión de F en la coordenada local z es igual a:

$$F(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}$$

donde a_n y b_m son distintos de cero, $m, n \in \mathbb{N}$ y el numerador no tiene factores en común con el denominador.

Se tiene que en la coordenada z , $P(F) = -m$ y $C(F) = n$. Se quiere mostrar que 0 en la coordenada ω (correspondiente a ∞ en \mathbb{C}_z) es un cero de multiplicidad $m - n$ o un polo de multiplicidad $-(n - m)$

para F .

En efecto,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{\omega}\right) &= \frac{a_n\left(\frac{1}{\omega}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{\omega}\right)^{n-1} + \dots + a_1\left(\frac{1}{\omega}\right) + a_0}{b_m\left(\frac{1}{\omega}\right)^m + b_{m-1}\left(\frac{1}{\omega}\right)^{m-1} + \dots + b_1\left(\frac{1}{\omega}\right) + b_0} \\ &= \frac{\omega^m}{\omega^n} \left(\frac{a_n + a_{n-1}\omega + \dots + a_1\omega^{n-1} + a_0\omega^n}{b_m + b_{m-1}\omega + \dots + b_1\omega^{m-1} + b_0\omega^m} \right). \end{aligned}$$

Puesto que

$$\left(\frac{a_n + a_{n-1}\omega + \dots + a_1\omega^{n-1} + a_0\omega^n}{b_m + b_{m-1}\omega + \dots + b_1\omega^{m-1} + b_0\omega^m} \right)(0) = \frac{a_n}{b_m},$$

entonces

a) Si $m > n$, implica que 0 es un cero de multiplicidad $m - n$, por lo tanto:

$$C(F) + P(F) = n + (m - n) + (-m) = 0.$$

b) Si $m < n$, implica que 0 es un polo de multiplicidad $-(n - m)$, por lo tanto:

$$C(F) + P(F) = n - m - (n - m) = 0.$$

c) Si $n = m$, el resultado es trivial e ∞ es un punto regular (no cero y no polo) para F .

Para el inciso (2), la expresión de X en la coordenada z es:

$$f(z) \frac{\partial}{\partial z} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0} \frac{\partial}{\partial z}$$

donde $a_n, b_m \neq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ y el numerador no tiene factores en común con el denominador.

Se tiene que en la coordenada z , $P(X) = -m$ y $C(X) = n$. Se quiere mostrar que 0 correspondiente a la coordenada ω es un cero de multiplicidad $m - n + 2$ o un polo de multiplicidad $-(n - m - 2)$.

En efecto, considere la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} -\omega^2 f\left(\frac{1}{\omega}\right) \frac{\partial}{\partial \omega} &= -\omega^2 \left(\frac{a_n\left(\frac{1}{\omega}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{\omega}\right)^{n-1} + \dots + a_1\left(\frac{1}{\omega}\right) + a_0}{b_m\left(\frac{1}{\omega}\right)^m + b_{m-1}\left(\frac{1}{\omega}\right)^{m-1} + \dots + b_1\left(\frac{1}{\omega}\right) + b_0} \right) \frac{\partial}{\partial \omega} \\ &= -\frac{\omega^{m+2}}{\omega^n} \left(\frac{a_n + a_{n-1}\omega + \dots + a_1\omega^{n-1} + a_0\omega^n}{b_m + b_{m-1}\omega + \dots + b_1\omega^{m-1} + b_0\omega^m} \right) \frac{\partial}{\partial \omega}. \end{aligned}$$

Puesto que

$$\left(\frac{a_n + a_{n-1}\omega + \dots + a_1\omega^{n-1} + a_0\omega^n}{b_m + b_{m-1}\omega + \dots + b_1\omega^{m-1} + b_0\omega^m} \right)(0) = \frac{a_n}{b_m},$$

entonces

a) Si $m + 2 > n$, implica que 0 es un cero de multiplicidad $m + 2 - n$, por lo tanto:

$$C(X) + P(X) = n + (m - n + 2) + (-m) = 2.$$

b) Si $m + 2 < n$, implica que 0 es un polo de multiplicidad $-(n - m - 2)$, por lo tanto:

$$C(X) + P(X) = n - m - (n - m - 2) = 2.$$

c) Si $n = m + 2$, el resultado es trivial e ∞ es un punto regular (no cero y no polo) para X .

Por un proceso similar se obtiene el resultado para el inciso (3). □

15. Transformaciones de Moebius y campos vectoriales.

El grupo de todos los difeomorfismos holomorfos de la esfera de Riemann son las transformaciones de Moebius

$$PSL(2, \mathbb{C}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

Como grupo de Lie posee un algebra de Lie compleja

$$\mathfrak{psl}(2, \mathbb{C}),$$

que intuitivamente es el espacio vectorial de todos los campos vectoriales sobre la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$ que describen infinitesimalmente las transformaciones de Moebius (siguiendo las ideas de S. Lie). Esa algebra es isomorfa a los campos holomorfos polinomiales de grado menor o igual a dos,

$$\mathfrak{psl}(2, \mathbb{C}) \cong \left\{ \lambda(z - p_1)(z - p_2) \frac{\partial}{\partial z} \mid \text{aparecen } 0, 1 \text{ o } 2 \text{ } p_i \in \widehat{\mathbb{C}} \right\},$$

ver [13]. Con ello tenemos que los flujos reales de cada X como antes, nos proporciona un subgrupo a un parámetro real de transformaciones de Moebius.

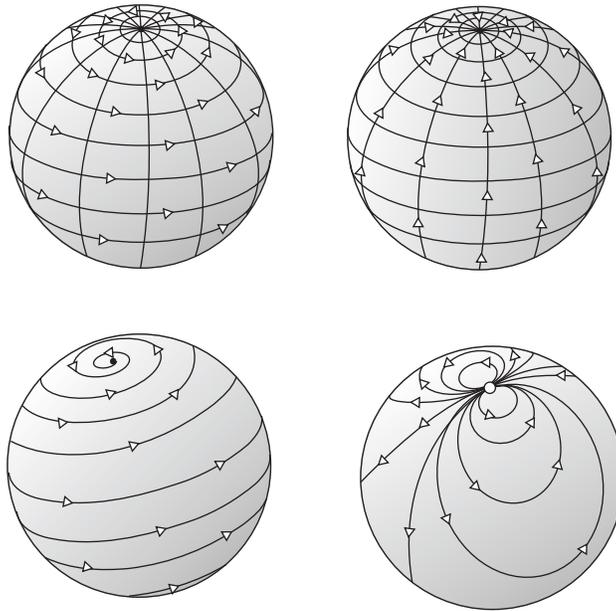


Figura 21: Los flujos reales de campos holomorfos en la esfera de Riemann, tienen asociados a grupos monparamétricos de transformaciones de Moebius.

Para la prueba de la tabla ver [18].

<i>campo vectorial</i>	<i>flujo conjugado por transformaciones de Moebius</i> $t \in \mathbb{R}$	<i>puntos fijos en $\widehat{\mathbb{C}}$</i>
$\sqrt{-1}\theta z \frac{\partial}{\partial z}$	<i>elíptica</i> $z \mapsto e^{\sqrt{-1}\theta t} z$	2
$z \frac{\partial}{\partial z}$	<i>hiperbólica</i> $z \mapsto e^t z$	2
$\lambda z \frac{\partial}{\partial z}$	<i>loxodrómica</i> $z \mapsto e^{t\lambda} z, \Re(\lambda) > 0$	2
$z^2 \frac{\partial}{\partial z}$	<i>parabólica</i> $z \mapsto z + t$	1

Observación 15.1. *Un campo racional*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{en} \quad \widehat{\mathbb{C}}$$

tiene un flujo por transformaciones continuas de la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$ si y solo si es un campo polinomial de grado a lo más 2.

Ejercicio. Describe las métricas de Riemann para $X \in \mathfrak{psl}(2, \mathbb{C})$.

Ejercicio. Describe las transformaciones de Moebius de los campos siguientes, dibuja sus trayectorias en la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$, calcula sus puntos fijos.

i) $(z - \sqrt{-1})^2 \frac{\partial}{\partial z}$.

ii) $(z - \sqrt{-1})(z + \sqrt{-1}) \frac{\partial}{\partial z}$.

iii) $2\sqrt{-1}(z - \sqrt{-1})(z + \sqrt{-1}) \frac{\partial}{\partial z}$.

16. Geometría euclidiana global: Gauss–Bonnet y Poincaré–Hopf

Recordemos que el índice de Poincaré–Hopf en q de un campo vectorial real $\Re(X)$ que proviene de un campo holomorfo, $X(z)$ en un disco y que se anula solamente en el origen $B(q, r) \setminus \{q\}$, es el número de vueltas de la aplicación de Gauss

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} : S_q^1 &\longrightarrow S^1, \\ \zeta(t) &\longmapsto \frac{\Re(X(\zeta(t)))}{|\Re(X(\zeta(t)))|}. \end{aligned}$$

Esto es, $\zeta(t) : [0, 2\pi] \longrightarrow S_q^1$ parametriza un círculo de radio pequeño $\varepsilon > 0$ con centro en el punto q , dando exactamente una vuelta en dirección contraria al reloj. La aplicación de Gauss considera el vector $\Re(X(\zeta(t)))$ y lo normaliza a que tenga norma uno. El número de veces que dicho vector normalizado da en el círculo unitario S^1 ; es el índice de Poincaré–Hopf, ver figura 16.

Denotamos el índice de Poincaré–Hopf de X en q como $PH(X, q)$.

En particular $PH(X, q) = 0$ si y sólo si q es un punto regular de X , esto es q es un punto donde X no se anula y es holomorfo.

Ahora estendemos este concepto al caso meromorfo. Suponemos que el punto 0 es un polo o cero de un campo meromorfo X es una vecindad de un disco de dicho 0. Sea

e el número de sectores elípticos de $\Re(X)$,

h el número de sectores hipérbolicos de $\Re(x)$,

sectores considerados en el punto 0.

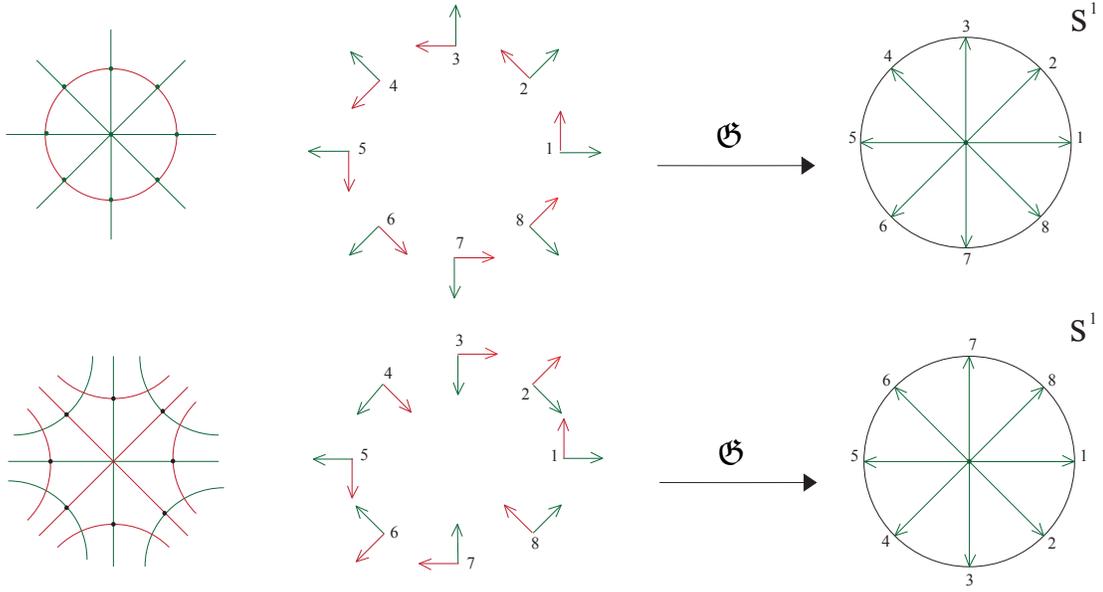


Figura 22: Partiendo de $X = \sqrt{-1}z \frac{\partial}{\partial z}$ se calcula la imagen $\mathfrak{G}(X(\zeta(t)))$ ella da una vuelta $+1$ en el círculo S^1 . Para $X = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}$ la vuelta es negativa -1 .

La siguiente afirmación (1) muestra que es posible calcular el índice de Poincaré–Hopf de un campo vectorial en un punto singular q sabiendo el tipo de sectores centrados en 0 , este resultado generaliza la fórmula clásica de I. Bendixon.

Teorema 16.1. Poincaré–Hopf local y global.

1. Sea un campo vectorial meromorfo sobre un disco abierto $(\mathbb{C}, 0)$ con 0 un punto singular aislado. Entonces el índice de Poincaré–Hopf de X en 0 es

$$PH(X, 0) := PH(\Re(X))1 + \frac{e - h}{2}. \quad (20)$$

2.

$$PH(\Re(X), 0) = PH(\Im(X), 0).$$

3. Consideremos X un campo vectorial meromorfo sobre la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces

$$2 = \chi(\widehat{\mathbb{C}}) = \sum_{q \in \widehat{\mathbb{C}}} PH(\Re(X), q). \quad (21)$$

Demostración. Para un campo meromorfo X en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, su número total de ceros y polos contados con multiplicidad $C(X)$, $P(X)$, cumplen que

$$C(X) + P(X) = 2.$$

Basta observar que

multiplicidad de polo o cero de X	índice de Poincaré-Hopf de $\Re(X)$
\vdots	\vdots
2	2
1	1
0	0
-1	1
-2	-2
\vdots	\vdots

□

17. Campos vectoriales polinomiales.

Ejemplo 17.1. Consideremos la 1-forma diferencial racional

$$f(z)dz = \frac{dz}{(z - p_1) \cdots (z - p_5)}$$

donde $\{p_1, \dots, p_5\}$ son las raíces quintas de la unidad, esto es $p_i^5 = 1$.

La métrica de Riemann esta dada por un pentagono, ver figura 23.

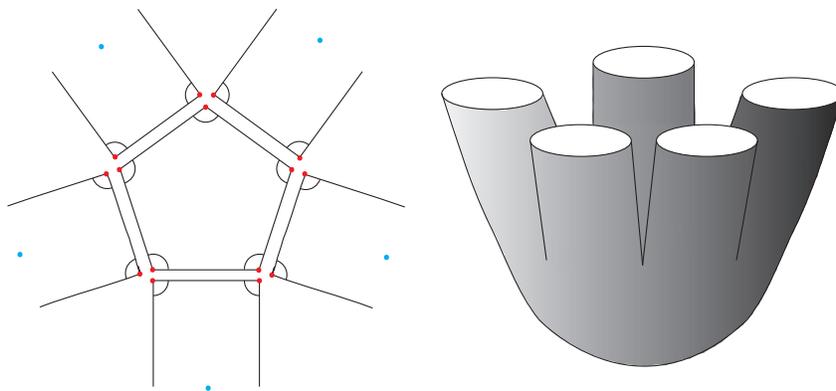


Figura 23: El pegado de un pentagono euclidiano y cinco bandas de altura infinita, producen topológicamente una esfera menos cinco puntos. El flujo del campo polinomial puede leerse como líneas horizontales en el pentagono y los cilindros adyacentes.

Ejercicio. Calcula el índice de Poincaré-Hopf de los polos y ceros del campo vectorial de grado cinco, asociado al ejemplo anterior.

Verifica que la suma total $C(X) + P(X) = 2$.

18. Apéndice 1. Ecuaciones diferenciales en \mathbb{R} .

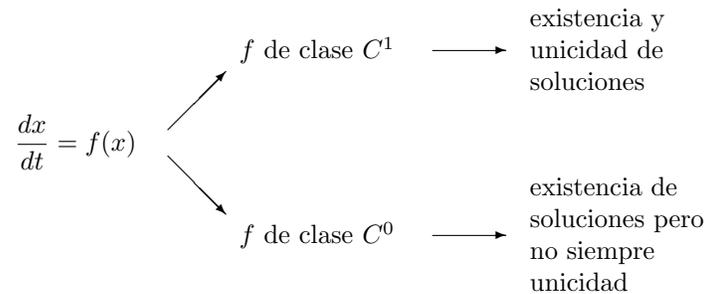
La ecuación diferencial con condición inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t) & f(t) \text{ de clase } C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

posee una solución única, gracias al Teorema Fundamental del Cálculo. En contraste, la ecuación diferencial con condición inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) & f(x) \text{ de clase } C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

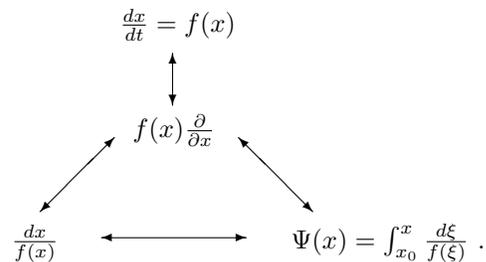
requiere más trabajo. La situación es como sigue



Ella posee tres objetos asociados

- el campo vectorial $f(x) \frac{\partial}{\partial x}$,
- la 1-forma diferencial $dx/f(x)$, y
- la integral indefinida $\Psi(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)}$.

Mismos que se organizan en el diagrama



En consecuencia, para la condición inicial $x(t_0) = x_0$ la ecuación (23) posee una solución única

$$x(t) : \begin{array}{l} I \subset \mathbb{R}_t \longrightarrow \mathbb{R}_x \\ t \longmapsto \begin{cases} x_0 & \text{si } f(x_0) = 0 \\ \Psi^{-1}(t - t_0) & \text{si } f(x_0) \neq 0. \end{cases} \end{array}$$

Ello ha requerido el Teorema Fundamental del Cálculo (para hallar Ψ) y el Teorema de la Función Inversa (para hallar Ψ^{-1}).

19. La ecuación $\frac{dx}{dt} = f(t)$.

La ecuación diferencial ordinaria más sencilla, es como sigue.

Teorema 19.1. *Consideramos un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}_t$. La solución de la ecuación diferencial con condición inicial*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t) & f(t) \text{ de clase } C^0(I \subset \mathbb{R}_t, \mathbb{R}_x), \\ x(t_0) = x_0, & (t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}_x, \end{cases} \quad (22)$$

existe y es única. Ella es

$$x(t) : I \subset \mathbb{R}_t \longrightarrow \mathbb{R}_x \\ t \longmapsto \int_{t_0}^t f(\xi) d\xi + x_0,$$

de clase C^1 .

Ejemplo 19.2. La ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = |t| = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ -t & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad f(t) \text{ de clase } C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

tiene por solución para $x(0) = x_0$ a

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 + x_0 & \text{si } t \geq 0 \\ -\frac{1}{2}t^2 + x_0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Ejemplo 19.3. La ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

no satisface que $f(t)$ sea C^0 en $x = 0$, pero admite soluciones. La solución para $x(0) = x_0$ es

$$x(t) = |t| + x_0.$$

Observación 19.4. Si $x(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución de una ecuación diferencial de la forma (22), entonces todas las trayectorias en la familia

$$\{x(t) + x_1 : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

también son soluciones de dicha ecuación.

20. La ecuación $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Consideramos en un intervalo abierto $D \subset \mathbb{R}_x$, la ecuación diferencial ordinaria con condición inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) & f(x) \text{ de clase } C^1(D \subset \mathbb{R}_x, \mathbb{R}), \\ x(t_0) = x_0 & (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times D. \end{cases} \quad (23)$$

Para cada condición inicial (t_0, x_0) deseamos hallar una trayectoria

$$x(t) : I \subset \mathbb{R}_t \longrightarrow D \subset \mathbb{R}_x,$$

tal que satisfaga (23), i.e.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \quad \text{y} \quad x(t_0) = x_0.$$

Ejemplo 20.1. Las siguientes ecuaciones diferenciales de la forma (22), (23) con sus soluciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = t \\ x(0) = 1 \end{array} \right. \quad y \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x \\ x(0) = 1 \end{array} \right.$$

$$x(t) = t + 1 \quad \quad \quad x(t) = e^t$$

son muy distintas cualitativamente entre sí.

21. Ejemplos.

Notación.

$t \in \mathbb{R}_t$ es el *tiempo* o la variable independiente de (23),

$x \in D \subset \mathbb{R}_x$ es el *estado* o la variable dependiente de (23).

Ejemplo 21.1. Consideramos la ecuación diferencial

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

La solución para $x_0 = 0$ es $x(t) \equiv 0$, que expresada como trayectoria es

$$\begin{array}{ccc} x(t) : \mathbb{R}_t & \longrightarrow & \mathbb{R}_x \\ t & \longmapsto & x_0. \end{array}$$

La solución para $x_0 \neq 0$ se obtiene como sigue

$$\frac{dx}{\lambda x} = dt \Leftrightarrow \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\lambda \xi} = \int_{t_0}^t d\tau \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \lambda(t - t_0).$$

Ahora se despeja x ,

$$e^{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)} = e^{\lambda(t-t_0)} \Leftrightarrow x = x_0 e^{\lambda(x-x_0)}.$$

Expresada como trayectoria es

$$\begin{array}{ccc} x(t) : \mathbb{R}_t & \longrightarrow & \mathbb{R}_x \\ t & \longmapsto & x_0 e^{\lambda(t-t_0)}. \end{array}$$

Ejemplo 21.2. Consideramos la ecuación diferencial

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x^2 \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right.$$

La solución para $x_0 = 0$ es $x(t) \equiv 0$.

La solución para $x_0 \neq 0$ se obtiene como sigue

$$\frac{dx}{x^2} = dt \Leftrightarrow \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\xi^2} = \int_{t_0}^t d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = t - t_0.$$

Si $x_0 > 0$, despejando x y expresándola como trayectoria es

$$\begin{array}{ccc} x(t) : (-\infty, \frac{1}{x_0} + t_0) \subset \mathbb{R}_t & \longrightarrow & \mathbb{R}_x \\ t & \longmapsto & \frac{x_0}{1 - (t-t_0)x_0}. \end{array}$$

La solución escapa a $x = +\infty$ para $t^+ = \frac{1}{x_0} + t_0$. El caso $x_0 < 0$ es análogo.

Ejemplo 21.3. Consideramos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{x} \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

La solución para $x_0 = 0$ carece de sentido.

La solución para $x_0 \neq 0$ se obtiene como sigue

$$x dx = dt \Leftrightarrow \int_{x_0}^x \xi d\xi = \int_{t_0}^t d\tau \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} = t - t_0.$$

Si $x_0 > 0$, despejando x y expresándola como trayectoria

$$\begin{aligned} x(t) : (t_0 - \frac{x_0^2}{2}, \infty) \subset \mathbb{R}_t &\longrightarrow \mathbb{R}_x \\ t &\longmapsto \sqrt{2(t - t_0) + x_0^2}. \end{aligned}$$

La solución escapa a $x = 0$ para $t^+ = \frac{1}{x_0} + t_0$. El caso $x_0 < 0$ es análogo.

Ejemplo 21.4. Consideramos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^{2/3} \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Una solución para $x_0 = 0$ es $x(t) \equiv 0$, pero existen más soluciones como se muestra a continuación.

La solución para $x_0 \neq 0$ se obtiene como sigue

$$x^{-2/3} dx = dt \Leftrightarrow \int_{x_0}^x \xi^{-2/3} d\xi = \int_t^{t_0} d\tau \Leftrightarrow 3x^{1/3} - 3x_0^{1/3} = t - t_0.$$

Finalmente, despejando x tenemos

$$\begin{aligned} x(t) : (-\infty, \infty) \subset \mathbb{R}_t &\longrightarrow \mathbb{R}_x \\ t &\longmapsto \frac{1}{3}(t - t_0)^3 + x_0. \end{aligned}$$

Para la condición inicial $x(0) = 0$ no hay solución única

$$x(t) \equiv 0, \quad x(t) = \frac{1}{3}t^3, \quad x(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

son soluciones para esa condición inicial.

Ejemplo 21.5. Consideramos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt[3]{x}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Para $x_0 = 0$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ hay tres soluciones, que son las siguientes $x(t) \equiv 0$,

$$\begin{aligned} x(t) : (-\infty, T) \subset \mathbb{R}_t &\longrightarrow \mathbb{R}_x \\ t &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}(t - t_0)^{\frac{3}{2}} & \text{si } t \in (0, T) \end{cases}, \end{aligned}$$

$$x(t) : (-\infty, T) \subset \mathbb{R}_t \longrightarrow \mathbb{R}_x$$

$$t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ -\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (t - t_0)^{\frac{3}{2}} & \text{si } t \in (0, T). \end{cases}$$

La no unicidad se debe a que $\int_0^\epsilon \frac{d\xi}{\sqrt[3]{\xi}}$ es finita para todo $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

22. Campo vectorial asociado.

A una ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = f(x)$ como en (23) se le asocian tres objetos.

- Un campo vectorial que asigna a cada punto x un vector tangente a \mathbb{R}_x basado en dicho punto x . Esto es

$$D \subset \mathbb{R}_x \longrightarrow T\mathbb{R}_x$$

$$x \longmapsto f(x) \frac{\partial}{\partial x}$$

en palabras;

$$\text{punto } x \longmapsto \begin{cases} \text{vector tangente } f(x) \text{ a } \mathbb{R}_x \\ \text{basado en el punto } x. \end{cases}$$

Conviene recordar que $\frac{\partial}{\partial x}$ es el vector unitario basado en x que apunta en la dirección positiva de la variable x . Por ello $f(x) \frac{\partial}{\partial x}$ debe entenderse como una combinación lineal de ese vector que varía de forma C^1 cuando x varía en D .

- Una 1-forma diferencial de tiempo

$$\omega = \frac{dx}{f(x)} \quad \text{de clase } C^1 \text{ en } D - \{f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}_x.$$

La 1-forma evaluada en el campo vectorial $f(x) \frac{\partial}{\partial x}$ cumple que

$$\omega \left(f(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{dx}{f(x)} \left(f(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \equiv 1.$$

- La integral indefinida

$$\Psi(x) : D - \{f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}_x \longrightarrow \mathbb{R}_t$$

$$x \longmapsto \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)}.$$

Resumiendo, obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \frac{dx}{dt} = f(x) & \\ & \updownarrow & \\ & f(x) \frac{\partial}{\partial x} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \frac{dx}{f(x)} & \longleftrightarrow & \Psi(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)}. \end{array} \quad (3)$$

Teorema 22.1. Consideramos un intervalo abierto $D \subset \mathbb{R}_x$. La solución de la ecuación diferencial con condición inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) & f(x) \text{ de clase } C^1(D \subset \mathbb{R}_x, \mathbb{R}), \\ x(t_0) = x_0 & (t_0, x_0) \in \mathbb{R}_t \times D, \end{cases} \quad (2)$$

existe y es única.

Las soluciones asumen dos posibilidades

$$\begin{aligned} x(t) : I \subset \mathbb{R}_t &\longrightarrow D \subset \mathbb{R}_x \\ t &\longmapsto \begin{cases} x_0 & \text{si } f(x_0) = 0 \\ \Psi^{-1}(t - t_0) & \text{si } f(x_0) \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

donde

$$t - t_0 = \Psi(x) := \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)}$$

y el tamaño del intervalo I depende de x_0 y $f(x)$.

23. Prueba de la existencia de soluciones.

Prueba de la existencia de soluciones Teorema 22.1.

Caso 1. Si $f(x_0) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} x(t) : \mathbb{R}_t &\longrightarrow \mathbb{R}_x \\ t &\longmapsto x_0 \end{aligned}$$

es la solución.

Caso 2. Si $f(x_0) \neq 0$, partimos de

$$\frac{dx}{f(x)} = dt.$$

Imponiendo las condiciones iniciales

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)} = \int_{t_0}^t d\tau.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, la integral indefinida

$$\Psi(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)} = t - t_0$$

existe y es de clase C^2 en $D - \{f(x) = 0\}$. Usando que $\Psi'(x_0) = \frac{1}{f(x_0)} \neq 0$, por el Teorema de la Función Inversa hay un intervalo abierto

$$(t^-, t^+) \subset \mathbb{R}_t \quad -\infty \leq t^- < t_0 < t^+ \leq +\infty$$

máximo en tamaño, que contiene a $t_0 = \Psi(x_0)$ y donde existe la función inversa

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} : I = (t^-, t^+) \subset \mathbb{R}_t &\longrightarrow \mathbb{R}_x \\ t &\longmapsto \Psi^{-1}(t - t_0). \end{aligned}$$

Ella es la solución buscada.

El intervalo (t^-, t^+) depende de x_0 , la notación no expresa esa dependencia. \square

Corolario 23.1. *Para la ecuación diferencial (23) y un intervalo cerrado $[x_0, x_1] \subset D$ tal que $f(x)$ no se anula en $[x_0, x_1]$, se cumple que*

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d\xi}{f(\xi)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{tiempo que requiere una solución} \\ \text{de } x(t) \text{ para ir de } x_0 \text{ a } x_1 \end{array} \right\} \in \mathbb{R} - \{0\}. \quad (4)$$

24. Apéndice 2. Campos vectoriales y 1-formas diferenciales en \mathbb{R}^2 .

Consideraremos a \mathbb{R}^2 como espacio vectorial real de dimensión dos con la base usual

$$e_1 = (1, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad e_2 = (0, 1) = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Con ello cada vector de \mathbb{R}^2 puede escribirse como $(a_0, b_0) = a_0 \frac{\partial}{\partial x} + b_0 \frac{\partial}{\partial y}$.

El espacio vectorial dual de \mathbb{R}^2 es

$$(\mathbb{R}^2)^* = \{ \omega_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid \omega_0 \text{ es } \mathbb{R}\text{-lineal} \},$$

el cual resulta ser un espacio vectorial real de dimensión 2 cuya base es la denominada base dual, $\{dx, dy\}$ definida como

$$\begin{aligned} dx \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) &= 1 & dy \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) &= 0 \\ dx \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) &= 0 & dy \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) &= 1. \end{aligned}$$

Con ello todo $\omega_0 \in (\mathbb{R}^2)^*$ puede escribirse como una combinación lineal

$$A_0 dx + B_0 dy$$

de la base. Como aplicación lineal es

$$\begin{aligned} \omega_0 &= A_0 dx + B_0 dy : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_0, b_0) &= a_0 \frac{\partial}{\partial x} + b_0 \frac{\partial}{\partial y} \longmapsto A_0 a_0 + B_0 b_0. \end{aligned}$$

Lo anterior es

$$\begin{aligned} (A_0 dx + B_0 dy) \left(a_0 \frac{\partial}{\partial x} + b_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) &= a_0 A_0 dx \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + a_0 B_0 dy \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + b_0 A_0 dx \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + b_0 B_0 dy \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= a_0 A_0 + b_0 B_0. \end{aligned}$$

Conviene observar que ω_0 es también una matriz

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_0, b_0) &\longmapsto (A_0, B_0) \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = a_0 A_0 + b_0 B_0. \end{aligned}$$

Ahora trabajamos sobre los planos tangentes a \mathbb{R}^2 . Para cada $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ definimos el *plano tangente* a \mathbb{R}^2 en p como

$$T_p \mathbb{R}^2 = \{ (p, (a_0, b_0)) \mid (a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

Este es un espacio vectorial real de dimensión dos con las operaciones

$$\begin{aligned} (p, (a_0, b_0)) + (p, (a_1, b_1)) &= (p, (a_0 + a_1, b_0 + b_1)) \\ \lambda (p, (a_0, b_0)) &= (p, (\lambda a_0, \lambda b_0)). \end{aligned}$$

El *haz tangente* a \mathbb{R}^2 es la colección de planos tangentes

$$T\mathbb{R}^2 := \bigcup_p T_p \mathbb{R}^2$$

Un campo vectorial de clase C^r , $r \in \{0, 1, \dots, \infty, \omega\}$, es una función que asigna a cada punto $p = (x, y) \in D$ un vector tangente a \mathbb{R}^2 , esto es

$$X : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow T\mathbb{R}^2$$

$$p = (x, y) \mapsto a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

donde $a, b : D \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase C^r .

El dual del *haz cotangente* a \mathbb{R}^2 es la colección de espacios duales de los planos tangentes a \mathbb{R}^2 , esto es

$$(T\mathbb{R}^2)^* = \bigcup_p (T_p\mathbb{R}^2)^*.$$

Una 1-forma diferencial de clase C^r , $r \in \{0, 1, \dots, \infty, \omega\}$ asigna a cada punto $p \in D$ un elemento del dual al espacio tangente a \mathbb{R}^2 , esto es

$$\omega : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow (T\mathbb{R}^2)^*$$

$$p = (x, y) \mapsto A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

donde $A, B : D \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase C^r .

Al evaluar ω en (x_0, y_0) obtenemos una función lineal

$$\omega((x_0, y_0)) = T_{(x_0, y_0)}\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

El núcleo o kernel de $\omega((x_0, y_0))$, denotado por $\text{núcleo}(\omega((x_0, y_0)))$ es el espacio vectorial

$$\mathcal{L}((x_0, y_0)) := \text{núcleo}(\omega((x_0, y_0))) = \{(a_0, b_0) \in T_p\mathbb{R}^2 \mid \omega((x_0, y_0))(a_0, b_0) = 0\}.$$

$\mathcal{L}((x_0, y_0)) = T_p\mathbb{R}^2$ si y sólo si $\omega((x_0, y_0)) = A(x_0, y_0)dx + B(x_0, y_0)dy = 0dx + 0dy$ y

$\dim(\mathcal{L}(\omega((x_0, y_0)))) = 1$ si y sólo si $\omega((x_0, y_0)) = A(x_0, y_0)dx + B(x_0, y_0)dy \neq 0dx + 0dy$.

El núcleo de una 1-forma diferencial asigna a cada punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ el subespacio vectorial en $T_{(x_0, y_0)}\mathbb{R}^2$ definido por el núcleo de dicha 1-forma diferencial evaluada en (x_0, y_0)

$$\text{núcleo} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow T\mathbb{R}^2$$

$$(x_0, y_0) \longmapsto \text{núcleo}(A dx + B dy)$$

$$= \{(x_0, y_0), (a, b) \in T_p\mathbb{R}^2 \mid A(x_0, y_0)a + B(x_0, y_0)b = 0\}$$

Son sinónimos los siguientes conceptos:

$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$, la 1-forma diferencial igualada a cero, $\bigcup_p \mathcal{L}(\omega(p))$ la distribución de ω , esto es la colección de sus núcleos en $T\mathbb{R}^2$.

Dado un punto (x_0, y_0) y un vector $(a_0, b_0) \in T_{(x_0, y_0)}\mathbb{R}^2$ en $\mathcal{L}(\omega((x_0, y_0)))$ observamos que $\omega((x_0, y_0))(a_0, b_0) = A(x_0, y_0)a_0 + B(x_0, y_0)b_0 = 0$ si y sólo si

$$\frac{b_0}{a_0} = -\frac{A(x_0, y_0)}{B(x_0, y_0)}$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{a_0}{b_0} = -\frac{B(x_0, y_0)}{A(x_0, y_0)}.$$

Por lo anterior es verdadero convenir que los siguientes son equivalentes:

i) $A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$,

ii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)}$,

iii) $\frac{dx}{dy} = -\frac{B(x, y)}{A(x, y)}$.

La evaluación o contracción de una 1-forma diferencial ω y un campo vectorial X es la función

$$\omega(X) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto (A dx + B dy) \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) = (Aa + Bb)(x, y).$$

Un campo vectorial X apunta en la dirección del núcleo de una 1-forma diferencial si y sólo si

$$\omega(X) \equiv 0,$$

esto es, la función de evaluar ω en X es idénticamente cero.

25. **Ápndice 3. Nota histórica.**

- N. H. Abel y B. Riemann clasificaron las 1-formas meromorfas; llamando de primera clase o especie a las que son holomorfas, de segunda clase o especie a las que presentan polos con residuos cero, de tercera clase o especie a las que presentan polos con residuos no cero.

Una descripción en lenguaje moderno incluyendo los resultados que ellos construyeron, puede leerse en [8] pág. 628–629.

- F. Klein describió geoméricamente las integrales de 1-formas meromorfas, la descripción de los campos asociados $\Re e(X)$ es clara e implícita en sus trabajos, ver [15].

- La idea de estudiar la métrica euclidiana g_f y sus geodésicas como una forma de entender a $f(z)dz$, apareció explícitamente en lo que hoy se llama la teoría de las diferenciales cuadráticas meromorfas en superficies de Riemann. Una monografía donde se describe los problemas de superficies de Riemann que dieron lugar a esta teoría es la de J. Jenkins [16]. Otro trabajo moderno que adopta este punto de vista es debida a K. Strebel [29].

Bibliografía

- [1] W. Abikoff, *The uniformization theorem*, Amer. Math. Monthly 88, no. 8 (1981), 574–592.
- [2] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Third Ed., McGraw–Hill, Tokio Japan (1979).
- [3] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory*, McGraw–Hill, New York (1973).
- [4] A. J. Álvarez, A. Gasull, R. Prohens, *Configurations of critical points in complex polynomial differential equations*, Nonlinear Ana. 71, (2009), pp. 923–934.
- [5] A. J. Álvarez, A. Gasull, R. Prohens, *Topological classification of polynomial complex differential equations with all the critical points of centre type*, J. of Difference Equ. and Appl. 16, 5–6 (2010), pp. 411–423.
- [6] F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux, *Combinatorial Species and Tree-like Structures*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1998).
- [7] B. Branner, K. Dias, *Classification of complex polynomial vector fields in one variable*, J. Difference Equ. Appl. 16, 5–6 (2010), pp. 463–517.
- [8] E. Brieskorn, H. Knörrer. *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser, Basel (1986).
- [9] K. Broughan, *Corrigenda for holomorphic flows in simply connected regions have no limit cycles*, Meccanica 42 (2007), pp. 213.
- [10] J. Chavarriga, M. Sabatini, *A survey of isochronous centers*, Qual. Theory Dyn. Sys. 1 (1999), pp. 1–70.
- [11] I. Dolgachev, *Lectures on Invariant Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2003).
- [12] S. Donaldson, *Riemann Surfaces*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2(011).
- [13] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, *Lie Groups*, Springer–Verlag, Berlin, (2000).
- [14] M. E. Frías Armenta, J. Muciño–Raymundo, *Topological and analytical classification of vector fields with only isochronous centres*, Journal of Difference Equations and Applications, (2013).
- [15] F. Klein, *On Riemann’s Theory of Algebraic Functions and Their Integrals*, Dover, New York, (1963).
- [16] J. Jenkins, *Univalent Functions and Conformal Mapping*, Springer–Verlag, Berlin 1958.
- [17] M. Konstsevich, A. Zorich, *Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities*, Invent. Math., 153 (2003), pp. 631–678.
- [18] A. Lascurain Orive, *Una Introducción a la Geometría Hiperbólica Bidimensional*, Las Prensas de Ciencias, UNAM, Cd. de México (2005).

- [19] J. Muciño–Raymundo, *Geometría y dinámica de poliedros*, Aportaciones Matemáticas Serie Comunicaciones 16 (1995), pp. 403–435.
- [20] J. Muciño–Raymundo, *Geometría euclidiana y campos vectoriales meromorfos*, Aportaciones Matemáticas Serie Comunicaciones 20 (1997), pp. 135–156.
- [21] J. Muciño–Raymundo, *Complex structures adapted to smooth vector fields*, Math. Annalen, 322 (2002), pp. 229–265.
- [22] J. Muciño–Raymundo, C. Valero–Valdéz, *Bifurcations of meromorphic vector fields on the Riemann sphere*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 15 (1995), pp. 1211–1222.
- [23] J. Muciño–Raymundo, C. Valero–Valdéz, *Geometry and dynamics of the residue theorem*, Morfismos, 5, 1 (2001), pp. 1–16.
- [24] R. Remmert, *Theory of Complex Functions*, Springer–Verlag, New York, (1989).
- [25] J. Reyn, *Phase Portraits of Planar Quadratic Systems*, Springer, New York, (2000).
- [26] M. Sabatini, *Characterizing isochronous centers by Lie brackets*, Diff. Eq. and Dyn. Sys. 5, 1 (1997), pp. 91–99.
- [27] A. Yu. Solynin: *Quadratic differentials and weighted graphs on compact surfaces*, Analysis and Mathematical Physics, Trends in Math. (2009), pp. 473–505.
- [28] M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry, vols. I y II*, Publish or Perish (1979).
- [29] K. Strebel, *Quadratic Differentials*, Springer–Verlag, Berlin, (1984).