# Grupo Libre $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Consideramos los $2n$ símbolos $x_1^1, x_2^1, \dots x_n^1, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}$

Palabra: sucesion finita $x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_m}^{\varepsilon_m}$ $\quad i_j \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_j \in \{1, -1\}$

Notación: $1$ denota la palabra vacía

$$x_i^n = \underbrace{x_i^1 x_i^1 \cdots x_i^1}_{n \text{ veces}} \quad n > 0$$

$$x_i^{-n} = \underbrace{x_i^{-1} x_i^{-1} \cdots x_i^{-1}}_{n \text{ veces}} \quad n > 0$$

Si $W = U x_i^{\varepsilon} x_i^{-\varepsilon} V$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, $W' = UV$
entonces $W \simeq W'$ ($y\ W' \simeq W$)

Def. $W \sim W'$ si existe una sucesión finita de palabras $W_0, W_1, \dots, W_m$ tales que $W = W_0 \simeq W_1 \simeq W_2 \dots W_{m-1} \simeq W_m = W'$

$F(x_1, \dots, x_n)$ es el conjunto de clases de equiv. de palabras

Es un grupo: Se multiplican palabras yuxtaponiéndolas

El inverso de, por ejemplo, $x_1^3 x_2^{-1} x_1 x_2$ es $x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1^{-3}$

El neutro es la palabra vacía $1$.

Una palabra $w$ es <u>reducida</u> si es vacía o si

$$w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{i_m}^{\varepsilon_m} \quad (m \geq 1) \quad \text{con } \varepsilon_j = \varepsilon_{j+1} \text{ siempre que } i_j = i_{j+1}$$

Todo elemento de $F_n := F(x_1, \dots, x_n)$ se puede representar de una manera única por una palabra reducida.

La <u>longitud</u> $\lambda([w])$ del elemento representado por la palabra reducida $w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_m}^{\varepsilon_m}$ es $m$.

$\lambda(1) = 0$

Si $w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{i_m}^{\varepsilon_m}$ $(m \geq 1)$ es una palabra reducida y si $1 \leq p \leq m$ decimos que $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_p}^{\varepsilon_p}$ es un <u>segmento inicial</u> de $w$.

Podemos suponer $\{x_1, \dots, x_n\} \subset F_n$.

Si $\varphi : \{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow G$, $G$ grupo, entonces existe un único homomorfismo de $F_n$ en $G$ cuya restricción a $\{x_1, \dots, x_n\}$ es $\varphi$.

Si $r_1, r_2, \dots, r_m \in F(x_1, \dots, x_n)$

$\mathcal{P} = (x_1, \dots, x_n : r_1, \dots r_m)$ es una presentación de grupo.

El grupo que presenta $\mathcal{P}$ es

$$\|\mathcal{P}\| = \|x_1 \dots x_n : r_1, \dots r_n\| = \frac{F(x_1, \dots, x_n)}{\langle\langle r_1, \dots, r_m \rangle\rangle}$$ donde

$\langle\langle r_1, \dots, r_m \rangle\rangle$ es el mínimo subgrupo normal de $F(x_1, \dots, x_n)$ que contiene a $r_1, \dots, r_m$.

La presentación $\mathcal{P}$ es <u>artiniana</u> si $m = n$ y
$r_1 x_1 r_1^{-1} r_2 x_2 r_2^{-1} \cdots r_n x_n r_n^{-1} = x_1 x_2 \cdots x_n$ en $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ej. 1 $\mathcal{A} = (x_1, x_2 : (x_1 x_2)^e x_1^{e_1}, (x_1 x_2)^e x_2^{e_2})$ con $e, e_1, e_2 \in \mathbb{Z}$
es artiniana

Ej. 2 Si $e = -1$, $e_1 = 2$, $e_2 = 3$ $\|\mathcal{A}\|$ es trivial

Ej. 3 Si $e = 2$, $e_1 = 3$, $e_2 = 5$ $\|\mathcal{A}\|$ es no trivial

Sean $r_1, \dots, r_n$ sucesiones finitas de los símbolos $x_1, x_1^{-1}, \dots, x_m, x_m^{-1}$

El grupo $\| x_1, \dots, x_m : r_1, \dots, r_n \|$ es el grupo más grande[1] $G$

(*) generado por elementos $x_1, \dots, x_m$ tales que $r_j = 1$ en el grupo ($j = 1, \dots, n$)

(1) Si $G_1$ y $G_2$ satisfacen (*), $G_1 \geq G_2$ si existe un epimorfismo $\varphi : G_1 \twoheadrightarrow G_2$ tal que $\varphi(x_i) = x_i$ ($i = 1, \dots, m$).

$F(x_1, \dots, x_n) := \| x_1, \dots, x_n : \ \|$ es el grupo libre de rango $n$.

$(x_1, \dots, x_m : r_1, \dots, r_n)$ es una presentación del grupo $\| x_1, \dots, x_m : r_1, \dots, r_n \|$. Es artiniana si $m = n$ y

$$r_1 x_1 r_1^{-1} r_2 x_2 r_2^{-1} \cdots r_n x_n r_n^{-1} = x_1 x_2 \cdots x_n \quad \text{en } F(x_1, \dots, x_n)$$

Ej. 1 $\quad \mathcal{a} = (x_1, x_2 : (x_1 x_2)^e x_1^{e_1}, (x_1 x_2)^e x_2^{e_2}$ con $e, e_1, e_2 \in \mathbb{Z}$

es artiniana

Si $e = -1, e_1 = 2, e_2 = 3$ $\quad \| \mathcal{a} \|$ es trivial

Si $e = -2, e_1 = 3, e_2 = 5$ $\quad \| \mathcal{a} \| \approx SL(2, 5)$

**Ejercicio 1.** Si $G = \| x_1,\dots,x_m : r_1,\dots,r_n \|$ y $Q = (q_{ij})$ es la matriz entera $n \times m$ donde $q_{ij}$ = suma de exponentes de $x_j$ en $r_i$ entonces $\frac{G}{G'}$ ($G$ abelianizado) está presentado por $Q$, es decir

$$\frac{G}{G'} \approx \frac{\mathbb{Z}^m}{\text{subgrupo generado por los renglones de } Q}$$

**Ejercicio 2.** En el Ej. 1 suponga $m=n$. Entonces $G/G'$ es trivial si y solo si $\det Q = \pm 1$.

**Ejercicio 3.** Probar que $\| x_1, x_2, x_3 : x_1 x_2 x_3 x_2^{+1} x_3^{-1} x_2^{-1}, x_1 x_2 x_3, x_2 x_2 \|$ es trivia

**Ejercicio 4.** Probar que $\| x_1, x_2 : (x_1x_2)^{-2} x_1^3, (x_1x_2)^{-2} x_2^5 \|$ no es trivial pero que su abelianización lo es

sugerencia para la 1ª parte: hallar en $S_5$ una permutación $X_1$ de orden 3 y una $X_2$ de orden 5 tal que $X_1X_2$ es de orden 2.

Otra sugerencia para la 1ª parte: Hallar en $Sl(2,5)$, el grupo de matrices $2\times 2$ con entradas en $\mathbb{Z}_5$ y determinante 1, una matriz $X_1$ y una matriz $X_2$ tales que

$$-I = X_1^3 = X_2^5 = (X_1X_2)^2$$

Ej. 5 Sean $e_1,\dots,e_n \in \mathbb{Z}$. Probar que $(x_1,\dots,x_n : r_1,\dots,r_n)$ es artiniana si y solo si $(x_1,\dots,x_n : r_1 x_1^{e_1},\dots,r_n x_n^{e_n})$ lo es.

Ej. 6 Sean $e \in \mathbb{Z}$ y $w = \prod_{i=1}^{n} x_i$. Probar que $(x_1,\dots,x_n : r_1,\dots,r_n)$ es artiniana si y solo si $(x_1,\dots,x_n : w^e r_1,\dots,w^e r_n)$ lo es.

Ej. 7 ¿Es $(x_1, x_2, x_3 : x_1x_2x_3,\ x_1x_2x_1,\ x_1x_2x_1$ artiniana?

Ej. 8 ¿Es $(x_1, x_2, x_3 : x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1},\ x_3^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1},\ x_3^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1x_2)$ artiniana?

Grupo fundamental de un espacio $X$

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ $\quad * \in X$

Sean $\alpha, \beta : (S^1, 1) \to (X, *)$ continuas (2 lazos basados en $*$)

l producto $\alpha\beta : (S^1, 1) \to (X, *)$ está definido por

$$\alpha\beta(z) = \begin{cases} \alpha(z^2) & \text{si } \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \beta(z^2) & \text{si } \operatorname{Im} z \leq 0 \end{cases}$$

l inverso de $\alpha$ está definido por $\alpha^{-1}(z) = \alpha(z^{-1})$

$\alpha \sim \beta$ si $\alpha^{-1}\beta$ se extiende a una función continua de $D^2$ $(= \{z \in \mathbb{C} : \|z\| \leq 1\})$ en $X$.

El conjunto de clases de equivalencia de lazos basados en $*$ es el grupo fundamental $\pi(X, *)$ : el producto y la inversión están definidos por

$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$ , $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$.

Si $X$ es conectable por trayectorias $\pi(X, *)$ no depende de $*$ : $\pi(X, *) \approx \pi(X, *')$ $\quad *, *' \in X$.
En tal caso se escribe $\pi(X)$ en vez de $\pi(X, *)$.

Si $X \approx Y$ y $X$ es conectable por trayectorias entonces $\pi(X) \approx \pi(Y)$

Ejemplos $\pi(\mathbb{R}^n) = 1$ (el grupo trivial)

$\pi(D^n) = 1$

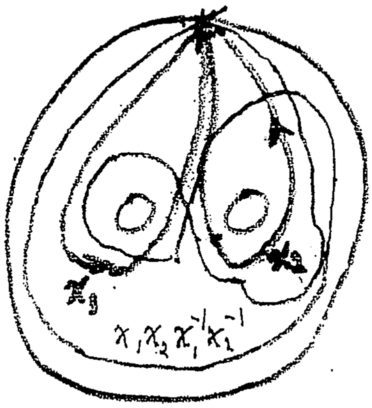
$\pi(S^n) = 1$ si $n > 1$

$\pi(S^1) = \mathbb{Z}$

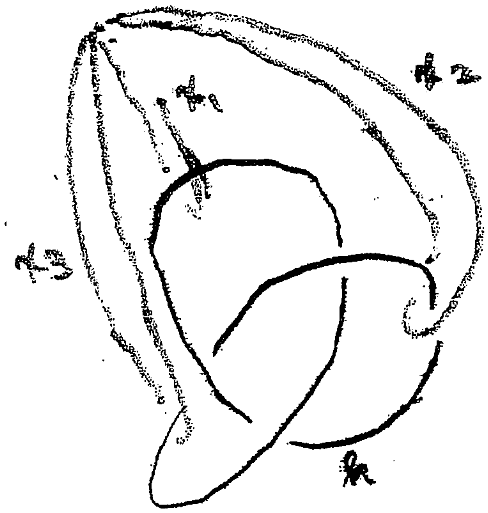
Si $X$ y $Y$ son 0-conexos (= conectables por trayectorias)
$X \times Y$ también lo es y $\pi(X \times Y) = \pi(X) \times \pi(Y)$
Por ejemplo $\pi(S^1 \times S^1) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\quad \pi(W \times [0,1]) \approx \pi(W)$

$\pi$(2-disco con $n$ agujeros) $\approx F(x_1, \ldots, x_n)$

$X$ es 1-conexo si es 0-conexo y $\pi(X) = 1$.




$\pi$(disco con 2 agujeros)
$\simeq \| x_1, x_2 : \quad \|$




$\pi(S^3 - k) = \| x_1, x_2, x_3 : x_1^{-1}x_2x_1x_3^{-1}, x_3^{-1}x_1x_3 \|$
$\simeq \| a, b : a^3b^{-2} \|$

Teorema de Seifert-VanKampen. Supongamos que $X = A \cup B$ donde $A$, $B$ y $A \cap B$ son abiertos* 0-conexos y que $\pi(A,*) = \| x_1, \dots, x_m : r_1, \dots \|$, $\pi(B,*) = \| y_1, \dots y_n : s_1, \dots \|$, $\pi(A \cap B, *) = \| z_1, \dots, z_p : \dots \|$ donde $* \in A \cap B$.
Sea $\gamma_i$ lazo en $A \cap B$ que representa a $z_i$ y sea $u_i$ (resp. $v_i$) palabra en $x_1, \dots, x_m$ (resp. $y_1, \dots, y_n$) que representa $\gamma_i$ $(i = 1, \dots, p)$. Entonces

$$\pi(X,*) = \| x_1, \dots, x_m, y_1, \dots y_n : r_1, \dots, s_1, \dots, u_1 v_1^{-1}, \dots, u_p v_p^{-1} \|$$

Corolario 1. En el caso en que $B$ y $A \cap B$ son 1-conexos $\pi(X) \simeq \pi(A)$

Corolario 2. En el caso en que $B$ es 1-conexo y $\pi(A \cap B) = \| z_1 : \dots \|$,

$$\pi(X) = \| x_1, \dots, x_m : r_1, \dots, u_1 \|$$

* "casi siempre" el teorema es también válido si $A$ y $B$ son cerrados.

Ejemplo $\mathfrak{a} = (x_1, x_2 : (x_1 x_2)^{-2} x_1^{3}, (x_1 x_2)^{-2} x_2^{7})$

$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_2^{-1}$, $Q_2^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ así que $U = \{1,2\}$

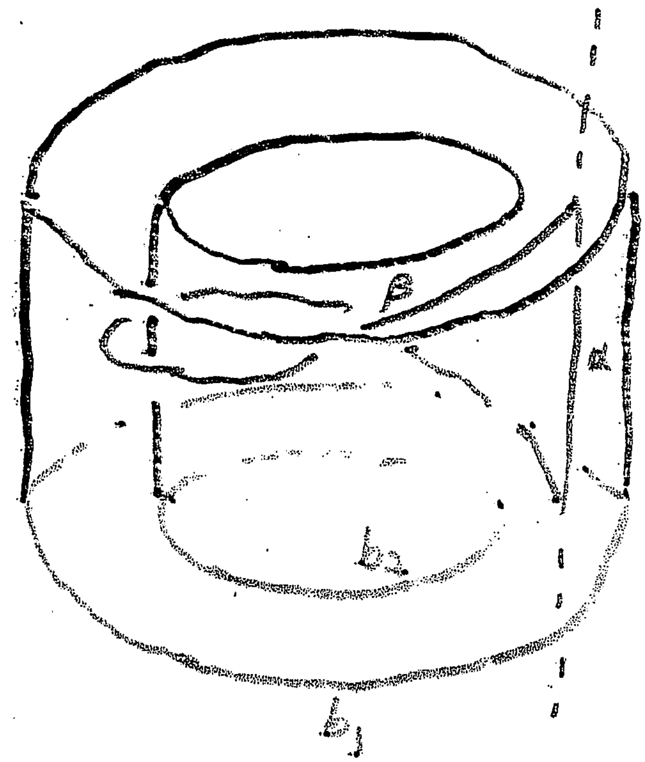
y la $U$-reducción de $\mathfrak{a}$ es $a$, es decir

$$(y_1, y_2 : (y_1 y_2)^{-2} y_1^{3}, (y_1 y_2)^{-2} y_2^{7})$$

grupo de nudo: $(y_1, y_2 : (y_1 y_2)^{-2} y_1 (y_1 y_2)^{2} = y_2)$

y el determinante es $d = 3$.

$$\mu(M(a)) = \frac{2 - 2 + 9 - 1}{16} = \frac{1}{2} \mod 1$$




$Q \times [0,1]$

$Q$ = anillo

Jugada anular

$\alpha \longleftrightarrow \beta \cup b \cup b$

El arco vertical $\alpha$ se reemplaza por $\beta \cup \partial Q$ donde $\beta$ es un arco en $Q \times [0,1]$ cuya "proyección vertical" es $\alpha$ y cuya proyección horizontal es la circunferencia media de $Q$.

Si $T=\bigcup_{i=1}^{n} a_i$ es un diagrama de pretripas en $W_n$ y $\tau_i \in F_n$ es la palabra asociada a $a_i$ decimos que $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)\in F_n^n$ es <u>la n-ada asociada</u> a $T$.

Teorema. Sean $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)\in F_n^n$ y $\mu$ una permutación de $\{1,\dots,n\}$. $\tau$ es la n-ada asociada a un diagrama de pretripas de tipo $\mu$ en $W_n$ si y solo si

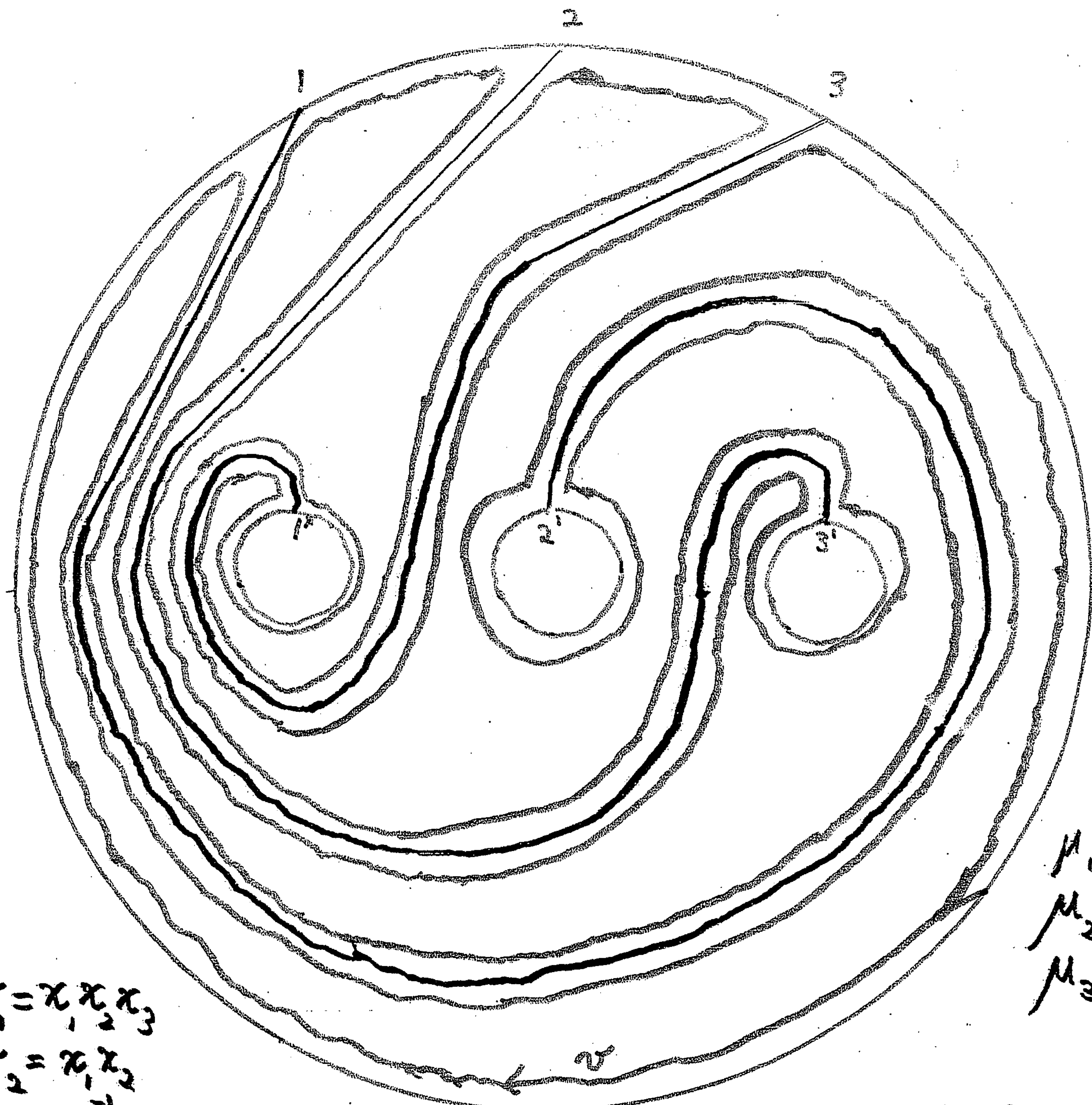
$$(A) \qquad \prod_{i=1}^{n} \tau_i x_{\mu_i} \tau_i^{-1} = \prod_{i=1}^{n} x_i \quad \text{en } F_n.$$

Corolario. $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)\in F_n^n$ es la n-ada asociada a un diagrama de tripas en $W_n$ si y solo si

$$\prod_{i=1}^{n} \tau_i x_i \tau_i^{-1} = \prod_{i=1}^{n} x_i \quad \text{en } F_n$$

(es decir, si y solo si $(x_1,\dots,x_n : \tau_1,\dots,\tau_n)$ es una presentación artiniana)

Demostración (Necesidad). Sea $T$ un diagrama de pretripas de tipo $\mu$




$\mu_1 = 2$
$\mu_2 = 3$
$\mu_3 = 1$

$\tau_1 = x_1 x_2 x_3$
$\tau_2 = x_1 x_2$
$\tau_3 = x_1^{-1}$

Si $N$ es vecindad regular de $(\partial W_n) \cup T$ entonces $\partial N = (\partial D^2) \cup v$ donde $v$ bordea un disco contenido en $W_n$ así que $[v] = 1 \in \pi W_n = F_n$. Como $v$ representa a $x_n^{-1} \cdots x_2^{-1} x_1^{-1} \tau_1 x_{\mu_1} \tau_1^{-1} \cdots \tau_n x_{\mu_n} \tau_n^{-1}$ se sigue que

$$\prod_{i=1}^{n} \tau_i x_{\mu_i} \tau_i^{-1} = \prod_{i=1}^{n} x_i .$$

(Suficiencia). Podemos suponer que $\tau_i$ es reducida $\forall i$.

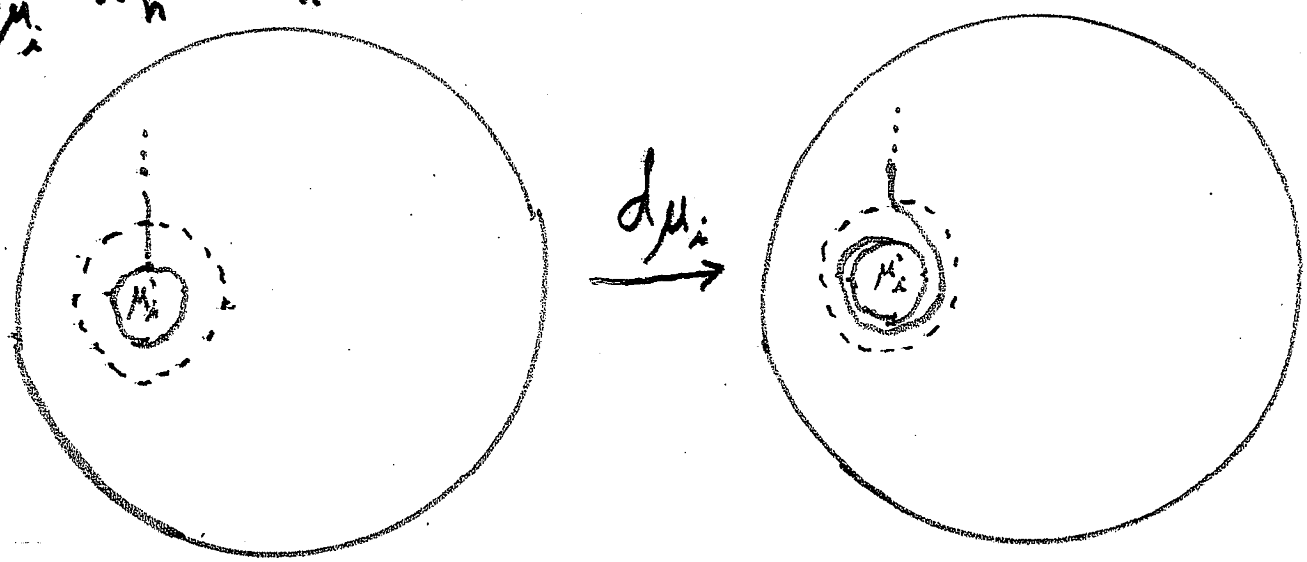
Definimos la longitud de $\tau$ como $\lambda(\tau)=\lambda(\tau_1,\dots,\tau_n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda(\tau_i)$

Probaremos, por inducción en $\lambda(\tau)$ que si $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$ satisface (A) entonces $\tau$ es la $n$-ada de una pretripa tipo $\mu$.

1er Caso: Alguna $\tau_i$ es de la forma $\hat{\tau}_i x_{\mu_i}^{e_i}$ con $e_i \neq 0$.

Si sustituimos, en $\tau$, dicha $\tau_i$ por $\hat{\tau}_i$ (A) también se satisface y $\hat{\tau}=(\tau_1,\dots,\hat{\tau}_i,\dots\tau_n)$ tiene longitud menor que $\lambda(\tau)$ así que, por inducción, existe $\hat{T}$, diagrama de pretripas tipo $\mu$, cuya $n$-ada asociada es $\hat{\tau}$.

Sea $d_{\mu_i}: W_n \longrightarrow W_n$ un giro de Dehn en $\partial B(c_{\mu_i},\varepsilon)$:




Entonces $T := d_{\mu_i}^{e_i}(\hat{T})$ es un diagrama de pretripas tipo $\mu$ con $n$-ada $(\tau_1,\dots,\tau_i,\dots,\tau_n)$.

2° Caso: Ninguna $\tau_i$ es de la forma $\hat{\tau}_i x_{\mu_i}^{e_i}$ con $e_i \neq 0$, es decir para toda $i$, $\tau_i x_{\mu_i} \tau_i^{-1}$ es reducida.

Afirmación: Para alguna $i$

$\tau_i x_{\mu_i}^{-1}$ es segmento inicial de $\tau_{i+1}$

o $\tau_i x_{\mu_i}^{+1}$ es segmento inicial de $\tau_{i-1}$

Prueba de la afirmación: Supongámosla Falsa. Entonces si en la subpalabra de $\prod_{i=1}^{n} \tau_i x_{\mu_i} \tau_i^{-1}$ $\quad \tau_j x_{\mu_j} \tau_j^{-1} \cdot \tau_{j+1} x_{\mu_{j+1}} \tau_{j+1}^{-1}$

comenzamos a cancelar a partir del punto $\cdot$, no llegamos a cancelar $x_{\mu_j}$ ni $x_{\mu_{j+1}}$. Esto implica que la reducción de la palabra $\prod_{i=1}^{n} \tau_i x_{\mu_i} \tau_i^{-1}$ es de la forma $\tau_1 x_{\mu_1} v_1 x_{\mu_2} v_2 \cdots x_{\mu_n} \tau_n^{-1}$ con $v_i = \tau_i^{-1} \tau_{i+1}$. La única manera en que esta palabra sea $x_1 x_2 \cdots x_n$ es si $1 = \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_n$ y $\mu_i = i$ $\forall i$ lo cual es imposible pues $\lambda(\tau_1, \ldots, \tau_n) > 0$.

Supongamos que $\tau_j x_{\mu_j}^{-1}$ es segmento inicial de $\tau_{j+1}$,
es decir $\tau_{j+1} = \tau_j x_{\mu_j}^{-1} \tilde{\tau}_{j+1}$ reducida, así que
$\lambda(\tilde{\tau}_{j+1}) = \lambda(\tau_{j+1}) - \lambda(\tau_j) - 1$.

Definimos $\hat{\tau} = (\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_n)$ como sigue:

$$\hat{\tau}_i = \tau_i \quad \text{si } i \notin \{j, j+1\}$$

$$\hat{\tau}_j = \tau_j \tilde{\tau}_{j+1}$$

$$\hat{\tau}_{j+1} = \tau_j$$

Nótese que $\lambda(\hat{\tau}_j) \leq \lambda(\tau_j) + \lambda(\tilde{\tau}_{j+1}) = \lambda(\tau_{j+1}) - 1$ por lo que

$$\lambda(\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_n) < \lambda(\tau_1, \dots, \tau_n).$$

Si $\hat{\mu} = \mu \circ \lambda_j$ donde $\lambda_j$ es la transposición $(j, j+1)$

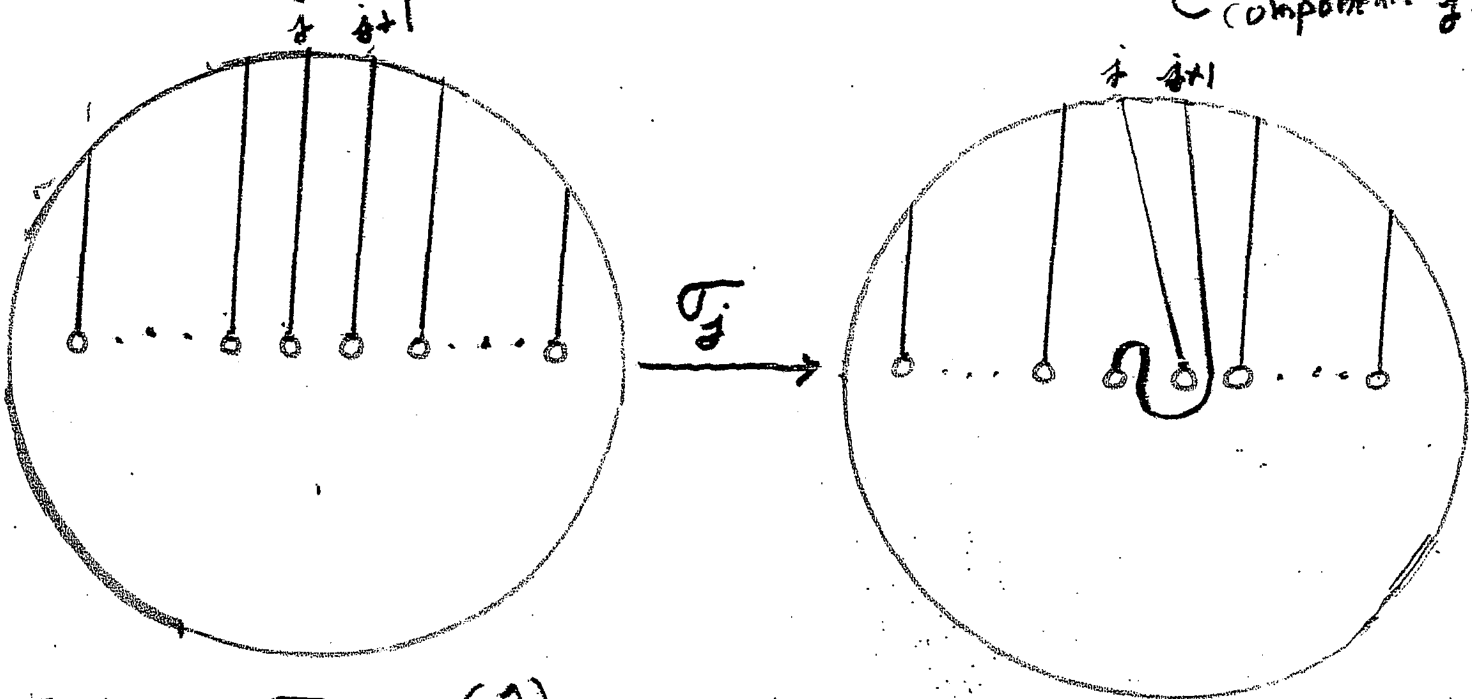
$$\prod_{i=1}^{n} \hat{\tau}_i x_{\hat{\mu}_i} \hat{\tau}_i^{-1} = \Big(\prod_{i<j} \tau_i x_{\mu_i} \tau_i^{-1}\Big) \cdot \tau_j \tilde{\tau}_{j+1} x_{\mu_{j+1}} \tilde{\tau}_{j+1}^{-1} \tau_j^{-1} \cdot \tau_j x_{\mu_j} \tau_j^{-1} \cdot \prod_{i>j+1} \tau_i x_{\mu_i} \tau_i^{-1} =$$

$$\Big(\prod_{i<j} \tau_i x_{\mu_i} \tau_i^{-1}\Big) \cdot \tau_j x_{\mu_j} \tau_j^{-1} \tau_{j+1} x_{\mu_{j+1}} \tau_{j+1}^{-1} \tau_j x_{\mu_j}^{-1} \tau_j^{-1} \cdot \tau_j x_{\mu_j} \tau_j^{-1} \cdot \prod_{i>j+1} \tau_i x_{\mu_i} \tau_i^{-1} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \tau_i x_{\mu_i} \tau_i^{-1} = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Por inducción existe $\hat{T}$, diagrama de pretripas tipo $\hat{\mu}$ cuya n-ada es $\hat{\tau}$.

Sea $\sigma_j \in \mathcal{B}_n$ el homeomorfismo indicado en la figura (la n-ada asociada a $\sigma_j(T_0)$ es $(1,\dots,1,x_{j+1}^{-1},1,\dots,1)$ )
componente $j+1$




Entonces $T := \sigma_j(\hat{T})$ es un diagrama de pretripas tipo $\cancel{\mu}$, cuya n-ada es $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_n)$.

El caso en que $\tau_j x_{\mu_j}$ es segmento inicial de $\tau_{j-1}$ es análogo: definiendo $\hat{\tau}_{j-1} = \tau_j$, $\hat{\tau}_j = \tau_j x_{\mu_j}^{-1} \tau_j^{-1} \tau_{j-1}$ y $\hat{\tau}_i = \tau_i$ si $i \notin \{j-1, j\}$ se ve que $\lambda(\hat{\tau}) < \lambda(\tau)$ y $\prod_{i=1}^{n} \hat{\tau}_i x_{\hat{\mu}_i} \hat{\tau}_i^{-1} = \prod_{i=1}^{n} x_i$, donde $\hat{\mu} = \mu \circ \lambda_{j-1}$, así que, por inducción, existe $\hat{T}$, diagrama de pretripas tipo $\hat{\mu}$ con n-ada $\hat{\tau}$ y que $T := \sigma_{j-1}^{-1}(\hat{T})$ es de tipo $\mu$ con n-ada $\tau$.

Ej. 1 Si $G = \| x_1, \ldots, x_m : r_1, \ldots, r_n \|$ y $Q = (q_{ij})$ es la matriz entera $n \times m$ donde $q_{ij}$ = suma de exponentes de $x_j$ en $r_i$ entonces $G/G'$ ($G$ abelianizado) es isomorfo a $\frac{\mathbb{Z}^m}{\langle q_1, \ldots, q_n \rangle}$ donde $q_i$ es el renglón $i$ de $Q$ y $\langle \ldots \rangle$ significa "subgrupo generado por ..."

Solución: Sea $\varphi : F(x_1, \ldots, x_m) \longrightarrow \mathbb{Z}^m$ epimorfismo tal que $\varphi(x_i) = e_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ . Entonces

$1$ componente $i$

$$\varphi(r_j) = q_{j1} e_1 + q_{j2} e_2 + \ldots + q_{jm} e_m = q_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Luego $\langle\langle r_1, \ldots, r_n \rangle\rangle = \langle \bigcup_{j=1}^{n} (\text{conjugados de } r_j) \rangle = \varphi^{-1}(\langle q_1, \ldots, q_n \rangle)$ (Pruébelo)

así que $\| x_1, \ldots, x_m : r_1, \ldots, r_n \| = \frac{F(x_1, \ldots, x_m)}{\langle\langle r_1, \ldots, r_n \rangle\rangle} \approx \frac{\mathbb{Z}^m}{\langle q_1, \ldots, q_n \rangle}$

—o—

Ej. 2 En el Ej. 1 suponga $m = n$. Entonces $\frac{G}{G'} = 1$ sii $\det Q = \pm 1$

Solución. Por el Ej. 1 tenemos que probar que $\frac{\mathbb{Z}^n}{\langle q_1, \ldots, q_n \rangle} = 1$ sii $\det Q = \pm 1$.

$$\frac{\mathbb{Z}^n}{\langle q_1, \ldots, q_n \rangle} = 1 \Longleftrightarrow \langle q_1, \ldots, q_n \rangle = \mathbb{Z}^n$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \text{ para alguna matriz entera } n \times n \ X$$

$$\Longleftrightarrow \quad Q \cdot X = I \quad \text{" " " " " "}$$

Ahora bien $Q \cdot X = I$, con $X$ entera $\Rightarrow (\det Q)(\det X) = \det I = 1 \Rightarrow \det Q = \pm 1$

y $\det Q = \pm 1 \Rightarrow Q^{-1} = \frac{\operatorname{adj} Q}{\det Q} := X$ es entera

—o—

Ej. 3 Probar $G = \| x_1, x_2, x_3 : x_1 x_2 x_3 x_2 x_3^{-1} x_2^{-1},\ x_1 x_2 x_3,\ x_2 x_3 \| = 1$

Solución: Como $x_1 x_2 x_3 = 1 = x_2 x_3$ se sigue que $x_1 = 1$

Como $x_1 x_2 x_3 x_2 x_3^{-1} x_2^{-1} = 1 = x_1 x_2 x_3 = (x_2 x_3)^{-1}$ se sigue que $x_2 = 1$

Como $x_2 x_3 = 1$ y $x_2 = 1$ se sigue que $x_3 = 1$

Luego $G$, generado por $x_1$, $x_2$ y $x_3$, es trivial.

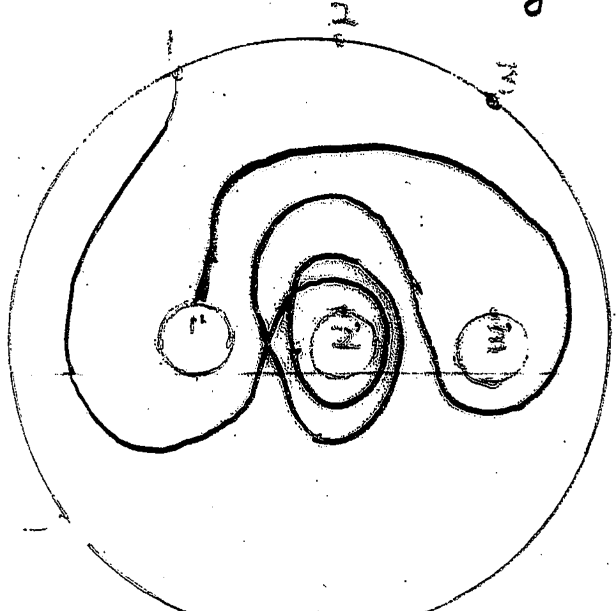
Ej 4. Probar que $G := \| x_1, x_2 : (x_1 x_2)^{-2} x_1^3,\ (x_1 x_2)^{-2} x_2^5 \|$ no es trivial pero que su abelianización lo es.

Solución: En el grupo alternante de 5 símbolos $A_5$ sean $X_1 = (142)$ y $X_2 = (12345)$. Entonces $X_1 X_2 = (15)(34)$ así que $(X_1 X_2)^{-2} X_1^3 = 1 = (X_1 X_2)^{-2} X_2^5$

Luego $G$ no es trivial.

$Q = (q_{ij})$, definida en el Ej 1, es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, que tiene determinante $-1$, así que por el Ej 1 $G/G' = 1$.

A cada trayectoria (posiblemente con intersecciones) de $i$ a $j$ $(i=1,2,\dots)$ se le asocia una palabra (= sucesión finita) en los símbolos $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}$ (donde $n$ es el número de agujeros)




palabra asociada al ~~arco~~ de la Figura

$$r_1 = x_1 x_2^{-1} x_2^{-1} x_3 = x_1 x_2^{-2} x_3$$

— o —

Problema: Dadas $n$ palabras $r_1, r_2, \dots r_n$ decidir si existen en $W_n^2$ $n$ trayectorias simples disjuntas de 1 a 1', de 2 a 2', ..., de $n$ a $n'$ cuyas palabras asociadas sean respectivamente $r_1, r_2, \dots, r_n$

A 0.5

ESQUEMA DE LA PRUEBA, POR INDUCCIÓN EN $\lambda(\tau)$, DEL TEOREMA

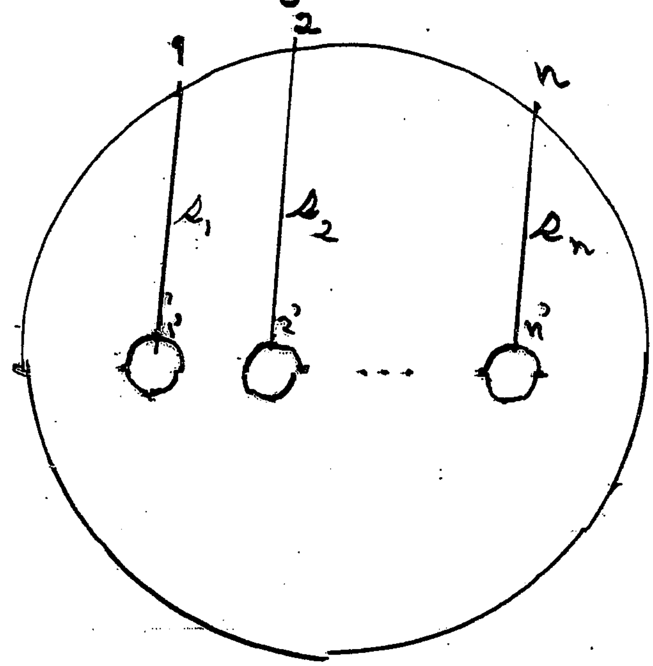
1. Se define $\hat{\tau}$ una modificación "adecuada" de $\tau$, con $\lambda(\hat{\tau})<\lambda(\tau)$, y que satisface (A), la ecuación de Artin.
2. Se considera $\hat{T}$ diagrama de pretripas con $n$-ada $\hat{\tau}$ (existe por inducción)
3. Si $h$ es un homeomorfismo "adecuado" (un giro de Dehn fronterizo o un semigiro de Dehn) $T:=h(\hat{T})$ tiene $n$-ada $\tau$.

A 1.5

Consideramos $W_n = D^2 - \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{B}(c_i, \varepsilon)$

con $c_i = \left(-1+\frac{2i}{n+1}, 0\right)$, $\varepsilon = \frac{1}{2(n+1)}$

el 2-disco con $n$ agujeros




Denotamos con $i$ $(1 \leq i \leq n)$ el punto de $\partial D^2$ con abscisa $-1+\frac{2i}{n+1}$ y ordenada positiva y con $\hat{i}$ el punto de $\partial B(c_i, \varepsilon)$ de máxima ordenada.

Sean $s_i$ el segmento que une $i$ con $\hat{i}$ y $T_0 = \bigcup_{i=1}^{n} s_i$.

A 0