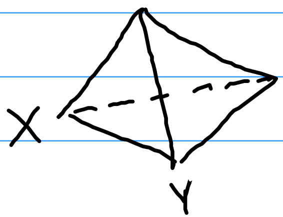
TC y teoría de obstrucción.

Recordemos $TC(X) = \text{secat}(e : X^{[0,1]} \to X \times X)$

Plan: 1. reducir un problema de multiseccionamiento
o uno de monoseccionamiento
2. aplicar teoría de homotopía a éste último

Junta de espacios

$$X * Y = X \times [0,1] \times Y \Big/ \begin{array}{l} (x,0,y) \sim (x,0,y') \\ (x,1,y) \sim (x',1,y) \end{array}$$



$= X * Y$

Para espacios con puntos base no degenerados:

$$X * Y \simeq X * Y \Big/ X * y_0 \cup Y * x_0$$

$$= \{(x,t,y) \in X \times [0,1] \times Y\} \Big/ \begin{array}{l} (x,0,y) \sim (x,0,y') \\ (x,1,y) \sim (x',1,y) \\ (x,t,y_0) \sim * \\ (x_0,t,y) \sim * \end{array}$$

$$= X \times Y \times \frac{[0,1]}{0 \sim 1} \Big/ \text{ejes} = X \wedge S^1 \wedge Y$$

En particular :

$$\mathrm{emp}(X * Y) \geq \mathrm{emp}(X) + \mathrm{emp}(Y) + 1$$

Y por inducción :

$$\mathrm{emp}(X_1 * \cdots * X_r) \geq \sum \mathrm{emp}(X_i) + r - 1$$

Es decir :

$$\mathrm{conn}(X_1 * \cdots * X_r) \geq \sum \left(\mathrm{conn}(X_i) + 1\right) + r - 2$$

$$= \sum \mathrm{conn}(X_i) + 2(r-1)$$

Junta de fibraciones

$p_0 : E_0 \to B \qquad p_1 : E_1 \to B$

$$E_0 *_B E_1 = \frac{\{(x_0, t, x_1) \in E_0 \times [0,1] \times E_1 \mid p_0(x_0) = p_1(x_1)\}}{\begin{matrix}(x_0, 0, x_1) \sim (x_0, 0, x_1') \\ (x_0, 1, x_1) \sim (x_0', 1, x_1)\end{matrix}}$$

$$\downarrow p_0 *_B p_1$$

$$B$$

$$p_0 *_B p_1 \big((x_0, t, x_1) \big) = p_0(x_0) = p_1(x_1)$$

fibración

$$\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[dr, "p_0"'] & E_0 *_B E_1 \arrow[d, "p_0 *_B p_1"] & E_1 \arrow[l, hook', "i_1"'] \arrow[dl, "p_1"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Def: junta iterada $p(n): E(n) \to B$ de $p: E \to B$

$$p(0) = p \;;\quad p(1) = p *_B p \;;\quad p(2) = p(1) *_B p \;;\; \ldots$$

En vista de:

$$\begin{tikzcd}
E = E(0) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p = p(0)"'] & E(1) \arrow[r, hook] \arrow[dl, "p(1)"] & E(2) \arrow[r, hook] \arrow[dll, "p(2)"] & \cdots \\
B & & &
\end{tikzcd}$$

tenemos:

- $\operatorname{secat}(p(0)) \geq \operatorname{secat}(p(1)) \geq \operatorname{secat}(p(2)) \geq \cdots$
- $\operatorname{secat}(p(0)^* p) \leq \operatorname{secat}(p(1)^* p) \leq \operatorname{secat}(p(2)^* p) \leq \cdots$

— Como $\mathrm{Fibra}(p(n)) = F^{*(n+1)}$ — mas y mas conectiva — los valores estables deberían ser 0 y $\operatorname{secat}(p)$

Ejemplo:

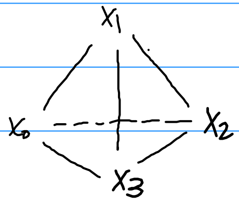
$$E(n) = \frac{\left\{ (t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_n, x_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} p(x_i) = p(x_j) \\ t_i \geq 0 \\ \Sigma t_i = 1 \end{array} \right\}}{(t_0, x_0, \dots, t_n, x_n) \sim (t_0', x_0', \dots, t_n', x_n') \text{ cada vez que } t_k = t_k' = 1 \text{ con } x_k = x_k'.}$$

$$E(n) \xrightarrow{p(n)} B$$

$$B \xleftarrow{\;p\;} E \xleftarrow{\;s_i\;} U_i = \{ (t_0, \dots, x_n) \mid t_i > 0 \}$$

$$x_i \leftarrow\!\!\shortmid \ (t_0, \dots, x_n)$$

$$0 \leq i \leq n$$



$$\operatorname{secat}(p(n)^*p) \leq \min(n, \operatorname{secat}(p))$$

Así

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dashed] \arrow[d, "p"] & p(n)^*B \arrow[r] \arrow[d, "p(n)^*p"] & E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, dashed] & E(n) \arrow[r, "p(n)"'] & B \end{tikzcd}$$

n+1 secciones locales

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{secat}(p) \leq \min\{n \mid \operatorname{secat}(p(n)) = 0\}$$

Recíprocamente, si (s_i, U_i) $i = 0, \dots, n$ son secciones locales de p, tomamos una partición de 1 $t_0, \dots, t_n : B \to [0,1]$ subordinada a $\{U_i\}$ para obtener la sección de $p(n)$ $b \to (t_0(b), s_0(b), \dots, t_n(b), s_n(b))$

Proposición

$$\operatorname{secat}(p) = \text{primer } n \text{ con } \operatorname{secat}(p(n)) = 0$$

De hecho:

- $\operatorname{secat}(p(n)) = \left[\dfrac{\operatorname{secat}(p)}{n+1}\right]$
- $\operatorname{secat}(p(n)^* p) = \min(n, \operatorname{secat}(p))$

Corolario: $f : X \to B$ satisface $\operatorname{secat}(f^* p) \leq n$ ssi f factoriza por $E(n) \xrightarrow[p(n)]{} B$

$\Leftarrow$: obvio.

$\Rightarrow$: $(f^* p)(n) = f^*(p(n))$ tiene una sección

El corolario es particularmente importante (ver def)
Por lo pronto la proposición completa el paso 1 del plan:

multiseccionamiento $\rightsquigarrow$ monoseccionamiento

<u>Def</u>: • $p: E \to B$
• h = cohomología generalizada
• $x \in h^*(B)$

$$W(x) = W_{p,h}(x) \geq n \overset{\text{def}}{\iff} p(h-1)^*(x) = 0 \overset{\text{cor}}{\iff} f^*(x) = 0 \quad \forall f: X \to B \text{ con } \mathrm{secat}(f^*p) < n$$

Relevancia: mejorar $cl(p) \leq \mathrm{secat}(p)$
↳ factores con $w \geq 1$ en un prod $\neq 0$

Prop • $x_1, \dots, x_k \in h^*(B)$ con $x_1 \cdots x_k \neq 0$
• $p : E \to B$ fibración

$$\Rightarrow \operatorname{secat}(p) \geq \sum_{i=1}^{k} w(x_i) = \ell$$

Dem De otro modo tendríamos cub $\{U_1, \dots, U_\ell\}$ con secciones locales

W_1 = unión de los primeros $w(x_1)$ U's
W_2 = unión de los siguientes $w(x_2)$ U's

$\Rightarrow$ $W_i \overset{j_i}{\hookrightarrow} B$ tiene $\operatorname{secat}(j_i^* p) < w(x_i)$

$\Rightarrow$ $0 \leftarrow x_i$ ... y continuamos como antes...

Ejemplo: pesos en espacios de Eilenberg-MacLane

Parte II del plan: teoría de obstrucción.

Torres de Moore-Postnikov: reconstrucción homotópica de $f: X \to Y$

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] \\
 & Z_{n+1} \arrow[d] \\
 & Z_n \arrow[d] \\
 & \vdots \arrow[d] \\
 & Z_2 \arrow[d] \\
 & Z_1 \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "f_1"] \arrow[uur, "f_2"] \arrow[uuuur, "f_n"] \arrow[uuuuur, "f_{n+1}"] & Y
\end{tikzcd}$$

- $X \to Z_n$ es n-equivalencia
  ie π_i-iso en $i<n$
  π_i-epi en $i=n$

- $Z_n \to Y$ es n-coequivalencia
  ie π_i-iso en $i>n$
  π_i-epi en $i=n$
  mono

- $K(\pi_n F, n) \to Z_{n+1} \to Z_n$
  fibración

Las dos primeras condiciones implican

- $Z_{n+1} \longrightarrow Z_n$ es π_n-epi, π_{n+1}-mono, π_i-iso $i \neq \{ {n \atop n+1}$
- La fibra homotópica $F_{n+1} \to Z_{n+1} \to Z_n$ tiene
  - $\pi_i(F_{n+1}) = 0 \quad i \neq n$
  - sucesión exacta

$$
\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(Z_{n+1}) \arrow[r, hook] & \pi_{n+1}(Z_n) \arrow[r] & \pi_n(F_{n+1}) \arrow[r] & \pi_n(Z_{n+1}) \arrow[r, "epi"] & \pi_n(Z_n) \arrow[d, hook] \\
\pi_{n+1}(X) \arrow[r] \arrow[u, "epi"] & \pi_{n+1}(Y) \arrow[r] \arrow[u, equal] & \pi_n(F) \arrow[r] \arrow[u, equal] & \pi_n(X) \arrow[r] \arrow[u, equal] & \pi_n(Y)
\end{tikzcd}
$$

ie: la fila 1 aísla la parte esencial de la fila 2.

Teorema

Cuando f es simple (i.e. $\pi_1(X)$ actúa trivial en $\pi_*(F)$), cada $Z_{n+1} \to Z_n$ es principal.

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \\
 & Z_{n+1} \arrow[d] & \\
 & Z_n \arrow[r] \arrow[d] & K(\pi_n F, n+1) \\
 & \vdots \arrow[d] & \\
 & Z_2 \arrow[d] & \\
 & Z_1 \arrow[d] & \\
X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "f_1"'] \arrow[uur, "f_2"] \arrow[uuuur, "f_n"] \arrow[uuuuur, "f_{n+1}"] & Y &
\end{tikzcd}
$$

Corolario:

En tales condiciones las obstrucciones para levantar $W \to Y$ a lo largo de f son elementos:

$$w_n \in H^{n+1}(X; \pi_n F)$$

- Para f no simple, la teoría se puede desarrollar

  celularmente — ~~Eilenberg~~ Steenrod, 1950's

  homotópicamente — Robinson, 1972

- Las obstrucciones viven en grupos de cohomología con "coeficientes torcidos."

Corolario: $F \to E \to B$ fibración admite una sección si F es $\dim B - 1$ conexo

Demostración

Las obstrucciones viven en $H^{i+1}(B; \pi_i(F))$ que son grupos $\neq 0$ sólo si $i+1 \leq \dim B \leq i$ ∎

Corolario $F \to E \xrightarrow{p} B$ fibración

$$\Rightarrow \quad \mathrm{secat}(p) \le \frac{\dim(B)}{\mathrm{conn}(F)+2}$$

emp(F)+1

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} \dim(B) = q\,(\mathrm{conn}(F)+2) + r \\ \qquad 0 \le r \le \mathrm{conn}(F)+1 \end{array}\right\}$$

Pero $\mathrm{secat}(p) \le q$ (ie $p(q)$ admite sección):

$$\begin{array}{l} F^{*(q+1)} \\ \downarrow \\ E(q) \\ \downarrow \\ B \end{array} \qquad \mathrm{conn} \ge (q+1)\,\mathrm{conn}(F) + 2q \ge \dim(B) - 1$$

$\blacksquare$

Ejemplos: cotas para cat y TC...

Teorema (Farber–Costa, 2010)

La obstrucción para tener $TC(X) < 2\dim(X)$ vive en

$$H^{2\dim(X)}\left(X \times X;\ \overline{H}_0(\Omega X)^{\otimes 2\dim(X)}\right).$$

Dem

$$TC(X) = \operatorname{secat}(e) < 2\dim X \doteq 2d$$

$$\left(\Omega X \to X^{[0,1]} \xrightarrow{e} X \times X\right)$$

ssi

$e(2d-1)$ tiene una sección

$$(\Omega X)^{*2d} \longrightarrow X^{[0,1]}(2d-1) \longrightarrow X \times X$$

Obstrucciones viven en

$$H^{m+1}\left(X\times X,\ \pi_m\left(\Omega X\right)^{*2d}\right)$$

empieza en $2d-1$

$\therefore \neq 0$ para $m \geqslant 2d-1$

Así que la única obstrucción vive en

$$H^{2d}\left(X\times X;\ \pi_{2d-1}\left(\left(\Omega X\right)^{*2d}\right)\right)$$

con

$$\pi_{2d-1}\left(\left(\Omega X\right)^{*2d}\right) = \pi_{2d-1}\left(\Sigma^{2d-1}\left(\Omega X\right)^{\wedge 2d}\right)$$

$$= \overline{H}_0\left(\left(\Omega X\right)^{\wedge 2d}\right) = \overline{H}_0\left(\Omega X\right)^{\otimes 2d}$$

∎

Farber–Costa de hecho hacen un análisis más detallado de la obstrucción, identificándola con la potencia 2d de una clase explícitamente determinada en

$$H^1(X\times X\,;\,\overline{H_0}(\Omega X)).$$

<u>Problema</u>: Resolver la indeterminación

$$3 \leq TC(\text{Klein}) \leq 4$$

analizando el cuadrado de la clase en