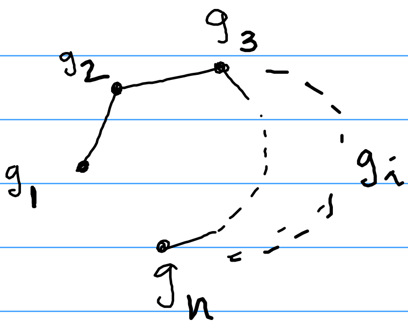
Planeación motriz secuencial: TC_n

- Procesos de producción industrial
- Plantas de ensamblaje
- Distribución y reparto



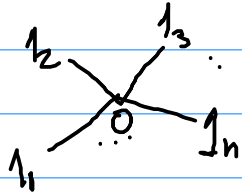
$$
\begin{array}{ccc}
X^{[0,1]} & & \gamma \\
\Big\downarrow e_n & & \Big\downarrow \\
X^n & & \left(\gamma(0), \gamma\left(\tfrac{1}{n-1}\right), \dots, \gamma(1)\right)
\end{array}
$$

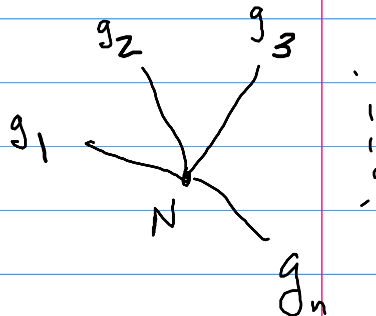
$$TC_n(X) = \text{secat}(e_n)$$

Estrategia: planeación motriz con punto neutro (ventajas en la versión simétrica)

Equivalentemente:

$$J_n = \bigvee_n [0,1]$$





Lema:

$$TC_n(X) = \text{secat}\begin{pmatrix} X^{J_n} \\ \downarrow \\ X^n \end{pmatrix}$$

Generaliza:

$$TC = TC_2$$

TC_n: propiedades y métodos computacionales

- Invariante homotópico

- Subaditivo en productos:

$$TC_n(X \times Y) \leq TC_n(X) + TC_n(Y)$$

- Cotan (dimensión, connectividad, cup-length)

$$\begin{tikzcd}
(\Omega X)^{n-1} \arrow[r] & X^{J_n} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & X^n \\
 & X \arrow[ur, "d_n"'] &
\end{tikzcd}$$

$$cl(d_n) =: zcl_n(X) \le TC_n(X) \le \frac{n \; hdim(X)}{1+conn(X)}$$

óptimos si X es H espacio

$$cat(X) \le TC_2(X) \le cat(X \times X) \le TC_3(X) \le cat(X^3) \le TC_4(X) \le \cdots$$

óptimo si X es variedad simpléctica cerrada 1-conexa

$\Big($ $cat(X^{n-1}) \le TC_n(X)$ pues

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, hook] \arrow[d] & X^{J_n} \arrow[d] \\ X^{n-1} \arrow[r, hook] & X^n \end{tikzcd}$$

$\Big)$

Ejemplos: $TC_n(S^k) \leq n$

- $zcl_n(X \times S^k) \geq zcl_n(X) + n - 1$

En efecto: $v \in H^k(S^k)$ gen; $v_i = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes v \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$

$\Rightarrow v_i - v_1 \in \ker d_n^*$ con $(v_2 - v_1) \cdots (v_n - v_1) = v_2 \cdots v_n + \cdots \neq 0$

Así que si $zcl_n(X) = m$

con $u_1, \ldots, u_m \in H^*(X^n)$, $u_1 \cdots u_m \neq 0$

$u_i|_\Delta = 0$

$\Rightarrow u_1 \cdots u_m (v_2 - v_1) \cdots (v_n - v_1) \neq 0 \in H^*((X \times S^k)^n)$

sobra si k es par y $H^*(X)$ es sin torsión

Ejemplos:

- $zcl_n(X \times S^k) \geq zcl_n(X) + n - 1$

En efecto:

$v_1 + \cdots + v_{n-1} - (n-1)v_n \in \operatorname{Ker} d_n^*$ tiene

$(v_1 + \cdots + v_{n-1} - (n-1)v_n)^n =$ múltiplo no cero de $v_1 \cdots v_n$

<u>Proposición</u>: $TC_n(S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_r}) = r(n-1) + e$

donde $e = \#$ de esferas de dim par

En particular, para un brazo mecánico con k goznes libres $TC_n = \begin{cases} k(n-1) & \text{caso plano} \\ kn & \text{espacial} \end{cases}$

Demostración: Basta ver $TC_n(S^k) \leq n-1$ si k es impar

$$\begin{tikzcd} (S^k)^{J_n} \arrow[r, "e_n"] & (S^k)^n \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

sección no continua

$$s(x_1, \dots, x_n) = \big(g(x_1, x_1),\ g(x_1, x_2), \dots, g(x_1, x_n)\big)$$

$g(x,y)$ = geodésica de x a y (saliendo en la dirección de un campo tangente $\neq 0$ si $y = -x$)

- Continua en cada estrato $M_i - M_{i-1}$ de $M_0 \subset \cdots \subset M_{n-1}$
  $M_i = \{(x_1, \dots, x_n) :$ a lo más i igualdades $x_i = -x_1\}$

- Cada estrato $M_i - M_{i-1}$ es subvariedad
  $\therefore$ $s|_{M_i - M_{i-1}}$ determina una sección en una vecindad tubular de $M_i - M_{i-1}$

<u>Problema</u>: Calcular / Relacionar. $TC_n(X)$ para otras familias de espacios.

(sesión 5...)

Otros ejemplos

- $TC_n(M^{2m}) = mn$

  ↳ variedad cerrada simpléctica 1-conexa

- $TC_n(\mathbb{H}P^m) = nm$

Eficiencia en la planeación motriz secuencial

- Estados parciales todos distintos
- No hay orden preferido en los estados parciales

Estrellas orientadas en X Estrellas en X

$$\begin{tikzcd}
X^{J_n} \arrow[d, "e_n"'] & S^+(X,n) \arrow[l, hook'] \arrow[r] \arrow[d, "e_n"'] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_n"] & S(X,n) \arrow[d, "\varepsilon_n"'] \\
X^n & F(X,n) \arrow[l, hook'] \arrow[r] & B(X,n)
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{TC_n^s(X) = \mathrm{secat}\,(\varepsilon_n)}$$

(Nótese que:
$TC_1^s(X) = \cancel{\mathrm{cat}(X)}\ 0$
$TC_2^s(X) = TC^s(X) - 1$)

Motivación

<u>Teorema</u> (Smale)

$$\mathrm{gen}\left(\begin{array}{c} F(\mathbb{R}^2, n) \\ \downarrow \\ B(\mathbb{R}^2, n) \end{array}\right) \leq$$ complejidad computacional de algoritmos que aproximan las raices de polynomios complejos de grado n

Ingrediente clave: Topología (homotopía) de $B(\mathbb{R}^2, n)$
(Fuchs, Cohen, Vassiliev, DeConccini-Procesi-Salvetti)

En nuestro caso: $\underline{\hspace{6cm}}$ $B(X, n)$
(topología poco conocida
$X =$ variedad)

Cotas en el caso de Smale:

- $n-\alpha_p(n) \leq \operatorname{secat}\left(F(\mathbb{R}^2,n) \xrightarrow{\pi_n^2} B(\mathbb{R}^2,n)\right) \leq n-1$

  Vassiliev $\qquad\qquad$ $\operatorname{hdim}\left(B(\mathbb{R}^2,n)\right) = n-1$

- $\operatorname{secat}(\pi_n^2) = n-1$ si n es potencia de un primo
- $\operatorname{secat}(\pi_6^2) = 4$ (De Concini - Procesi - Salvetti)
- $\operatorname{secat}(\pi_n^2) < n-1$ si $n \neq 2^{\varepsilon} p^{e}$ con $\varepsilon \leq 1$

$\rightsquigarrow$ Se requiere aun mucha info sobre $B(\mathbb{R}^2,n)$ ...

Caso de $\operatorname{secat}\left(S(X,n) \xrightarrow{\pi_n^X} B(X,n)\right) := sc(X,n)$:

$TC_n^S(X)$

- $sc(X,n) = 0$ si X es contráctil

$TC_n^S(X)$

$$
\begin{tikzcd}
X^{J_n} \arrow[d] & S^+(X,n) \arrow[l, hook'] \arrow[r] \arrow[d] & S(X,n) \arrow[d] \\
X^n & F(X,n) \arrow[l, hook'] \arrow[r] \arrow[ul, "H"'] & B(X,n)
\end{tikzcd}
$$

- Siguiente caso: $X = S^k$

<u>Teorema</u> (Basabe–G–Rudyak–Tamaki, 2012)

$$\operatorname{hdim}(F(S^k,n)) = \operatorname{hdim}(B(S^k,n)) = (n-1)(k-1)+1$$

Corolario $\quad sc(S^k, n) \leq n-1 - \dfrac{n-2}{k} \qquad (n \geq 2)$

Óptimo para:

- $sc(S^k, 2) = TC^s(S^k) - 1 = 1$ (Farber-Grant)
- $sc(S^1, n) = 1$ (Basabe-G-Rudyak-Tamaki)
- $sc(S^k, 3) = 1$ for $k \neq 4 \cdot 3^e$, $e \geq 0$ (Karasev-Landweber)

Métodos geométricos (cotas inferiores)...

- El primer caso fué discutido en la sesión del Lunes

- El segundo caso y parte del tercer caso usa:

Lema: $sc(S^k,n)>0$ si k es impar y $n\geq 2$.

Demostración

$$\begin{tikzcd}
(S^k)^{J_n} \arrow[d] & S^+(S^k,n) \arrow[l, hook'] \arrow[r] \arrow[d] & S(S^k,n) \arrow[d] \\
(S^k)^n & F(S^k,n) \arrow[l, hook'] \arrow[r] \arrow[u, bend right, "\sigma"'] & B(S^k,n) \arrow[u, bend right, "s"'] \\
S^k \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto (x, zx, z^2x, \dots, z^{n-1}x)$$

$z=$ n-esima raiz primitiva de 1.

$\sigma=$ levantamiento Σ_n-equivariante de s

Considérese la composición

$$c: S^k \longrightarrow (S^k)^{J_n}$$

$$x \longmapsto (c_j(x))_{j=1,\dots,n}$$

$$c_j(x): [0,1] \longrightarrow S^k$$
$$0 \longrightarrow \gamma(x)$$
$$1 \longrightarrow z^{j-1}x$$

$\mathbb{Z}_n$- equivariancia de σ implica $\quad c_{j+1}(x) = c_j(zx)$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] & (x, zx, \dots, z^{n-1}x) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\rho"] & (c_1(x), \dots, c_n(x)) \arrow[d, "\rho"] \\
zx \arrow[r] & (zx, z^2x, \dots, z^n x) \arrow[r, "\sigma"'] & (c_1(zx), \dots, c_n(zx))
\end{tikzcd}$$

En particular $\gamma(zx) = c_0(zx)(0) = c_1(x)(0) = \gamma(x)$

ie

$$\begin{tikzcd} S^k \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr] & & S^k \\ & L^k(\mathbb{Z}/n) \arrow[ur, "\gamma'"'] & \end{tikzcd}$$

$\therefore$ $gr(\gamma)$ es múltiplo de n. Sin embargo se tiene

$$H : S^k \times [0,1] \longrightarrow S^k$$
$$(x,t) \longmapsto c_1(x)[t]$$

$$\left.\begin{array}{l} H(x,0) = \gamma(x) \\ H(x,1) = x \end{array}\right\} \Rightarrow gr(\gamma) = 1$$

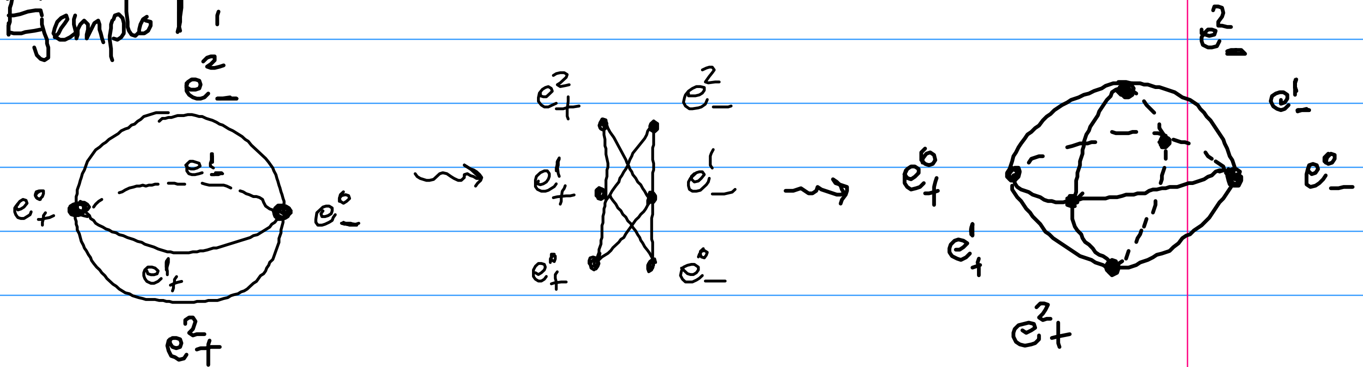
$\blacksquare$

Retomemos hdim de $F(S^k, n)$ & $B(S^k, n)$, el ingrediente inicial para $sc(S^k, n)$.

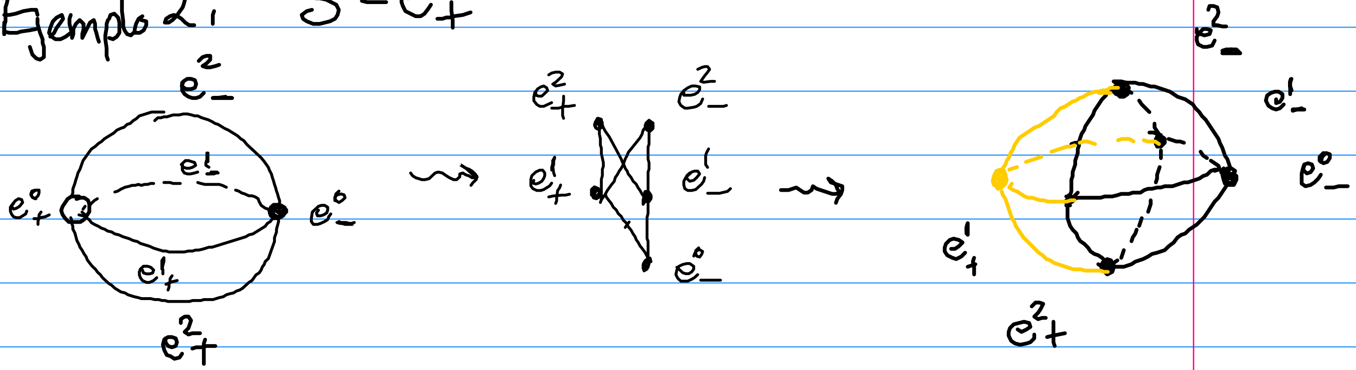
Motivación:

$$\text{Topología de CW regulares} \underset{\substack{\text{realización geométrica}\\ \text{del complejo}\\ \text{de cadenas}}}{\overset{\text{poset de caras}}{\rightleftarrows}} \text{Combinatoria de posets}$$

Ejemplo 1:



Ejemplo 2: $S^2 - e^0_+$

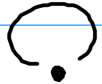


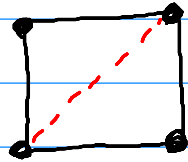
$\boxed{\text{No recuperamos el tipo de homeomorfismo, pero sí el tipo de homotopía}}$

Teorema (Basabe – G – Rudyak – Tamaki, 2012)

Para espacios celularmente estratificados con propiedades de normalidad adecuada, la realización geométrica del poset de caras es un retracto por def. fuerte funtorial.

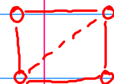
Ejemplo: Explicación combinatoria de $F(S^1,2) \underset{\simeq}{\hookleftarrow} S^1$

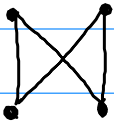
$S^1 =$  $= e^0 \cup e^1$

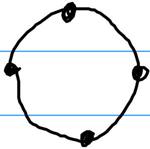
$S^1\times S^1 = e^0\times e^0 \cup e^0\times e^1 \cup e^1\times e^0 \cup e^1\times e^1 =$ 

diagonal no es subcomplejo ..... subdividimos

$S^1\times S^1 = e^0\times e^0 \cup e^0\times e^1 \cup e^1\times e^0 \cup e^1_\Delta \cup e^2_+ \cup e^2_-$

$F(S^1,2) = e^0\times e^1 \cup e^1\times e^0 \cup e^2_+ \cup e^2_- =$ 

$\rightsquigarrow$ 

$\rightsquigarrow$ 

Caso general: $F(S^k, n)$

$S^k = e^0 \cup e^k$

$(S^k)^n = \bigcup e^{i_0} \times \cdots \times e^{i_n}$ $\quad i_j \in \{0, k\}$

- Celdas relevantes para $F(S^k, n)$: a lo mas un $i_j = 0$
- Resto de las celdas:
  - subdividirlas con la "diag. gorda" como subcomplejo
  - tomar la realización geom. del poset de caras
  - contar la dimensión.

despues de quitar la "diagonal gorda"

Concretamente: en cada celda $e^k \times \cdots \times e^k \cong (\mathbb{R}^k)^n$ usamos la subdivisión dada por la k-ésima estratificación de Björner–Ziegler (que da lugar a un modelo homotópico óptimo para $F(\mathbb{R}^k, n)$).

Ingredientes de la construcción:

Para $1 \le i < j \le n$: $\ell_{ij} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i - x_j$.
empaquetadas en $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$

$\mathrm{sgn} : \mathbb{R}^k \longrightarrow S_k$ fnción signo

$$\mathrm{sgn}(x_1, \dots, x_k) := \begin{cases} \mathrm{sgn}(x_i)\, e_i & \text{si } x_i \neq 0 = x_{i+1} = \dots = x_k \\ 0 & \text{si } x_i = 0 \ \forall i \end{cases}$$

$$bz : (\mathbb{R}^k)^n = M_{nk}(\mathbb{R}) \xrightarrow{L_c} M_{qk}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathrm{sgn}_f} (S_k)^q$$

$$n\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{bmatrix}}_{k}\right. \longrightarrow q\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{bmatrix}}_{k}\right.$$

$$\Rightarrow (\mathbb{R}^k)^n = \coprod_{s \in \mathrm{Im}(bz)} bz^{-1}(s)$$

- Cada estrato es una celda abierta (está determinado por igualdades y desigualdades lineales)

- La diagonal gorda en $(\mathbb{R}^k)^n$ es la unión de aquellas celdas que incluyen un cero en su etiqueta:

$$\begin{bmatrix} \text{---} & x_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & x_n & \text{---} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_{i1} - x_{j1} & \cdots & x_{ik} - x_{jk} \end{bmatrix} \longleftarrow \text{"}i<j\text{"}$$

etiqueta cero en la posición "$i<j$" ssi

$$x_{i1} = x_{j1}, \dots, x_{ik} = x_{jk} \quad \text{i.e.} \quad x_i = x_j$$

Def

$\mathcal{E}^k_n$ = estratificación en $F(\mathbb{R}^k, n) = (\mathbb{R}^k)^n - \Delta$

Cor $BF(\mathcal{E}^k_n) \xhookrightarrow[\Sigma_n]{\simeq} F(\mathbb{R}^k, n)$

Lema (Concini-Salvetti, 2000)

$\dim BF(\mathcal{E}^k_n) = (n-1)(k-1)$

ie la cadena mas larga de celdas en $BF(\mathcal{E}^k_n)$ (necesariamente consecutivas) tiene longitud

$(n-1)(k-1)$

Demostración de $\mathrm{hdim}(F(S^k,n)) = \mathrm{hdim}(B(S^k,n)) = (n-1)(k-1)+1$

$$F(S^k,n) = e^k \times \cdots \times e^k \sqcup \coprod e^k \times \cdots \times e^k \times e^0 \times e^k \times \cdots \times e^k$$

subdividido con la estratificación de Björner-Ziegler (quitando diagonales gordas).

Análisis de cadenas mas largas:

nk

$\vdots$

$nk-(n-1)(k-1)$

$= n+k-1$

$(n-1)k$

$\vdots$

$(n-1)k-(n-2)(k-1)$

$= n+k-2$

max long posible:

$nk-n-k+2 =$

$(n-1)(k-1)+1$

[opt. por H^*]